

и 1-го, $(n+1)$ -го, $(n+2)$ -го столбцов) записывается в ОЗУ или выводится из процессора для дальнейшей обработки. При этом первые строка и столбец этой матрицы заменяются $(m+1)$ -й строкой и $(n+1)$ -м столбцом расширенных фрагментов $\Phi_{i-1, j}$ и $\Phi_{i, j-1}$ из ВЗУ и ВР соответственно.

Легко показать, что число тактов, необходимое для обработки одного фрагмента в процессоре, равно $2(m+2) + \max\{m+2, n+2\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis L. S.—Computer Graphics and Image Processing, 1975, v. 4, № 3, p. 248.
2. Morrin T. H.—Computer Graphics and Image Processing, 1976, v. 5, № 2, p. 172.
3. Щиглик В. Д., Налбандян Ж. С.—Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 12, № 2, с. 100.
4. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. Пер. с англ.—М., 1977, с. 20.
5. Епифанцев Б. Н., Забишта Ю. П.—Изв. Томского политехн. ин-та, 1975, т. 248, с. 35.

Поступила в редакцию
27.12.77.

Кафедра электронных
математических машин

УДК 861.142.01

А. А. КОЛЯДА

АЛГОРИТМЫ АРИФМЕТИКИ ОБОБЩЕННЫХ СОК

Рассмотрим нормированные обобщенные системы остаточных классов (ОСОК) первого рода [1], в которых все арифметические операции сводятся к выполнению некоторых действий над целыми числами из множества

$$P(r_{\min}, r_{\max}) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - r_A P; r_A \in [r_{\min}, r_{\max}] \right\}, \quad (1)$$

$$0 \leq \tilde{\alpha}_i < P_i,$$

где Z — множество целых чисел; $P = \prod_{i=1}^n p_i$; $p_1, p_2, \dots, p_n$ — система попарно взаимно простых модулей; $P_i = \frac{P}{p_i}$, $\tilde{\alpha}_i = |\alpha_i| P_i^{-1} |_{p_i}$, $\alpha_i = |A|_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); $[r_{\min}, r_{\max}] \supset [0, r_{\max}^n + 1]$, $r_{\max}^n$ — максимальное значение нормированного ранга чисел из $[0, P)$, определяемое соотношением

$$r_{\max}^n = n - 1 - \left\lfloor \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \right\rfloor \leq n - 1. \quad (2)$$

Согласно (1), максимальным и минимальным числами множества $P(r_{\min}, r_{\max})$ являются соответственно:

$$A_{\max} = \left\lfloor \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\rfloor_P + (r_{\max}^n - r_{\min}) P; A_{\min} = -r_{\max} P. \quad (3)$$

На практике чаще всего оперируют с симметричными множествами. Будем называть $P(r_{\min}, r_{\max})$ «симметричным», если $A_{\max}$ и $A_{\min}$ находятся в одинаково удаленных от 0 интервалах вида $[jP, (j+1)P)$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Согласно (3), это требование приводит к условию $r_{\max} = r_{\max}^n + 1 - r_{\min}$.

Прежде всего остановимся на важном вопросе об оценке интервального индекса (ИИ) результатов арифметических операций. Требующиеся оценки ИИ можно получить непосредственно из формул для них путем исследования на экстремум соответствующих выражений [2, 3]. Однако в некоторых случаях к более простым решениям приводит другой подход,

основанный на применении следующей леммы об экстремальных значениях ИИ.

Лемма 1. Пусть $\hat{C}$ — произвольное ограниченное множество целых чисел, кодируемых в некоторой нормированной ОСОК с основаниями $p_1, p_2, \dots, p_n$ и пусть $(r_c)_{\max} = \max_{c \in \hat{C}} \{r_c\}$, $(r_c)_{\min} = \min_{c \in \hat{C}} \{r_c\}$, $C_{\min}$ и $C_{\max}$ — соответ-

