ЛИТЕРАТУРА

1. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.
2. Коляда А. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 3.
3. Коляда А. А., Кравцов В. К. Обнаружение и исправление ошибок при выполнении операций в ОСОК с помощью R-кодов. ВИНИТИ, № 2240-77. Деп. от 06.06.77.
4. Коляда А. А., Кравцов В. К. Ранг числа и умножение дробей в нормированных обобщенных СОК. ВИНИТИ № 4111-76. Деп. от 29.11.76.

Поступила в редакцию
15.06.78

Кафедра электронных математических машин

УДК 539.107.5

А. С. ГАХОВИЧ, А. А. КОЛЯДА, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА, ГЕНЕТИЧЕСКИ СВЯЗАННОГО С НЕКОТОРЫМ ПОТОКОМ СИГНАЛОВ, С ПОМОЩЬЮ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ МВА

Данная работа посвящена определению интенсивности случайного потока сигналов, порожденного потоком $A=\{A_1, A_2, \ldots\}$, являющимся стохастическим нестационарным. В [1] эта задача решена для случая, когда для накопления статистических данных используются многоканальные временные анализаторы (МВА), работающие в одностоповом режиме. Применение таких МВА оправдано, когда порождаемый поток малоинтенсивен. Если поток имеет высокую интенсивность, следует использовать анализаторы, работающие в многостоповом режиме. При k-стоповом режиме МВА за цикл измерения T может зарегистрировать первые k сигналов, начиная с момента привязки τ_0.

Введем обозначения: $\Omega_0=(a, b)$ — область задания A; $\Omega=(\tau_0, \tau_0+t)$, $\tau_0 \in \Omega_0$, $t \in (0, c)$, c — длительность вторичного потока B_i $(i=1, 2, \ldots)$; T — максимальная длина интервалов, измеряемых многоканальным временным анализатором; $A'=A+П$, $B'=B+П$, B — поток, получающийся в результате наложения B_i $(i=1, 2, \ldots)$, $П$ — помеховый поток; $N(t)$ — содержимое канала МВА с номером $\left[\frac{t}{\Delta}\right]$, Δt — ширина канала, а квадратные скобки употребляются для обозначения целой части числа; N — число проведенных циклов измерений МВА; $P_e^B(\Omega)$, $P_e^{B'}(\Omega)$, $P_e^{B_i}(\Omega)$, $P_e^П(\Omega)$ — вероятности попадания e импульсов в область Ω соответственно потоков B, B', B_i и помехового; $f_1^A(\tau)$, $f_1^{A'}(\tau)$, $f_1^B(\tau)$, $f_1^{B'}(\tau)$; $\bar{f}_1^{B_i}(\tau)$, $f_1^П(\tau)$ — интенсивности потоков.

В обозначениях характеристик B_0 верхний индекс будем опускать.

Так же как в [1], предположим, что все вторичные потоки являются однотипными и не зависят друг от друга. Интенсивность первичного потока, а также типы первичного и вторичного потоков известны. Для определенности поток A считается пуассоновским, потоки B_i — отрицательно-биномиальными, а поток $П$ — стационарным пуассоновским.

Пусть произведено N циклов измерений. Тогда при работе в k-стоповом режиме величина $N(t)/N$ $(0<t\leqslant T)$, очевидно, является частотой попадания в интервал $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ какого-то из первых k импульсов потока B', находящегося правее τ_0, независимо от величины τ_0. При достаточно большом N эта частота приближается к безусловной вероятности $W_k(t)\Delta t$ попадания в $(\tau_0+t, \tau_0+t+\Delta t)$ указанного импульса, независимо от момента привязки на входе 1.

Идея, положенная в основу используемого в данной работе решения рассматриваемой задачи, состоит в приравнивании вероятности $W_k(t)\Delta t$, вычисляемой по статистическим данным анализатора, с ее значением, вычисленным аналитически.

