Математика и механика

УДК 62—50

ЛЕ ТЬИ ЗУНГ

ОПТИМАЛЬНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ НЕОСОБЫХ УЧАСТКОВ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ПОНТРЯГИНА

Получены необходимые условия оптимального сопряжения в особых точках для задачи с критерием качества типа максимума, а также для задачи с гладким критерием качества и системы с запаздыванием по состоянию.

I Условие оптимальности для задачи с негладкой функцией качества и его следствия. 1. Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = f(x,\ u(t),\ t),\ x(t_0) = x_0,\ u(t) \in U,\ t \in [t_0,\ t_1], \tag{1}$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \varphi_i(x(t_1)) \to \min, \tag{2}$$

где x — n-вектор; $u(t)$ — кусочно-непрерывная r-вектор-функция управления; x_0 — заданное начальное состояние системы; $f(x,\ u,\ t)$, $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1,\ m}$,— непрерывные функции вместе со своими производными до второго порядка включительно; t_0, t_1 — заданные начальный и конечный моменты времени; U — некоторое множество пространства R^r.

Необходимое условие оптимальности первого порядка для этой задачи получено в [1].

Определение 1. Для управления $u(t)$ точку $t = \Theta \in [t_0,\ t_1)$ назовем особой, если существует множество $\omega(\Theta) \subset U$ такое, что $\omega(\Theta) \setminus u(\Theta) \neq \varnothing$ и для хотя бы одного $i \in I = \{i : 1 \leqslant i \leqslant m,\ \ \varphi_i(x(t_1)) = \varphi(x(t_1))\}$ $\forall v \in \omega(\Theta)$ выполняется равенство

$$\Delta_v H(x(\Theta),\ \psi^i(\Theta),\ u(\Theta),\ \Theta) = 0, \tag{3}$$

где $H(x,\ \psi,\ u,\ t) = \psi' f(x,\ u,\ t)$, $\Delta_v H(x,\ \psi^i,\ u,\ t) = H(x,\ \psi^i,\ v,\ t) - H(x,\ \psi^i,\ u,\ t)$, $\psi^i(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t),\ \psi,\ u(t),\ t)}{\partial x},\quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi_i(x(t_1))}{\partial x},$$

где $x(t)$ — решение уравнения (1), соответствующее управлению $u(t)$.

Совокупность всех индексов $i \in I$, для которых выполняется (3), обозначим через I_1. Пусть $u^0(t)$ — оптимальное управление, $x^0(t)$, $\psi^{0i}(t)$ — соответствующие ему траектории основной и сопряженной систем, $\Psi^{0i}(t)$ — решение следующей системы:

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial f'(x^0(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial x}\Psi - \Psi\frac{\partial f(x^0(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(x^0(t),\ \psi^{0i}(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial x^2},\quad \Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x^2}.$$

С помощью формулы приращения второго порядка [2] можно доказать следующий результат.

Теорема 1. Каждое оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию сопряжения в особой точке $\Theta \in [t_0,\ t_1)$:

$$\min_{\substack{t\in I,\\ j\in I\setminus I_1}}\Bigg(\Bigg[\frac{d}{dt}\Delta_v H(x^0(t),\ \psi^{0i}(t),\ u^0(t),\ t)+$$

$$+\Delta_v f'(x^0(t),\ u^0(t),\ t)\,\Psi^{0i}(t)\times\Delta_v f(x^0(t),\ u^0(t),\ t)+ \tag{4}$$

$$+\frac{\partial\Delta_v H(x^0(t),\ \psi^{0i}(t),\ u^0(t),\ t)}{\partial x}\Delta_v f(x^0(t),\ u^0(t),\ t)\Bigg]_{t=\Theta+0},$$

$$\Delta_v H(x^0(t),\ \psi^{0j},\ u^0_i(t),\ t)\,|_{t=\Theta-0})\leqslant 0 \text{ для } \forall v\in\omega(\Theta).$$

2. Пусть требуется найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за минимальное время t_1-t_0 траекторию системы (1) из точки x_0 на множество $Q=\{x\in R^n:\varphi_i(x)\leqslant 0,\ i=\overline{1,m}\}$.

