УДК 62—5(

В. М. РАКЕЦКИЙ

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу квадратичного программирования с двухсторонними ограничениями

$$F(x) = x'Dx + c'x \to \min_x, \ Ax = b, \ 0 \leqslant x \leqslant d, \qquad (1)$$

где D — знакоположительная симметрическая $n \times n$-матрица; A — $m \times n$-матрица, $\operatorname{rank} A = m$, x, c, d — n-векторы; b — m-вектор.

Основные алгоритмы квадратичного программирования описаны в [1—3]. Методы Била и Вулфа во многом основаны на симплексметоде. Поэтому итерации в них ведутся по специальным (базисным) планам. Возможность использования произвольных планов предусматривается в методах Зойтендейка и в методе проекции сопряженных направлений. В предлагаемом алгоритме вычисления ведутся также по произвольным планам, что позволяет использовать любую априорную информацию о планах. Выбор подходящих направлений осуществляется с помощью совместного использования метода [4] и метода сопряженных градиентов. Для невырожденных задач метод является конечным и позволяет на каждой итерации оценивать отклонение по целевой функции текущего плана от оптимального.

Пусть $\{x^1, A^1_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план; ε — допустимое отклонение плана x от оптимального по целевой функции, $\{x, A_{\text{оп}}\}$ $(x = x^k, A_{\text{оп}} = A^{\text{к}}_{\text{оп}})$ — опорный план на k — ой итерации.

1. По опорному плану $\{x, A_{\text{оп}}\}$ вычислим векторы

$$f = \frac{\partial F(x)}{\partial x}, \ u' = f'_{\text{оп}} A^{-1}_{\text{оп}}, \ \Delta'_{\text{н}} = u' A_{\text{н}} - f'_{\text{н}}.$$

2. Проверим критерий оптимальности:

$$\Delta_j \leqslant 0, \ x_j = 0; \ \Delta_j \geqslant 0, \ x_j = d_j; \ \Delta_j = 0, \ 0 < x_j < d_j; \ j \in I_{\text{н}}. \qquad (2)$$

Если соотношения (2) выполняются, то алгоритм оканчивает работу, $x = x^k$ — оптимальный план в задаче (1). В противном случае переходим к п. 3.

3. Проверим достаточное условие субоптимальности:

$$\sum_{\Delta_i > 0} x_i \Delta_i + \sum_{\Delta_i < 0} (x_i - d_i) \Delta_i \leqslant \varepsilon.$$

Если оно выполняется, то $x = x^k$ — ε-оптимальный план в задаче (1) и ее решение может быть прекращено; иначе переходим к п. 4.

4. Строим множества $I^{\text{кр}}_{\text{н}} = \{i : x_i = 0 \vee x_i = d_i, \ i \in I_{\text{н}}\}$, $I^0_{\text{н}} = \{i : 0 < x_i < d_i, \Delta_i = 0, \ i \in I_{\text{н}}\}$. Если $|I^0_{\text{н}}| + |I^{\text{кр}}_{\text{н}}| = n - m$ (символом $|I|$ обозначено количество элементов множества I), то строим $I^{\text{кр}}_{\text{н}}(*) = I^{\text{кр}}_{\text{н}} \setminus \{i_1, \ldots, i_\alpha\}$, где i_j, $j = \overline{1, \alpha}$ — индексы, на которых нарушаются соотношения (2); если $|I^0_{\text{н}}| + |I^{\text{кр}}_{\text{н}}| < n - m$, то $I^{\text{кр}}_{\text{н}}(*) = I^{\text{кр}}_{\text{н}}$.

5. Вводим производную задачу:

$$\overline{F}(y) = F(x+y) - F(x) = y'Dy + f'y \to \min; \ Ay = 0;$$
$$-x_i \leqslant y_i \leqslant d_i - x_i, \ i \in I_{\text{н}} \setminus I^{\text{кр}}_{\text{н}}(*); \ y_i = 0, \ i \in I^{\text{кр}}_{\text{н}}(*).$$

Положим $y^2 = 0$, $\overline{\Delta}^1_{\text{н}} = \Delta^{\text{к}}_{\text{н}}$, $p^1 = \{p^1_i, \ i \in I_{\text{н}}\} = 0$.

