или $\Theta^0=\Theta^1_{i_0}$ ($\Theta^0=\Theta^2_{i_0}$), а $i_0 \in I_н$. Находим новый план $\bar{x}=x^{k+1}$ по формуле

$$\bar{x}=x+\Theta^0 y. \tag{4}$$

Положим $\bar{A}_{оп}=A_{оп}$ ($\bar{A}_{оп}=A^{k+1}_{оп}$) и переходим к п. 7. Если $\Theta^0=\Theta^1_{i_0}$ или $\Theta^0=\Theta^2_{i_0}$, но $i_0 \in I_{оп}$, то новый опорный план $\bar{x}$ пересчитывается согласно (4), а $\bar{A}_{оп}$ получается из $A_{оп}$ заменой столбца a_{i_0} на столбец a_{j_0}, где j_0 один из таких индексов $j \in I_н$, что $0<x_j<d_j$, $x_{i_0 j_0} \neq 0$ (это всегда возможно, если опорный план $x=x^k$ не вырожден)*.

7. k-ая итерация метода окончена. Переходим к п. 1 с $k=k+1$ и новым опорным планом $\{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование.— М., 1965.
2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений.— М., 1963.
3. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М., 1975.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 6, с. 85.

Поступила в редакцию
24.11.77.

Кафедра методов оптимального управления

УДК 518:517.91/94

Е. Г. КУЗИЧЕВА

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РОБЕРТСА — ШИПМАНА

Приложение методов инвариантного погружения к граничным задачам связано с решением двух основных вопросов: 1) выбор способа параметризации задачи; 2) выбор сечений задачи.

В работе [1] подробно рассмотрен вопрос о выборе сечений, и путем численных экспериментов дана их качественная характеристика. По существу, такая характеристика является эвристической.

Нами предпринимается попытка доказать сходимость одного из алгоритмов Робертса — Шипмана и тем самым выявить некоторые важные при решении упомянутых вопросов закономерности.

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\bar{y}'=\bar{f}(t, \bar{y}), \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{1}$$

с граничными условиями специального вида

$$y_i(a)-c_i=0, \quad i=\overline{1, r}, \tag{2}$$

$$y_{s_m}(b)-d_m=0, \quad m=\overline{1, n-r}, \tag{3}$$

где $\bar{y}:[a, b]\to R^n$, $\bar{f}:[a, b]\times R^n \to R^n$, c_i, d_m — известные числа.

Будем считать, что граничная задача (1)—(3) имеет единственное решение, обладающее необходимой в дальнейшем степенью гладкости.

Предположим, что задачу (1)—(3) необходимо численно решить методом пристрелки [2]. При этом из-за неустойчивости уравнений могут возникать некоторые трудности, которые авторы [1] предлагают преодолеть путем разделения правых частей (1) на две составляющие (линейную и нелинейную) и решения ряда двухточечных граничных задач, характерных для погружения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

---

* Вопрос о наилучшем выборе индекса j_0 требует дополнительных исследований.

Предположим, что правая часть (1) может быть записана в виде $f_i = p_i + q_i$, $i=\overline{1, n}$, допускающем простую разрешимость двухточечной граничной задачи для уравнения $\bar{y}' = \bar{p}(t, \bar{y})$ с условиями (2) и (3). Таким образом, имеем

$$\bar{y}' = (1-\Theta_k)\bar{p}(t, \bar{y}) + \Theta_k \bar{f}(t, \bar{y}), \ k=0, 1, 2, \ldots$$

В работе [1] предлагаются три схемы разделения: линейная, вариационная и квазилинейная. Рассмотрим линейное разделение:

$$\bar{p}(t, \bar{y}) = B(t)\bar{y} + \bar{b}(t),$$

где $B:[a, b] \to L(R^n, R^n)$, $\bar{b}:[a, b] \to R^n$.

Сопоставим с задачей (1)—(3) следующую параметризованную задачу:

$$\begin{cases} \bar{z}' = (1-\theta)\bar{p}(t, \bar{z}) + \theta\bar{f}(t, \bar{z}), \\ z_i(a) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r} \\ z_{s_m}(b) - d_m = 0, \quad m = \overline{1, n-r}, \end{cases} \tag{4}$$

где $\bar{z} \equiv \bar{z}(t, \theta)$; $\bar{z}(t, 1) \equiv \bar{y}(t)$.