Сведя эту задачу к задаче п. 1 с ограничением снизу на продолжительность процесса, убеждаемся, что справедливо

Следствие 1. Для оптимального управления в задаче быстродействия выполняется неравенство

$$\max_{i\in I} H(x^0(t_1^0),\ \psi^{0i}(t_1^0),\ u^0(t_1^0-0),\ t_1^0)\geqslant 0,$$

и, если $\Theta\in[t_0,\ t_1^0)$ является особой точкой для оптимального управления $u^0(t)$, справедливо (4), где t_1^0 — оптимальный конечный момент времени.

3. Пусть требуется минимизировать функционал $J(u)=\varphi_0(x(t_1))$ при ограничениях $\varphi_i(x(t_1))\leqslant 0,\ i=\overline{2,m}$, где $x(t)$ — траектория системы (1).

Очевидно, что если $u^0(t)$ — оптимальное управление этой задачи, $x(t)$ — соответствующая ему траектория, то $u^0(t)$ является оптимальным и для задачи типа (1)—(2) где $\varphi_1(x(t_1))=\varphi_0(x(t_1))-\varphi_0(x^0(t_1))$. Поэтому для задачи с подвижным правым концом также справедливо условие (4).

II. Условие оптимальности для задачи с запаздыванием по состоянию. Рассмотрим задачу

$$\dot x(t)=f(x(t),\,y(t),\,u(t),\,t)\quad y(t):=x(t-h),$$
$$x(t)=\varphi_0(t),\quad t\in\varepsilon_{t_0},\quad x(t_0)=x_0,$$
$$u(t)\in U,\ t\in[t_0,\,t_1],\ J(u)=\varphi(x(t_1))\to\min,$$

где x — n — вектор; $u(t)$ — кусочно-непрерывная r-векторная функция управления; $t_0,\ t_1$ — заданные моменты времени; U — некоторое множество пространства R^r; $f(x,\ y,\ u,\ t)$, $\varphi(x)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными до второго порядка включительно; $\varphi_0(t)$ — известная функция, заданная в такой начальной области ε_{t_0}, чтобы при каждом допустимом управлении $u(t)$, $t\in[t_0,\,t_1]$, траектория системы была определена единственным образом.

Приращение траектории на игольчатой вариации равно (см. [3])

$$\Delta x(t_1)=F(t_1,\,\Theta+\varepsilon)\,\Delta x(\Theta+\varepsilon)+\int_{\Theta}^{\Theta+\varepsilon}F(t_1,\ \tau+h)\frac{\partial f(\tau+h)}{\partial y}\Delta x(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{\Theta+\varepsilon}^{t_1}F(t_1,\ \tau)\Bigg[\Delta x'\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta y+\Delta x'\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x+\Delta y'\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y+$$

$$+\Delta y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Delta x+\Delta_u f+\frac{\Delta_v\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\Delta_v\partial f}{\partial y}\Delta y\Bigg]d\tau+o(\varepsilon^2), \tag{5}$$

где $F(t,\ \tau)$ — $n\times n$ — матричная функция, удовлетворяющая условиям $\frac{\partial F(t,\ \tau)}{\partial\tau}=-F(t,\ \tau)\,f_x(\tau)-F(t,\ \tau+h)\,f_y(\tau+h)$, $F(t,\ \tau)=0,\ t<\tau,\ F(t,\ t)=E$ — единичная матрица.