ственно наименьший и наибольший элементы $\hat{C}$; $\hat{A}_i = \bigcup_{j=0}^i \left(\left\{ C \in \left[\left[\frac{C_{\min}}{P} \right] + j \right) P, \left(\left[\frac{C_{\min}}{P} \right] + j + 1 \right) P \right\} \middle| r_{\lfloor C \rfloor_P}^n = r_{\max}^n - (i - j) \right\} \cap \hat{C}$; $\hat{B}_i = \bigcup_{j=0}^i \left(\left\{ C \in \left[\left[\frac{C_{\max}}{P} \right] - j \right) P, \left(\left[\frac{C_{\max}}{P} \right] - j + 1 \right) P \right\} \middle| r_{\lfloor C \rfloor_P}^n = i - j \right\} \cap \hat{C}$; $i = 0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$. Тогда значение $(r_c)_{\max}$ ($(r_c)_{\min}$) принимает интервальный индекс любого из чисел, принадлежащих первому непустому множеству из последовательности $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_{r_{\max}^n}$ ($\hat{B}_0, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_{r_{\max}^n}$), при этом соответствующие значения ИИ определяются соотношением

$$r_c = r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - \left\lfloor \frac{C}{P} \right\rfloor. \quad (4)$$

Доказательство. Для любого целого $C = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n, r_c)$ справедливо следующее соотношение:

$$C = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\gamma}_i - r_c P = \lfloor C \rfloor_P + (r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - r_c) P,$$

откуда $r_c = r_{\lfloor C \rfloor_P}^n - \left\lfloor \frac{C}{P} \right\rfloor$.

Утверждение леммы 1 теперь легко получить из последней формулы.

Перейдем к рассмотрению алгоритмов арифметики нормированных ОСОК.

1. Сложение и вычитание. Сумма или разность двух чисел $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A)$ и $B = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n, r_B)$ из $P(r_{\min}, r_{\max})$ определяется следующим образом:

$$C = A \pm B = (\lfloor \tilde{\alpha}_1 \pm \tilde{\beta}_1 \rfloor_{p_1}, \lfloor \tilde{\alpha}_2 \pm \tilde{\beta}_2 \rfloor_{p_2}, \dots, \lfloor \tilde{\alpha}_n \pm \tilde{\beta}_n \rfloor_{p_n}, r_c), \text{ где} \\ r_c = r_A \pm r_B - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\tilde{\alpha}_i \pm \tilde{\beta}_i}{p_i} \right\rfloor. \quad (5)$$

Из (5) следует, что

$$r_{\max}^{\text{сум}} = (r_c)_{\max} = 2r_{\max}, \quad r_{\min}^{\text{сум}} = (r_c)_{\min} = 2r_{\min} - n,$$

$$r_{\max}^{\text{раз}} = r_{\max} - r_{\min} + n, \quad r_{\min}^{\text{раз}} = r_{\min} - r_{\max},$$

$$Q_{\text{сум}} = Q_{\text{раз}} = r_{\max}^{\text{сум}} - r_{\min}^{\text{сум}} = 2(r_{\max} - r_{\min}) + n.$$

Для алгебраической суммы в случае систем с симметричным $P(r_{\min}, r_{\max})$ имеем:

$$r_{\max}^{\text{ac}} = 2r_{\max} - (r_{\max}^n + 1) + n; \quad r_{\min}^{\text{ac}} = 2(r_{\max}^n + 1) - n - 2r_{\max},$$

$$Q_{\text{ac}} = r_{\max}^{\text{ac}} - r_{\min}^{\text{ac}} = 4r_{\max} - 3(r_{\max}^n + 1) + 2n.$$

2. Умножение целых чисел. Рассмотрим множество $\hat{C} = \{C \in \mathbb{Z} \mid C = AB; A, B \in P(r_{\min}, r_{\max})\}$. Произведение $C = AB = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n, r_c)$, где $\tilde{\gamma}_i = \lfloor P_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i \rfloor_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а r_c — индекс произведения, остаточный код которого может быть определен по формулам:

$$|r_C|_{p_i} = \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\gamma}_j}{p_j} - \left\| \left[\frac{P_i \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_i}{p_i} \right] \right\|_{p_i} - P_i \tilde{\beta}_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\alpha}_j}{p_j} - r_A \right) - \right. \\ \left. - P_i \tilde{\alpha}_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\tilde{\beta}_j}{p_j} - r_B \right) \right|_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$|r_C|_p = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_i}{p_i} - P \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\alpha}_j}{p_j} - r_A \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\tilde{\beta}_j}{p_j} - r_B \right) \right|_p, \quad (7)$$

где $(p, P) = 1$.