Рассмотрим разбиение отрезка [0, 1]:

$$\{\theta_k\}_0^N; \ 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots \theta_N = 1.$$

Пусть $\theta_0 = 0$. Тогда имеем

$$\bar{z}' = \bar{p}(t, \bar{z}), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

$$\bar{z}(a, 0) - c_i = 0, \quad i = \overline{1, r}.$$

$$\bar{z}(b, 0) - d_m = 0 \quad m = \overline{1, n-r}.$$

Это линейная задача, поэтому $\bar{z}(t, 0)$ сможем, вообще говоря, найти точно: $\bar{z}_0 = \bar{z}_0(t) = \bar{z}(t, 0)$. Пусть теперь $\theta_1 \neq 0$; $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta_0$. Система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} \bar{z}_1' = (1-\theta_1)\bar{p}(t, \bar{z}_1) + \theta_1\bar{f}(t, \bar{z}_1), & a \leqslant t \leqslant b \\ \bar{z}_1 = \bar{z}_1(t) & \\ \bar{z}_1(a) - c_i = 0, & i = \overline{1, r} \\ \bar{z}_1(b) - d_m = 0. & m = \overline{1, n-r} \end{cases} \tag{5}$$

Систему (5) решаем по методу прямой пристрелки. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} \bar{u}_1'(t) = (1-\theta_1)\bar{p}(t, \bar{u}_1(t)) + \theta_1\bar{f}(t, \bar{u}_1(t)), \ a \leqslant t \leqslant b \\ \bar{u}_1(t, \bar{c}^0)|_{t=a} = \bar{c}^0. \end{cases} \tag{6}$$

В качестве $\bar{c}^0$ выбираем вектор $\bar{c}^0 = \bar{z}_0(a) = (c_1, c_2, \ldots c_r, z_{0\,r+1}, z_{0\,r+2}, \ldots z_{0n})^T = (c_1, c_2, \ldots c_r, s_1^0, s_2^0, \ldots s_{n-r}^0)^T$. Решая (6), получаем $\bar{u}_1(b, \bar{c}^0) = \bar{u}_1(b, s_1^0, s_2^0, \ldots s_{n-r}^0)^T$. Если $\bar{u}_1(t, \bar{c}^0) \equiv \bar{z}_1(t)$, то должно выполняться

$$u_{1s_k}(b, s_1^0, s_2^0, \ldots s_{n-r}^0) = d_k, \ k = \overline{1, n-r}. \tag{7}$$

Запишем (7) в векторной форме

$$\bar{\varphi}(\bar{s}_1, \theta_1) = \bar{d},$$

$$\bar{\varphi} = (u_{1s_1}, u_{1s_2}, \ldots u_{1s_m})^T = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m)^T, \tag{8}$$

$$\bar{s}_1 = (s_1^0, s_2^0, \ldots s_{n-r}^0)^T, \ \bar{d} = (d_1, d_2, \ldots d_{n-r})^T.$$

Применим к (8) метод Ньютона, тогда

$$\bar{s}_1^{(k+1)} = \bar{s}_1^{(k)} - \left[\frac{\partial\bar{\varphi}(\bar{s}_1^{(k)}, \theta_1)}{\partial\bar{s}}\right]^{-1} \cdot \bar{\varphi}(\bar{s}_1^{(k)}, (\theta_1), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $\bar{s}_1^{(0)} = \bar{c}^0(0)$.

Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{s}_1^{(k)} = \bar{s}_1^*$, $\bar{s}_1^* = (s_{11}^*, s_{12}^*, \ldots s_{1n-r}^*)^T$,

где $s_{1i}^* = z_{1r+i}(a)$, $i = \overline{1, n-r}$, т. е. это $(r+1)$-ая, $(r+2)$-ая, … (n)-ая компоненты решения граничной задачи (5), которая решается аналогично задаче Коши (6), если в качестве $\bar{c}^0$ берется вектор

$$\bar{c}^0 = (c_1, c_2, c_3, \ldots c_r s_{11}^*, s_{12}^*, s_{13}^*, \ldots s_{1n-r}^*)^T.$$

Возникают вопросы [3]: 1) когда (9) будет сходящимся; 2) каким должно быть разбиение отрезка [0, 1] для θ, чтобы итерации (9) и подобные им были сходящимися. Решение системы

$$\bar{\varphi}(\bar{s}_0, \theta_0) = 0$$

известно: $s_{01}^* = z_{0r+1}(a)$, $s_{02}^* = z_{0r+2}(a)$, … $s_{0n-r}^*(a) = z_{0n}(a)$. На основании (9) запишем $\bar{s} = \bar{s} - A\bar{\varphi}$.