Пусть y $(y = y^l)$ — план производной задачи на l-ом шаге ее решения $(l = 2, 3, \ldots)$. Производная задача решается методом сопряженных градиентов с использованием опоры $A^{\text{к}}_{\text{оп}}$. Процедура на l-ом шаге сводится к следующим операциям.

а) По плану y вычислим векторы $\overline{f}$, $\overline{u}$, $\overline{\Delta}_{н}$:

$$\overline{f}_i = \begin{cases} 0, & i \in I_{н}^{кр}(*), \\ \dfrac{\partial \overline{F}(y)}{\partial y} = \dfrac{\partial F(x+y)}{\partial y}, & i \in I \diagdown I_{н}^{кр}(*); \end{cases}$$

$$\overline{u}' = \overline{f}'_{оп} A_{оп}^{-1};$$

$$\overline{\Delta}_i = \begin{cases} 0, & i \in I_{н}^{кр}(*), \\ a'_i \overline{u} - \overline{f}_i, & i \in I_{н} \diagdown I_{н}^{кр}(*), \end{cases}$$

где a_i — i-ый столбец матрицы A.

б) Проверим соотношения оптимальности:

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta}_i \leqslant 0, \ y_i = -x_i; \ \overline{\Delta}_i \geqslant 0, \ y_i = d_i - x_i; \\ &\overline{\Delta}_i = 0, \ -x_i < y_i < d_i - x_i; \ i \in I_{н} \diagdown I_{н}^{кр}(*). \end{aligned} \tag{3}$$

Если соотношения (3) выполняются, то решение производной задачи прекращаем и переходим к п. 6 ($y = y^l$ — оптимальный план производной задачи). В противном случае переходим к пункту в).

в) Строим множества:

$$\overline{I}_{н}^{кр} = \{i : y_i = -x_i \vee y_i = d_i - x_i, \ \ i \in I_{н} \diagdown I_{н}^{кр}(*)\},$$

$$\overline{I}_{н}^{0} = \{i : -x_i < y_i < d_i - x_i, \ \overline{\Delta}_i = 0, \ i \in I_{н} \diagdown I_{н}^{кр}(*)\}.$$

Если $|\overline{I}_{н}^{кр}| + |\overline{I}_{н}^{0}| + |I_{н}^{кр}(*)| = n - m$, то положим $p^{l-1} = 0$, $\overline{I}_{н}^{кр}(*) = \overline{I}_{н}^{кр} \diagdown \{i_1, \ldots, i_\alpha\}$, где i_j, $j = \overline{1, \alpha}$, индексы, на которых нарушаются условия оптимальности (3). Если $|\overline{I}_{н}^{кр}| + |\overline{I}_{н}^{0}| + |I_{н}^{кр}(*)| < n - m$, то p^{l-1} остается без изменения, а $\overline{I}_{н}^{кр}(*) = \overline{I}_{н}^{кр}$.

г) Положим $\overline{\Delta}_i = 0$, $i \in \overline{I}_{н}^{кр}(*)$, вычислим $\beta = \dfrac{\overline{\Delta}'_{н} \overline{\Delta}_{н}}{(\overline{\Delta}_{н}^{l-1})' \overline{\Delta}_{н}^{l-1}}$, векторы $p = \overline{\Delta}_{н} + \beta p^{l-1}$, $q' = \{q'_{оп}, q'_{н}\}$: $q_{н} = p$, $q_{оп} = -A_{оп}^{-1} A_{н} p$ и

$$\gamma = \left[\frac{\partial \overline{F}(y+q)}{\partial y} - \frac{\partial \overline{F}(y)}{\partial y}\right]' q.$$

д) Вычислим максимально допустимый шаг $\overline{\Theta}^0$ вдоль направления q:

$$\overline{\Theta}^0 = \min\{\overline{\Theta}_{i_0}^1, \overline{\Theta}_{i_0}^2, \overline{\Theta}\},$$

$$\overline{\Theta}_{i_0}^1 = \min_{q_i > 0} \frac{d_i - x_i - y_i}{q_i} = \frac{q_{i_0} - x_{i_0} - y_{i_0}}{q_{i_0}},$$

$$\overline{\Theta}_{i_0}^2 = \min_{q_i < 0} \frac{-x_i - y_i}{q_i} = -\frac{x_{i_0} + y_{i_0}}{q_{i_0}}, \ i \in I_{н}; \ \overline{\Theta} = \begin{cases} \infty, & \gamma = 0 \\ \dfrac{\overline{\Delta}'_{н} p}{\gamma}, & \gamma > 0. \end{cases}$$

Если $\overline{\Theta}^0 = \overline{\Theta}_{i_0}^1$ или $\overline{\Theta}^0 = \overline{\Theta}_{i_0}^2$, то положим $p = 0$.

