

что, если обозначим $\delta_0 = \min_{1 \leq j \leq M-1} \delta(\hat{\theta}_j)$ и $\Omega_0 = \{(\theta, \eta) \mid \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\| \leq \delta_0, 0 \leq \eta \leq 1\}$, то при любых $(\bar{s}^{(0)}, \eta) \in \Omega_0$ существует последовательность $\{\bar{s}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}^{(k)} = \bar{s}(\eta)$, где $\bar{s}^{(0)}$ задано, $\bar{s}^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}^{(k)}, \eta)$.

Выберем разбиение отрезка $[0, 1]$ точками θ_k по правилу $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_N = 1$, и пусть выполняется условие

$$\max_{0 \leq k \leq N-L} \|\bar{s}(\theta_{k+1}) - \bar{s}(\theta_k)\| \leq \delta < \delta_0.$$

Рассмотрим итерационный процесс $\bar{s}_i^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_i^{(k)}, \theta_i)$. Точки θ_i определенные, разбиение отрезка $[0, 1]$ существует, так как функция непрерывна.

Пусть $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$. По определению $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}(\theta_{i-1})$. Встает вопрос: существуют ли p_{i-1} , чтобы сходимость сохранялась и $\bar{s}(\theta_{i-1}) \approx \bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})}$. По определению $\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = 0$. Предположим, что

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \tau < \delta_0,$$

$$\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$$

$$\|\bar{s} - \bar{s}(\theta_i)\| \leq \|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| + \|\bar{s}(\theta_i) - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \tau + \delta < \delta_0,$$

отсюда $\tau \leq \delta_0 - \delta$. Положим $\tau = \delta_0 - \delta$. p_{i-1} определяются из условия

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = \|\bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leq \delta_0 - \delta.$$

Следовательно, $\bar{s}_i \in \Omega_0$. $(\bar{s}_i^{(0)}, \theta_i) \in \Omega_0$, тогда $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. Возьмем $\bar{s}_{i+1}^{(0)} = \bar{s}_i^{(p_{i-1})}$ такие, чтобы выполнялось условие $\|\bar{s}_i^{(p_{i-1})} - \bar{s}(\theta_i)\| \leq \delta_0 - \delta$. Тогда $\{\bar{s}_{i+1}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_{i+1}^{(k)} = \bar{s}(\theta_{i+1})$. Таким образом, существуют $p_i, i = \overline{1, N-1}$ такие, что $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. $\bar{s}_N^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_N^{(k)}, \theta_N)$; $\theta_N = 1$.

Имеем $\bar{s}_N^{(0)} = \bar{s}_{N-1}^{(p_{N-1})}$ и $\{\bar{s}_N^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{s}_N^{(k)} = \bar{s}(\theta_N) = \bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts S. M. and Shipman J. S.—J. of Optimiz. Theory and Appl., 1973, v. 12, № 5, p. 459.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М., 1973.
3. Ортега Дж., Рейнбалдт В. Итерационные методы.— М., 1975.

Поступила в редакцию
04.03.78.

Кафедра численных методов
и программирования

УДК 519.4

Г. В. МАТВЕЕВ

СПИНОРНАЯ НОРМА АВТОМОРФИЗМА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ

Отображение спинорной нормы эффективно используется в теории ортогональных групп [1], а также в арифметической теории квадратичных форм [2]. Обычное определение не дает простого способа ее вычисления. Известно много утверждений, упрощающих вычисление спинорной нормы. В частности, одно из них принадлежит Цассенхаузу [3]. Цель

настоящей заметки — вычислить спинорную норму автоморфизма центральной простой алгебры A над глобальным полем K , $\text{char } K \neq 2$.