Рассмотрим область $\hat{D} \subset R^n$. Пусть задача Коши (6) такова, что для $\forall \bar{c}^0 \in \hat{D}$ существует решение, и оно непрерывно дифференцируемо по $\bar{c}^0$ в $\hat{D}$. Можно положить, что $\Phi(\bar{s}, \theta) = \bar{s} - A\bar{\varphi}$, $\det A(\bar{s}(\theta)) \neq 0$, $\Phi : D \times [0, 1] \subset R^{n+1} \to R^n$; $D \subset \hat{D}$. Предположим, что $\bar{y}^*(a) \in \hat{D}$, $\bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$ и для любого $\theta \in [0, 1]$ существует $\bar{s} : [0, 1] \to R^n$ такое, что $\bar{\varphi}(\bar{s}(\theta), \theta) \equiv 0$. Выбираем сечение $L(\theta_k, b, 1)$ для оболочки (12): $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_N = 1$. В результате возникает итерационный процесс, который имеет вид:

$$\bar{s}_i^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_i^{(k)}, \theta_i), \; i = \overline{1, N-1},$$

где

$$\bar{s}_1^0 = \bar{s}_0, \; \bar{s}_i^0 = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}, \; \bar{s}_N^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_N^{(k)}, 1), \; k = \overline{0, p_{k-1}}; \tag{10}$$

$$\bar{s}_N^{(0)} = \bar{s}_{N-1}^{p_{N-1}}.$$

Нас интересует в основном сходимость $\{\bar{s}_N^{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$.

Теорема. Пусть при любом $\bar{s} \in \hat{D} \subset R^n$ (некоторая область, содержащая $\bar{y}^*(a)$) задача Коши $\bar{u}' = \bar{\psi}(t, \bar{u})$, $\bar{u}(t, \bar{s})|_{t=a} = \bar{s}$, $a \leqslant t \leqslant b$, где $\bar{\psi}(t, \bar{u}) = (1-\theta_1)\bar{p}(t, \bar{u}(t)) + \theta_1 \bar{f}(t, \bar{u}(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, имеет единственное решение $\bar{u}(t, \bar{s})$, непрерывно дифференцируемое в $\hat{D}$ по $\bar{s}$.

Пусть отображение $\Phi : D \times [0, 1] \subset R^{n+1} \to R^n$ F-дифференцируемо по $\bar{s}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}$ непрерывна на $D \times [0, 1]$; $D \subset \hat{D}$. Предположим, что уравнение $\bar{\varphi}(\bar{s}, \theta) = 0$ для любого $\theta \in [0, 1]$ имеет непрерывное решение $\bar{s} : [0, 1] \to \operatorname{int}(D)$ при условии, что $\bar{s}(0) = \Phi(\bar{s}(0), 0)$ для некоторого значения $\bar{s}(0) = \bar{s}_0 \in D$.

Если на решении $\bar{s}(\theta)$ спектральный радиус матрицы $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}$ меньше единицы, т. е. $\rho\left[\dfrac{\partial \Phi(\bar{s}(\theta), \theta)}{\partial \bar{s}}\right] = q(\theta) < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то

1) существует разбиение θ_k: $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_N = 1$ отрезка [0, 1] и целые положительные числа $p_1, p_2 \ldots p_{N-1}$ — номера итерации такие, что $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $i = \overline{0, N-1}$, определяемые по правилу (12), содержатся в D;

2) $\lim\limits_{i\to\infty} \bar{s}_N^{(i)} = \bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$,

Доказательство. Теорема ставит два вопроса: а) корректно ли определены $\{\bar{s}_l^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$; б) будет ли иметь место сходимость $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{s}_N^{(k)}=\bar{s}(1)$.

Обозначим через M множество: $M=\{\bar{s}\in R^n\,|\,\bar{s}=\bar{s}(\theta),\ 0\leqslant\theta\leqslant 1\}$. Так как $\bar{s}$ непрерывно и рассматривается на замкнутом отрезке $[0, 1]$, то M — замкнутое множество, а следовательно, компактное.