Из (5) следует формула

$$\Delta J(u)=-\int_{\Theta}^{\Theta+\varepsilon}\Delta_v H(t)\,dt-\frac{\varepsilon^2}{2}[\Delta_v H'_x(s)\,\Delta_v f(s)+$$

$$+\Delta_v f'(s)\,\Psi(s)\,\Delta_v f(s)]_{s=\Theta}+o(\varepsilon^2), \tag{6}$$

где $H(t)\equiv\psi'(t)\,f(x(t),\ y(t),\ u(t),\ t)$,

$$\overline{\Psi}(t)=\int_{t}^{t_1}[F'(\tau,\ t)\,H_{xx}(\tau)\,F(\tau,\ t)+$$

$$+F'(\tau,t)\,H_{xy}(\tau)\,F(\tau-h,t)+F'(\tau-h,t)\,H_{yy}(\tau)\,F(\tau-h,t)+F'(\tau-h,$$

$$t)\,H_{yx}(\tau)\,F(\tau,\ t)]\,d\tau-F'(t_1,\ t)\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x^2}F(t_1,\ t).$$

Из (6) получаем принцип максимума для оптимального управления $u=u^0(t)$:

$$H(x^0(t),\ y^0(t),\ \psi^0(t),\ u^0(t),\ t)=\max_{u\in U}H(x^0(t),\ y^0(t),\ \psi^0(t),\ u,\ t)$$

$$\text{для } \forall t\in[t_0,\ t_1).$$

Определение 2. Точку $t=\Theta\in(t_0,\ t_1)$ назовем особой, если существует множество $\omega(\Theta)\subset U$ такое, что $\omega(\Theta)\setminus u^0(\Theta)\neq\varnothing$, и для $\forall u\in\omega(\Theta)$ выполняется равенство $\Delta_v H(x^0,\ y^0,\ \psi^0,\ u^0,\ t)|_{t=\Theta}=0$. Справедлива

Теорема 2. Оптимальное управление $u^0(t)$ и соответствующие ему $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $\Psi^0(t)$ удовлетворяют условию сопряжения

$$\left[\frac{d}{dt}\Delta_v H(t)+\Delta_v H'_x(t)\,\Delta_v f(t)+\Delta_v f'(t)\,\Psi^0(t)\,\Delta_v f(t)\right]_{\Theta+0}\leqslant 0.$$

III Условие оптимального сопряжения высокого порядка. Рассмотрим систему (1) с критерием качества $J(u)=\varphi(x(t_1))$. В [2] получено условие оптимального сопряжения в особой точке $t=\Theta$.

Определение 3. Для управления $u(t)$ точку $t=\Theta\in[t_0,\ t_1]$ назовем особой точкой второго порядка, если она особа с соответствующим множеством $\omega(\Theta)$ и $\exists\omega_1(\Theta)\subset\omega(\Theta)$ такое, что $\omega_1(\Theta)\setminus u(\Theta)\neq 0$, и для $\forall v\in\omega_1(\Theta)$ выполняется равенство

$$\left[\frac{d}{dt}\Delta_v H+\Delta_v f'\overline{\Psi}\Delta_v f+\frac{\partial\Delta_v H'}{\partial x}\Delta_v f\right]_{\Theta+0}=0.$$

Разлагая $\Delta J(u)$ до ε^3, можно убедиться, что справедлива

Теорема 3. Необходимым условием оптимального сопряжения в особой точке второго порядка является неравенство

$$\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Delta_v H+\frac{d}{dt}\left(\Delta_v f'\,\overline{\Psi}\Delta_v f+\frac{\partial\Delta_v H'}{\partial x}\Delta_v f+\Delta_v Q_{j_1j_2}\Delta_v f_{j_1}\Delta_v f_{j_2}\right]_{\Theta+0}\leqslant 0,\quad(7)$$