Для определения вероятности $W_k(t)\Delta t$ рассмотрим условную вероятность $W_k(t/\tau_0)\Delta t$ того, что в интервал $(\tau_0+t,\ \tau_0+t+\Delta t)$ попал любой из первых k сигналов потока B', при условии, что на входе 1 привязка осуществлена к сигналу, появившемуся в момент τ_0. Очевидно, эта вероятность равна сумме условных вероятностей $W^{(j)}(t/\tau_0)\Delta t$ $(j=1,\ 2, \ldots, k)$ попадания в $(\tau_0+t,\ \tau_0+t+\Delta t)$ j-го импульса потока B', т. е.

$$W_k(t/\tau_0)\,\Delta t=\sum_{j=1}^{k} W^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t. \tag{1}$$

Для перехода от условной вероятности $W_k(t/\tau_0)\Delta t$ к безусловной вероятности $W_k(t)\Delta t$ воспользуемся формулой Байеса, согласно которой

$$W_k(t/\tau_0)\,f_1^{A'}(\tau_0)=W_k(t,\ \tau_0)=W_k(t)\,f_1^{A'}(\tau_0/t), \tag{2}$$

$W_k(t,\ \tau_0)\,\Delta t\Delta\tau_0$ — совместная вероятность попадания в интервал $(\tau_0+t,$ $\tau_0+t+\Delta t)$ какого-то из первых k импульсов после τ_0 потока B' и в интервал $(\tau_0,\ \tau_0+\Delta\tau_0)$ импульса потока A'; $f_1^{A'}(\tau_0/t)\,\Delta\tau_0$ — условная вероятность попадания в окрестность точки τ_0 сигнала потока A' при условии, что в окрестность точки τ_0+t попал какой-то из первых k после τ_0 импульсов потока B'.

Умножая соотношение (1) на $f_1^{A'}(\tau_0)$ и применяя (2), получим

$$W_k(t)\,f_1^{A'}(\tau_0/t)=f_1^{A'}(\tau_0)\sum_{j=1}^{k}W^{(j)}(t/\tau_0).$$

Интегрируя последнее соотношение по переменной τ_0 в области Ω_0, будем иметь:

$$W_k(t)\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0/t)\,d\tau_0=\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0)\sum_{j=1}^{k}W^{(j)}(t/\tau_0)\,d\tau_0. \tag{3}$$

Так же, как и $W_k(t)\,\Delta t$, величину $\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0/t)\,d\tau_0$ можно определить с помощью данных, получаемых анализатором. Как известно [2], $\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0/t)\,d\tau_0$ можно рассматривать как среднее число сигналов потока A', выпавших в таких точках τ_0, для которых какой-то из первых k после τ_0 сигналов потока B' попал в интервал $(\tau_0+t,\ \tau_0+t+\Delta t)$. При достаточно малой дисперсии указанного числа выпаданий приближенно можно считать:

$$\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0/t)\,d\tau_0=N(t),$$

поэтому первую часть (3) можно переписать в виде:

$$W_k(t)\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0/t)\,d\tau_0=\frac{W_k(t)\,\Delta t}{\Delta t}\,N(t)=\frac{N^2(t)}{N\Delta t},$$

где Δt — ширина канала МВА.

Итак, окончательно имеем:

$$\frac{N^2(t)}{N\Delta t}=\int\limits_{\Omega_0}f_1^{A'}(\tau_0)\left(\sum_{j=1}^{k}W^{(j)}(t/\tau_0)\right)d\tau_0. \tag{4}$$

Для вычисления вероятностей $W^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t$ воспользуемся следующей формулой:

$$P(X)=\sum_{i=1}^{n}P(Y_i)\,P_i(X/Y_i), \tag{5}$$

где $Y_1, \ldots, Y_n$ образуют полную группу событий, а событие X происходит с одним из n событий этой группы. Пусть Y_1 представляет собой событие, заключающееся в регистрации на входе 1 МВА в момент τ_0 помехового импульса потока A', а Y_2 — событие, состоящее в регистрации на этом же входе при тех же условиях сигнального импульса. Очевидно, что эти два события образуют полную группу, т. е. для нашего случая в формуле (5) $n=2$.