е) Находим новый план $\overline{y} = y^{l+1}$ производной задачи $\overline{y} = y + \overline{\Theta}^0 q$. На этом l-ый шаг решения производной задачи заканчивается. Переходим к а) с $l = l + 1$. Через конечное число шагов производная задача будет решена.

6. По решению производной задачи $\overline{y}$ находим максимально допустимый шаг в исходной задаче (1):

$$\Theta^0 = \{\Theta_{i_0}^1, \Theta_{i_0}^2, 1\},$$

где $\Theta_{i_0}^1 = \min\limits_{y_i > 0} \dfrac{d_i - x_i}{y_i} = \dfrac{d_{i_0} - x_{i_0}}{y_{i_0}}$, $\Theta_{i_0}^2 = \min\limits_{y_i < 0} \dfrac{-x_i}{y_i} = -\dfrac{x_{i_0}}{y_{i_0}}$. Пусть $\Theta^0 = 1$

или $\Theta^0=\Theta_{i_0}^1$ ($\Theta^0=\Theta_{i_0}^2$), а $i_0 \in I_н$. Находим новый план $\bar{x}=x^{k+1}$ по формуле

$$\bar{x}=x+\Theta^0 y. \tag{4}$$

Положим $\bar{A}_{оп}=A_{оп}$ ($\bar{A}_{оп}=A_{оп}^{k+1}$) и переходим к п. 7. Если $\Theta^0=\Theta_{i_0}^1$ или $\Theta^0=\Theta_{i_0}^2$, но $i_0 \in I_{оп}$, то новый опорный план $\bar{x}$ пересчитывается согласно (4), а $\bar{A}_{оп}$ получается из $A_{оп}$ заменой столбца a_{i_0} на столбец a_{j_0}, где j_0 один из таких индексов $j \in I_н$, что $0<x_j<d_j$, $x_{i_0 j_0} \neq 0$ (это всегда возможно, если опорный план $x=x^k$ не вырожден)*.

7. k-ая итерация метода окончена. Переходим к п. 1 с $k=k+1$ и новым опорным планом $\{\bar{x}, \bar{A}_{оп}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование.— М., 1965.
2. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений.— М., 1963.
3. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М., 1975.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М.— Автоматика и телемеханика, 1977, № 6, с. 85.

Поступила в редакцию
24.11.77.

Кафедра методов оптимального управления

УДК 518:517.91/94

Е. Г. КУЗИЧЕВА

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РОБЕРТСА — ШИПМАНА

Приложение методов инвариантного погружения к граничным задачам связано с решением двух основных вопросов: 1) выбор способа параметризации задачи; 2) выбор сечений задачи.

В работе [1] подробно рассмотрен вопрос о выборе сечений, и путем численных экспериментов дана их качественная характеристика. По существу, такая характеристика является эвристической.

Нами предпринимается попытка доказать сходимость одного из алгоритмов Робертса — Шипмана и тем самым выявить некоторые важные при решении упомянутых вопросов закономерности.

Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\bar{y}'=\bar{f}(t, \bar{y}), \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{1}$$

с граничными условиями специального вида

$$y_i(a)-c_i=0, \quad i=\overline{1, r}, \tag{2}$$

$$y_{s_m}(b)-d_m=0, \quad m=\overline{1, n-r}, \tag{3}$$

где $\bar{y}:[a, b] \to R^n$, $\bar{f}:[a, b] \times R^n \to R^n$, c_i, d_m — известные числа.

Будем считать, что граничная задача (1)—(3) имеет единственное решение, обладающее необходимой в дальнейшем степенью гладкости.

Предположим, что задачу (1)—(3) необходимо численно решить методом пристрелки [2]. При этом из-за неустойчивости уравнений могут возникать некоторые трудности, которые авторы [1] предлагают преодолеть путем разделения правых частей (1) на две составляющие (линейную и нелинейную) и решения ряда двухточечных граничных задач, характерных для погружения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

* Вопрос о наилучшем выборе индекса j_0 требует дополнительных исследований.