где $Q_{j_1j_2}(x,\ \psi,\ u,\ t)=\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{3!}\psi_{j_{l-1}jj_l}f_j(x,\ u,\ t)+$

$$+\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=l}^{2}\frac{1}{k!\,(3-k)!}\psi_{j_{l-1}jj_l}\frac{\partial^{3-k}f_j(x,\ u,\ t)}{\partial x_{j_k}\partial x_{j_2}},$$

$$\dot{\psi}_{j_1j_2j_3}=-\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=l}^{3}\frac{3!}{k!\,(4-k)!}\psi_{j_{l-1}jj_l}\frac{\partial^{4-k}f_j(x,\ u,\ t)}{\partial x_{j_k}\cdots\partial x_{j_3}},$$

$$\psi_{j_1j_2j_3}(t_1)=-\frac{\partial^2\varphi(x(t_1))}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\partial x_{j_3}}.$$

Этот результат можно перенести на задачи, рассмотренные в I, II.

IV Примеры. Пример 1. Требуется привести траекторию системы

$$\dot{x}_1=u,\quad \dot{x}_2=-x_1^2$$

из точки (0, 0) на множество $\left\{(x_1,\ x_2):x_1\leqslant 0,\ x_2\leqslant-\frac{1}{27}\right\}$ за минимальное время t_1 (начальный момент времени считаем нулевым), где $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, $|u(t)|\leqslant 1$.

Управление $u(t) = \operatorname{sign}\cos\frac{3\pi t}{2}$ не удовлетворяет условию (4) при $\Theta = \frac{1}{3}$. Следовательно, оно не оптимально.

Пример 2. $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1 x_3$, $\dot{x}_3 = x_1 - 6t + 2$,

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -\frac{157}{648}, \quad x_3(0) = -\frac{7}{18},$$
$$U = \{u : |u| \leqslant 1\},$$
$$\varphi(x(1)) = \frac{8}{27} x_1(1) - \frac{81}{32} x_2^2(1) \to \min.$$

Управление $u(t) = \operatorname{sign}\cos\frac{3\pi t}{2}$ не удовлетворяет (7) при $\Theta = \frac{1}{3}$. Следовательно, оно неоптимально, хотя удовлетворяет принципу максимума.

В заключение автор выражает большую и искреннюю благодарность профессору Р. Габасову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич В. В.— В сб.: Дифференц. и интегр. уравнения.— Иркутск, 1973.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М., 1973.
3. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.— М., 1967.

Поступила в редакцию
01.10.77.

Кафедра методов оптимального управления

УДК 681.3.06

И. И. МЛЫНЧИК, ТО ТУАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОБРАБОТКИ ТАБЛИЦ ИНФОРМАЦИИ

Довольно часто в программах необходимо организовать таблицы информации таким образом, чтобы данные можно было легко и быстро помещать в таблицу и выбирать из нее. Примером такой таблицы может быть таблица символов (меток), обрабатываемая Ассемблером. Быстрым алгоритмом поиска является алгоритм двоичного поиска, но он может работать только с таблицами, которые упорядочены и упакованы. Поэтому такие процедуры могут использоваться только совместно с алгоритмом сортировки, который упорядочивает и упаковывает данные. Поиск методом прямого доступа (см. [1—5]) позволяет добиваться хорошей скорости при использовании неупакованной и неупорядоченной таблицы, но она сильно зависит от коэффициента загрузки таблицы $\rho = \frac{n}{N}$, где n — количество записей, находящихся в таблице; N — максимальная длина таблицы.

Действительно, Р. Моррис в работе [5] дал следующую оценку среднего числа проверок, необходимых для включения новой метки в таблицу (метка включается в таблицу меток, если она однозначна, т. е. еще не встречалась в таблице):

$$T_N(\rho) = 1 + \frac{n}{N} + \frac{n(n-1)}{N(N-1)} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{N(N-1)\cdots(N-n+1)},$$

где j-ый член суммы есть вероятность того, что нужно произвести j или более проверок на отсутствие.

Индукцией по n нетрудно доказать, что

$$T_N(\rho) = 1 + \frac{n}{N-n+1} = \frac{N+1}{N-n+1} = \frac{1}{1 - \frac{n}{N+1}},$$