Вводя событие X_j, заключающееся в выпадении в окрестности точки (τ_0+t) j-го после момента τ_0 сигнала потока B' при условии, что в окрестности точки τ_0 на входе 1 был зарегистрирован сигнал потока A', и применяя формулу (5), получаем

$$W^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t = P(Y_1)\,W_1^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t + P(Y_2)\,W_2^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t, \qquad (6)$$

где $W_1^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t$ и $W_2^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t$ — условные вероятности попадания в интервал $(\tau_0+t,\ \tau_0+t+\Delta t)$ j-го после момента τ_0 импульса потока B' при условии, что на входе 1 в момент τ_0 был зарегистрирован соответственно помеховый или сигнальный импульсы потока A'. Очевидно,

$$P(Y_1) = \frac{f_1^{П}}{f_1^{A'}(\tau_0)}; \quad P(Y_2) = \frac{f_1^{A}(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)}.$$

Учитывая, что сигналы потока B' выпадают независимо друг от друга, вероятность $W_1^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t$ равна произведению вероятности выпадения в области $\Omega\,(j-1)$-го сигнала потока B' и вероятности попадания в интервал $(\tau_0+t,\ \tau_0+t+\Delta t)$ j-го сигнала этого потока:

$$W_1^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t = P_{j-1}^{B'}(\Omega)\,f_1^{B'}(\tau_0+t)\,\Delta t$$

и

$$W_2^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t = \sum_{i=0}^{j-1} P_i(\Omega)\,P_{j-i-1}^{B'}(\Omega)\,(\bar{f}_1^{B_0}(\tau_0+t) + f_1^{B'}(\tau_0+t))\,\Delta t.$$

Так как $\bar{f}_1^{B_0}(t+\tau_0) = \bar{f}_1^{B_0}(t+\tau_0-\tau_0) = \bar{f}_1(t)$, то, подставляя выражения для $P(Y_1)$, $P(Y_2)$, $W_1^{(j)}(t/\tau_0)$ и $W_2^{(j)}(t/\tau_0)$ в (6), получаем

$$W^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t = \frac{f_1^{П}}{f_1^{A'}(\tau_0)}\,P_{j-1}^{B'}(\Omega)\,f_1^{B'}(\tau_0+t)\,\Delta t +$$

$$+ \frac{f_1^{A}(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)}\left(\sum_{i=0}^{j-1} P_i(\Omega)\,P_{j-i-1}^{B'}(\Omega)\,(\bar{f}_1(t) + f_1^{B'}(t+t_0))\,\Delta t\right).$$

Очевидно,

$$P_{j-1}^{B'}(\Omega) = \sum_{i=0}^{j-1} P_i^{П}(\Omega)\,P_{j-i-1}^{B}(\Omega),$$

поэтому выражение для $W^{(j)}(t/\tau_0)\,\Delta t$ можно переписать:

$$W^{(j)}(t/\tau_0) = \frac{f_1^{П}}{f_1^{A'}(\tau_0)}\,f_1^{B'}(\tau_0+t)\sum_{m+n=j-1} P_m^{П}(\Omega)\,P_n^{B}(\Omega) +$$

$$+ \frac{f_1^{A}(\tau_0)}{f_1^{A'}(\tau_0)}\,(\bar{f}_1(t) + f_1^{B'}(t+\tau_0))\sum_{i+m+n=j-1} P_i(\Omega)\,P_m^{П}(\Omega)\,P_n^{B}(\Omega).$$

Подставляя последнее соотношение в (4), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\Omega_0}[f_1^{П} f_1^{B'}(\tau_0+t)\sum_{m+n=j-1} P_m^{n}(\Omega)\,P_n^{B}(\Omega) + f_1^{A}(\tau_0)\,(\bar{f}_1(t) +$$

$$+ f_1^{B'}(\tau_0+t))\sum_{i+m+n=j-1} P_i(\Omega)\,P_m^{П}(\Omega)\,P_n^{B}(\Omega)]\,d\tau_0 = \frac{N^2(t)}{N\Delta t}. \qquad (7)$$

Соотношение (7) в дальнейшем используется в качестве основного уравнения. Фигурирующие в (7) характеристики $P_n^{П}(\Omega)$ и $P_n(\Omega)$ определяются соответственно по следующим известным формулам [2]:

$$P_n^{П}(\Omega) = \frac{(f_1^{П}\cdot t)^n}{n!} e^{-f_1^{П} t}, \tag{8}$$

$$P_n(\Omega) = \frac{\left(\int\limits_0^t \bar{f}_1(\tau)\, d\tau\right)^n}{\left(1 + \int\limits_0^t \bar{f}_1(\tau)\, d\tau\right)^{n+1}}, \tag{9}$$