По условию теоремы $M\subset\operatorname{int}(D)$. Будем считать, что $D_0\subset D$ компактное и такое, что $M\subset\operatorname{int}(D_0)$. Далее пусть $\theta\in[0, 1]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\|\cdot\|_\theta$, что

$$\left\|\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\theta),\ \theta)}{\partial\bar{s}}\right\|_\theta\leqslant q(\theta)+\varepsilon. \tag{11}$$

Пусть для любого $\varepsilon>0$ $q(\theta)+3\varepsilon<1$. $\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{s}}$ непрерывна на $D\times[0, 1]$, следовательно, равномерно непрерывна на $D_0\times[0, 1]$. Значит, существует $\delta_1=\delta_1(\theta)>0$ такое, что

$$\|\Phi'(\bar{s},\ \theta_1)-\Phi'(\bar{d},\ \theta_2)\|\leqslant\varepsilon, \tag{12}$$

как только $\bar{s}$, $\bar{d}\in D_0$ и $\|\bar{s}-\bar{d}\|_\theta\leqslant\delta_1$, θ_1, $\theta_2\in[0, 1]$ и $\|\theta_1-\theta_2\|\leqslant\delta_1$. Требуется, чтобы

$$\|\bar{s}(\theta_1)-\bar{s}(\theta_2)\|_\theta\leqslant\delta_1 \tag{13}$$

для любых θ_1, $\theta_2\in[0, 1]$. Пусть $\delta_2=\delta(\theta)>0$ такое, что при $|\theta_1-\theta_2|\leqslant\delta_2$ выполняется неравенство (13).

Определим $\delta^*=\min(\delta_1,\ \delta_2)$. Пусть $\delta\leqslant\delta^*$, $\delta>0$ и такое, что

$$M_\theta=\{\bar{s}\in R^n\,|\,\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|_\theta\leqslant\delta,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1\}\subset\operatorname{int}(D_0).$$

Рассмотрим окрестность $|\eta-\theta|<\delta$. В силу неравенств (11), (12) имеем

$$\left\|\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)}{\partial\bar{s}}\right\|_\Theta=\left\|\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)}{\partial\bar{s}}-\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\theta),\ \theta)}{\partial\bar{s}}+\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\theta),\ \theta)}{\partial\bar{s}}\right\|_\Theta\leqslant q(\theta)+2\varepsilon.$$

Будем рассматривать такие $\bar{s}$, чтобы отображение Φ оставалось отображением сжатия, т. е.

$$\|\Phi(\bar{s},\ \eta)-\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)\|_\Theta\leqslant\mu\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|_\Theta,\ 0<\mu<1,$$

$$\|\Phi(\bar{s},\ \eta)-\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)-\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)}{\partial\bar{s}}(\bar{s}-\bar{s}(\eta))+$$

$$+\frac{\partial\Phi(\bar{s}(\eta),\ \eta)}{\partial\bar{s}}(\bar{s}-\bar{s}(\eta))\|\leqslant\sup\left\|\frac{\partial\Phi(\bar{s}+\lambda(\bar{s}(\eta)-\bar{s}),\ \eta)}{\partial\bar{s}}\right\|_\Theta\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|_\Theta+$$

$$+q(\theta)+2\varepsilon\leqslant(q(\theta)+3\varepsilon)\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|=\mu\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|_\Theta.$$

Определим $\Omega_\Theta=\{(\bar{s},\ \eta)\,|\,|\eta-\theta|\leqslant\delta,\ \|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|_\Theta\leqslant\delta\}$. Оказывается, что Φ осуществляет отображение сжатия в области Ω_Θ.

Для $\forall(\bar{s}^{(0)},\ \eta)\in\Omega_\Theta$ итерация $\bar{s}^{(k+1)}=\Phi(\bar{s}^{(k)},\ \eta)$ с $\bar{s}^0$ заданным будет такой, что последовательность $\{\bar{s}^{(k)}\}_0^\infty\in D_0$ будет сходиться к $\bar{s}(\eta)$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\bar{s}^{(k)}=\bar{s}(\eta).$$

Рассмотрим $\|\cdot\|^*$. Тогда существуют такие s_1 и s_2; $0<s_1\leqslant s_2$ и $\|\cdot\|$, что $s_1\|\bar{d}\|\leqslant\|\bar{d}\|^*\leqslant s_2\|\bar{d}\|$. Теперь рассмотрим $\|\cdot\|$. Существуют такие $\delta=\delta(\theta)>0$ и $\Omega=\{(\bar{s},\ \eta)\,|\,|\eta-\theta|\leqslant\delta$ и $\|\bar{s}-\bar{s}(\eta)\|\leqslant\delta\}$, что (21) выполняется для $\forall\,\theta\in[0, 1]$.