Известно, что любой K -автоморфизм σ алгебры A — внутренний. Будем рассматривать A как пространство над K с симметрической билинейной формой $\beta(x, y) = \text{Trd}(xy)$, где через Trd обозначен приведенный след [4]. Легко видеть, что форма β невырожденная. Действительно, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ — K -базис A , то определитель $\det(\beta(e_i, e_j))$ отличен от нуля, поскольку он равен дискриминанту алгебры A . Пусть u — обратимый элемент A , который индуцирует автоморфизм σ . Тогда $\beta(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Trd}(u^{-1}xu \cdot u^{-1}yu) = \text{Trd}(u^{-1}xyu) = \text{Trd}(xy) = \beta(x, y)$. Следовательно, автоморфизм σ является одновременно изометрией алгебры A , рассматриваемой как пространство с невырожденной билинейной симметрической формой β . Обозначим через Nrd отображение приведенной нормы, а через Θ — отображение спинорной нормы. Пусть n^2 — K -ранг A , K^{*2} -подгруппа квадратов мультипликативной группы поля K , $\text{char } K \neq 2$.

Теорема. Всякий автоморфизм σ центральной простой алгебры A является вращением, причем

$$\Theta(\sigma) = (\text{Nrd } u)^{n-1} K^{*2}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда A — полная матричная алгебра $M_n(K)$, $n > 1$. Необходимо доказать, что $(\det u)^{n-1} \in \Theta(\sigma)$. Для краткости, отождествим матрицу u с автоморфизмом σ . Поскольку группа $SL(n, K)$ — коммутант $GL(n, K)$, то элемент u можно заменить любым элементом, имеющим тот же определитель. Положим $g = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \alpha)$, где $\alpha = \det u$. Докажем, что $\alpha^{n-1} \in \Theta(g)$. Обозначим через e_{ij} матрицу с единицей на месте ij и нулями на остальных местах. Эти матрицы образуют базис алгебры $M_n(K)$.

Нетрудно подсчитать, что

$$g^{-1}e_{ij}g = \begin{cases} e_{ij}, & i, j \leq n-1, \text{ или } i = j = n \\ \alpha e_{ij}, & i = 1, 2, \dots, n, j = n \\ \alpha^{-1}e_{ij}, & j = 1, 2, \dots, n, i = n. \end{cases}$$

Следовательно, σ — вращение, так как $\det \sigma = \det(\text{ad } g) = (\alpha^{-1})^{n-1} \alpha^{n-1} = 1$. Через $\text{ad } g$ обозначено присоединенное представление матрицы g в базисе $\{e_{ij}\}$. Рассмотрим ограничение $\bar{g}$ вращения g на $2(n-1)$ -мерное инвариантное подпространство $V \subset M_n(K)$, порожденное базисом $\{e_{ij}\}$, где либо $i = n, j = 1, 2, \dots, n-1$, либо $j = n, i = 1, 2, \dots, n-1$. Поскольку $\text{tr}(e_{ij}e_{kl}) \neq 0$, тогда и только тогда, когда $i = l, j = k$, имеет место ортогональное разложение $M_n(K) = V \perp V_1$, где V_1 натянуто на базис $\{e_{ij}\}$, $i, j \leq n-1$, либо $i = j = n$. Отсюда вытекает, что V и V_1 невырожденные пространства и $\Theta(g) = \Theta(\bar{g})$, так как на подпространстве V_1 g действует тривиально. Нетрудно получить ортогональное разложение пространства V в $n-1$ экземпляров гиперболических плоскостей

$$V \cong \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \perp \dots \perp \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Действительно, $\text{tr}(e_{ij}^2) = 0$, $\text{tr}(e_{ij}e_{ji}) = 1$, если $e_{ij} \in V$. Поскольку эти гиперболические плоскости инвариантны относительно $\bar{g}$ и спинорная норма мультипликативна относительно ортогональных разложений, то $\Theta(g) = \Theta(\bar{g})^{n-1}$, где $\bar{g}$ — ограничение $\bar{g}$ на любую из указанных гиперболических плоскостей. Вычислим $\Theta(\bar{g})$. Пусть a, b — гиперболическая пара. Тогда $\bar{g}(a) = \alpha^{-1}a$, $\bar{g}(b) = \alpha(b)$, $\beta(a, a) = \beta(b, b) = 0$, $\beta(a, b) = 1$. Векторы $a+b$ и $a+ab$ неизотропны. Действительно,

$$\beta(a+b, a+b) = \beta(a, a) + \beta(b, b) + 2\beta(a, b) = 2,$$

$$\beta(a+ab, a+ab) = \beta(a, a) + \beta(ab, ab) + 2\beta(a, ab) = 2\alpha.$$

Поэтому можно рассмотреть симметрии τ_{a+b} и τ_{a+ab} относительно гиперплоскостей, ортогональных неизотропным векторам $a+b$ и $a+ab$ [1].