а характеристики $P_n^B(\Omega)$ могут быть найдены с помощью производящей функции $V_\Omega^B(z)$ числа точек суммарного потока B. Подставляя в производящий функционал поток B, имеющий, согласно [1], вид

$$L_\Omega^B[u] = \exp \int\limits_{\Omega_0} f_1^A(x) \left[\frac{1}{1 - \int\limits_\Omega u(\tau) \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau} - 1\right] dx, \; u = z - 1,$$

будем иметь

$$V_\Omega^B(z) = \exp\left\{\int\limits_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + \int\limits_\Omega \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau - z\int\limits_\Omega \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau} - f_1^A(x)\right) dx\right\}.$$

Тогда

$$P_n^B(\Omega) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} V_\Omega^B(z)\big|_{z=0}. \tag{10}$$

Применяя (10), получаем

$$P_0^B(\Omega) = \exp\left\{\int\limits_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + \int\limits_\Omega \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau} - f_1^A(x)\right) dx\right\};$$

$$P_n^B(\Omega) = P_0^B(\Omega) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_j = n \\ k_l > 0, \\ l = 1, 2, \ldots, j}} \prod_{e=1}^{j} \int\limits_a^b \frac{f_1^A(x) \left(\int\limits_\Omega \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau\right)^{k_e}}{\left(1 + \int\limits_\Omega \bar{f}_1(\tau - x)\, d\tau\right)^{k_e+1}} dx. \tag{11}$$

Используя тейлоровское приближение функции

$$\bar{f}_1(t + \tau_0 - x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\bar{f}_1^{(l)}(t)}{l!} (\tau_0 - x)^l$$

и вводя обозначение $Y = \int\limits_0^t \bar{f}_1(\tau)\, d\tau$, последнее выражение представим в виде

$$P_n^B(\Omega) = \exp\left\{\int\limits_a^b \left(\frac{f_1^A(x)}{1 + Y + \sum\limits_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0))} - f_1^A(x)\right) dx\right\} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_j = n \\ k_l > 0, \\ l = 1, \ldots, j}} \prod_{e=1}^{j} \int\limits_a^b \frac{f_1^A(x) \left[Y + \sum\limits_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0))\right]^{k_e}}{\left[1 + Y + \sum\limits_{l=1}^{n-1} \frac{(\tau_0 - x)^l}{l!} (Y^{(l)}(t) - Y^{(l)}(0))\right]^{k_e+1}}. \tag{12}$$

Интенсивность потока B определяется путем функционального дифференцирования производящего функционала в точке $u=0$:

$$f_1^B(\tau) = \int_a^\tau f_1^A(x)\,\bar{f}_1(\tau - x)\,dx.$$

Используя тейлоровское приближение функции $\bar{f}_1(t+\tau_0-x)$, приведенное выше, получаем

$$f_1^{B'}(\tau) = f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^i dx. \qquad (13)$$

Подставляя в уравнение (7) выражение (13) для $f_1^{B'}(\tau)$ и выражения для вероятностей числа выпадений, определяемых формулами (8), (9) и (12), после обозначений

$$\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}) = f_1^\Pi(\tau_0) \sum_{m+n+j-1} P_m^n(\Omega)\,P_n^B(\Omega),$$

$$\Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}) = f_1^A(\tau_0) \sum_{i+m+n=j-1} P_i(\Omega)\,P_m^\Pi(\Omega)\,P_n^B(\Omega)$$

будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_0} [f_1^{B'}(\tau_0+t)\,\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}) + (\bar{f}_1(t) + f_1^{B'}(\tau_0+t))\,\Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})]\,d\tau_0 = \frac{N^2(t)}{N\Delta t},$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{k} \left\{ \frac{Y^{(n)}}{(n-1)!} \int_{\Omega_0} \left[(\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)}) + \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)})) \times \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^{n-1} dx \right] d\tau_0 + \int_{\Omega_0} \left[\left(f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_n^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^i\,dx \cdot \Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)}) + \left(Y' + f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^i\,dx \right) \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)}) \right] d\tau_0 \right\} = \frac{N^2(t)}{N\Delta t}.$$