Отрезок $[0, 1]$ компактен. Следовательно, существует такое покрытие его конечным множеством интервалов

$$J_j=\{\theta\,|\,|\theta-\theta_j|\leqslant\delta\ (\hat{\theta}_j),\ \delta\ (\theta_j)>0\},\ \ j=\overline{1,\ M},$$

что, если обозначим $\delta_0 = \min_{1 \leqslant j \leqslant M-1} \delta(\hat{\theta}_j)$ и $\Omega_0 = \{(\theta, \eta) \mid \|\bar{s} - \bar{s}(\eta)\| \leqslant \delta_0, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$, то при любых $(\bar{s}^0, \eta) \in \Omega_0$ существует последовательность $\{\bar{s}^{(k)}\}_0^\infty \in D_0$ и $\lim_{k=\infty} \bar{s}^{(k)} = \bar{s}(\eta)$, где $\bar{s}^{(0)}$ задано, $\bar{s}^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}^{(k)}, \eta)$.

Выберем разбиение отрезка [0, 1] точками θ_k по правилу $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_N = 1$, и пусть выполняется условие

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant N-L} \|\bar{s}(\theta_{k+1}) - \bar{s}(\theta_k)\| \leqslant \delta < \delta_0.$$

Рассмотрим итерационный процесс $\bar{s}_i^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_i^{(k)}, \theta_i)$. Точки θ_i определенные, разбиение отрезка [0, 1] существует, так как функция непрерывна.

Пусть $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$. По определению $\bar{s}_i^{(0)} = \bar{s}(\theta_{i-1})$. Встает вопрос: существуют ли p_{i-1}, чтобы сходимость сохранялась и $\bar{s}(\theta_{i-1}) \approx \bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})}$. По определению $\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = 0$. Предположим, что

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leqslant \tau < \delta_0,$$

$$\bar{s}_i^0 = \bar{s}_{i-1}^{p_{i-1}}$$

$$\|\bar{s} - \bar{s}(\theta_i)\| \leqslant \|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| + \|\bar{s}(\theta_i) - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leqslant \tau + \delta \leqslant \delta_0,$$

отсюда $\tau \leqslant \delta_0 - \delta$. Положим $\tau = \delta_0 - \delta$. p_{i-1} определяются из условия

$$\|\bar{s}_i^{(0)} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| = \|\bar{s}_{i-1}^{(p_{i-1})} - \bar{s}(\theta_{i-1})\| \leqslant \delta_0 - \delta.$$

Следовательно, $\bar{s}_i \in \Omega_0$. $(\bar{s}_i^{(0)}, \theta_i) \in \Omega_0$, тогда $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$, $\lim_{k \to \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. Возьмем $\bar{s}_{i+1}^{(0)} = \bar{s}_i^{(p_i - 1)}$ такие, чтобы выполнялось условие $\|\bar{s}_i^{(p_i)} - \bar{s}(\theta)\| \leqslant \delta_0 - \delta$. Тогда $\{\bar{s}_{i+1}^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \to \infty} \bar{s}_{i+1}^{(k)} = \bar{s}(\theta_{i+1})$. Таким образом, существуют p_i, $i = \overline{1, N-1}$ такие, что $\{\bar{s}_i^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D_0$ и $\lim_{k \to \infty} \bar{s}_i^{(k)} = \bar{s}(\theta_i)$. $\bar{s}_N^{(k+1)} = \Phi(\bar{s}_N^{(k)}, \theta_N)$; $\theta_N = 1$.

Имеем $\bar{s}_N^{(0)} = \bar{s}_{N-1}^{(p_N - 1)}$ и $\{\bar{s}_N^{(k)}\}_{k=0}^\infty \in D$, $\lim_{k \to \infty} \bar{s}_N^{(k)} = \bar{s}(\theta_N) = \bar{s}(1) = \bar{y}^*(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts S. M. and Shipman J. S.— J. of Optimiz. Theory and Appl., 1973, v. 12, № 5, p. 459.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы.— М., 1973.
3. Ортега Дж., Рейнбалдт В. Итерационные методы.— М., 1975.

Поступила в редакцию
04.03.78.

Кафедра численных методов и программирования

УДК 519.4

Г. В. МАТВЕЕВ

СПИНОРНАЯ НОРМА АВТОМОРФИЗМА ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРОСТОЙ АЛГЕБРЫ

Отображение спинорной нормы эффективно используется в теории ортогональных групп [1], а также в арифметической теории квадратичных форм [2]. Обычное определение не дает простого способа ее вычисления. Известно много утверждений, упрощающих вычисление спинорной нормы. В частности, одно из них принадлежит Цассенхаузу [3]. Цель