Оказывается, $\bar{g} = \tau_{a+ab}\tau_{a+b}$. Проверим это.

$$\tau_{a+b}(a) = a - \frac{2\beta(a+b, a)}{\beta(a+b, a+b)}(a+b) = a - (a+b) = -b,$$

$$\tau_{a+ab}(-b) = -b - \frac{2\beta(a+ab, -b)}{\beta(a+ab, a+ab)}(a+ab) = -b + \frac{2}{2a}(a+ab) = \frac{a}{a}.$$

Следовательно, $\tau_{a+ab}\tau_{a+b}(a) = \bar{g}(a)$. Аналогично, $\tau_{a+ab}\tau_{a+b}(b) = \bar{g}(b)$, поэтому

$$\Theta(\bar{g}) = \beta(a+ab, a+ab)\beta(a+b, a+b)K^{*2} = 4aK^{*2} = aK^{*2}.$$

Итак, $a^{n-1} \in \Theta(\bar{g})^{n-1} = \Theta(g)$, что и завершает рассмотрение случая полной матричной алгебры.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Пусть K — поле разложения алгебры A . Тогда $K \times_K A$ — полная матричная алгебра над K . Рассмотрим вложение $A \ni u \rightarrow \bar{u} \in K \times_K A$.

На основании приведенной ниже леммы $\Theta(u) \subset \Theta(\bar{u})$, т. е. $\Theta(u) = (\text{Nrd } u)^{n-1}K^{*2}$. Известно, что почти все пополнения K_v поля K относительно нетривиального нормирования v являются полями разложения, поэтому, почти всегда, имеет место включение $\Theta(u)(\text{Nrd } u)^{1-n} \subset K_v^{*2}$. Применяя теорему о квадратах в глобальном поле [2], получаем, что $\Theta(u)(\text{Nrd } u)^{1-n} \in K^{*2}$.

Лемма. Пусть V — пространство с невырожденной билинейной симметрической формой β над полем K , $\text{char } K \neq 2$. Пусть F — поле, содержащее поле K . Тогда каноническая изометрия $\varphi: V \rightarrow F \times_K V$ индуцирует мономорфизм групп вращений $\bar{\varphi}: O^+(V) \rightarrow O^+(F \times_K V)$, такой что $\Theta(\sigma) \subset \Theta(\bar{\varphi}(\sigma))$, $\sigma \in O^+(V)$.

Доказательство. По теореме Картана — Дьедонне [1, 4] $\sigma = \tau_{u_1}\tau_{u_2} \dots \tau_{u_m}$, где u_i — неизотропный вектор $i = \overline{1, m}$. Определим действие $\bar{\varphi}$ на σ по формуле

$$\bar{\varphi}(\sigma) = \tau_{\varphi(u_1)}\tau_{\varphi(u_2)} \dots \tau_{\varphi(u_m)}.$$

Тогда $\Theta(\sigma) = \beta(u_1, u_1) \dots \beta(u_m, u_m)K^{*2} \subset \beta(\varphi(u_1), \varphi(u_1)) \dots \beta(\varphi(u_m), \varphi(u_m))F^{*2} = \Theta(\bar{\varphi}(\sigma))$.

В заключение отметим, что доказанная теорема, по всей видимости, справедлива и в случае алгебр над произвольным полем K . Например, это так для полных матричных алгебр, простых алгебр нечетного ранга и кватернионов. С помощью этой же теоремы удалось обнаружить отклонения от принципа Хассе для решеток в полной матричной алгебре над глобальным полем [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артин Э. Геометрическая алгебра. — М., 1967.
2. O'Meara O. T. Introduction to quadratic forms. — Springer, 1973.
3. Zassenhaus H. — Arch. Math., v. 13, 1962, p. 434.
4. Бурбаки Н. Алгебра, модули, кольца, формы. — М., 1968.
5. Матвеев Г. В. XIV Всесоюзная алгебраическая конференция. Тез., ч. 2. — Новосибирск, 1977, с. 58.

Поступила в редакцию
11.03.78.

Кафедра высшей математики