Находя $Y^{(n)}$, получаем

$$Y^{(n)} = (n-1)!\,\frac{\dfrac{N^2(t)}{N\Delta t} - \sum_{j=1}^{k} \left\{ \int_{\Omega_0} \left[\left(f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)(\tau_0 - x)^i dx \right) \Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{n-1}) - \left(Y' + f_1^\Pi + \sum_{i=0}^{n-2} \dfrac{Y^{(i+1)}}{i!} \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^i dx \right) \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)}) \right] d\tau_0 \right\}}{\sum_{j=1}^{k} \left\{ \int_{\Omega_0} \left[(\Phi_{1j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)}) + \Phi_{2j}(\tau_0, t, Y, \ldots, Y^{(n-1)})) \int_a^{\tau_0+t} f_1^A(x)\,(\tau_0 - x)^{n-1} dx \right] d\tau_0 \right\}}.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение при начальных условиях $Y(0)=0$; $Y'(0)=\bar{f}_1(0)$, ... , $Y^{(n-1)}(0)=\bar{f}_1^{(n-2)}(0)$ с помощью численных методов, можно найти искомую интенсивность вторичного потока.

В случае постоянной интенсивности первичного потока реализация уравнения упрощается. Наконец, отметим, что задача может быть решена и для других комбинаций первичного и вторичного потоков аналогично рассмотренному случаю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С., Коляда А. А., Чернявский А. Ф.— Техническая кибернетика, 1980, № 1.
2. Большаков И. А. Статистические проблемы выделения потока сигналов из шума.— М., 1969.

Поступила в редакцию
24.06.78

Кафедра электронных математических машин

УДК 535.132

А. И. КИРИЛЕНКО, А. П. ХАПАЛЮК

ОСОБЕННОСТИ НЕКОМПЛАНАРНОГО ОТРАЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН

Некомпланарное отражение неоднородных плоских волн характеризуется рядом специфических особенностей, которые необходимо учитывать при прохождении света через сложные оптические системы. В работах [1, 2] изучались особенности законов преобразования волновых параметров (обобщенные законы Снеллиуса) при таком отражении; в работе [3] предложен матричный метод определения амплитудных параметров отраженной и преломленной волн (обобщенные формулы Френеля). В данной работе изучаются особенности интерпретации амплитудных и энергетических характеристик при некомпланарном отражении и преломлении волн.

Будем пользоваться декартовой системой координат, у которой плоскость xy является границей раздела двух поглощающих сред с показателями преломления $N=n-i\varkappa$ и $N_1=n_1-i\varkappa_1$, а ось z направлена по нормали $\bar{q}$ к этой границе. Вектор рефракции падающей волны записывается в виде

$$\bar{m}=N\bar{e}=(n-i\varkappa)(\bar{e}_1+i\bar{e}_2)=\bar{h}+i\bar{\tau}, \tag{1}$$

где $\bar{e}(\bar{e}^2=1)$ — комплексный волновой вектор; $\bar{e}_1=\operatorname{ch}\vartheta(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ — вектор фазовой, а $\bar{e}_2=\operatorname{sh}\vartheta(\cos\alpha\cos\eta, \sin\eta, -\sin\alpha\cos\eta)$ — амплитудной нормали; $\bar{h}$ и $\bar{\tau}$ — эффективные векторы фазовой и амплитудной нормали соответственно; ϑ — параметр неоднородности волны; α — угол (истинный) падения (векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{q}$ определяют истинную, а векторы $\bar{h}$ и $\bar{q}$ — эффективную плоскость падения); η — параметр некомпланарности, определяющий ориентацию амплитудной нормали относительно истинной плоскости падения. Обычное, компланарное, отражение получается в частном случае при $\eta=0, \pi$.

Общее решение уравнений Максвелла для неоднородных плоских волн с заданным вектором рефракции (1) возьмем в виде

$$\bar{E}=A_s[\bar{u}\bar{e}]-A_p[\bar{e}[\bar{u}\bar{e}]],\quad \bar{H}=A_sN[\bar{e}[\bar{u}\bar{e}]]+A_pN[\bar{u}\bar{e}], \tag{2}$$

где $\bar{u}=\{0, 0, 1\}$, A_s и A_p — амплитудные параметры s-и p-волн соответственно; зависящий от координат и времени множитель $\exp[i\omega t-ik(\bar{m}\bar{r})]$ опущен. Выражение для отраженной волны предполагается в том же виде (2), но с другими амплитудными параметрами A_s^r и A_p^r и с противо-