Для получения наименьшего и наибольшего значений r_C воспользуемся леммой об экстремальных значениях ИИ. В рассматриваемом случае $C_{\min} = A_{\min} A_{\max}$, $C_{\max} = \max(A_{\min}^2, A_{\max}^2)$ и, согласно (3), интервалы $\left[\left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor P, \left(\left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor + r_{\max}^n + 1 \right) P \right)$ и $\left[\left(\left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor - r_{\max}^n \right) P, \left(\left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor + 1 \right) P \right)$ содержат по одному числу множества $\hat{C}$ каждый: первый — число $C_{\min}$, второй — $C_{\max}$. Поэтому из леммы 1 следует, что именно этим числам соответствуют экстремальные значения ИИ произведения, т. е.

$$r_{\max}^{\text{np}} = r_{\lfloor C_{\min}/P \rfloor}^n - \left\lfloor \frac{C_{\min}}{P} \right\rfloor, \quad (8)$$

$$r_{\min}^{\text{np}} = r_{\lfloor C_{\max}/P \rfloor}^n - \left\lfloor \frac{C_{\max}}{P} \right\rfloor. \quad (9)$$

Согласно (3), (8), (9), для систем с симметричным $P(r_{\min}, r_{\max})$ получим

$$r_{\min}^{\text{np}} = -r_{\max}^2 P, \quad r_{\max}^{\text{np}} = r_{\max} \left(\left\| \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\|_P + (r_{\max} - 1) P \right),$$

$$Q_{\text{np}} = r_{\max}^{\text{np}} - r_{\min}^{\text{np}} = r_{\max} \left(\left\| \sum_{i=1}^n P_i (p_i - 1) \right\|_P + (2r_{\max} - 1) P \right).$$

Последняя формула показывает, что при вычислении ИИ произведения необходимо воспользоваться выражениями (6) и (7).

3. Операция сужения. Эта операция состоит в вычислении обобщенного кода $(\tilde{\alpha}_{1k}, \tilde{\alpha}_{2k}, \dots, \tilde{\alpha}_{nk}, r_A^{(k)})$ числа $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, r_A)$ в системе модулей $p_1, p_2, \dots, p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$). ИИ $r_A^{(k)}$ может быть получен с помощью следующих формул:

$$r_A^{(k)} = r_A \frac{P}{P^{(k)}} - \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{p_i} \frac{P \tilde{\alpha}_i}{P^{(k)}} \right] - \sum_{j=k+1}^n \frac{P_j}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_j, \quad (10)$$

$$r_A^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{ik}}{p_i} - \frac{A}{P^{(k)}}, \quad (11)$$

где $P^{(k)} = \prod_{i=1}^k p_i$; $\tilde{\alpha}_{ik} = |\alpha_i| P_{ik}^{-1} |p_i|_{p_i} P_{ik} = \frac{P^{(k)}}{p_i}$, ($i = 1, 2, \dots, k$).

Экстремальные значения индекса $r_A^{(k)}$, а также диапазон СОК, используемый для вычисления ИИ, определяются непосредственно из (10).

$$\left(r_{\min}^{\text{суж}} \right)_k = \left(r_{\min} - n + \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{p_j} \right) \frac{P}{P^{(k)}} + k + \sum_{i=1}^k \left[\frac{P}{p_i P^{(k)}} \right], \quad (12)$$

$$(r_{\max}^{\text{суж}})_k = r_{\max} \frac{P}{P^{(k)}}, \quad (13)$$

$$Q_k^{\text{суж}} = (r_{\max}^{\text{суж}})_k - (r_{\min}^{\text{суж}})_k = \left(r_{\max} - r_{\min} + n - \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{P_j} \right) \frac{P}{P^{(k)}} - k - \sum_{i=1}^k \left[\frac{P}{p_i P^{(k)}} \right]. \quad (14)$$

4. Алгоритм определения знака числа основан на применении операции сужения и следующей леммы, полученной в [1].

Лемма 2. О знаке числа. Пусть $A = (\tilde{\alpha}_{1k}, \tilde{\alpha}_{2k}, \dots, \tilde{\alpha}_{kk}, r_A^{(k)})$ — некоторое число, представленное в нормированной ОСОК с модулями $p_1, p_2, \dots, p_k$ и пусть $(r_{\max}^H)_k$ — максимальное значение нормированного ранга чисел из $[0, P^{(k)})$. Если $r_A^{(k)} > (r_{\max}^H)_k$, то $A < 0$. Если $r_A^{(k)} \leq 0$, то $A \geq 0$.

Для $k = 1, 2, \dots, n$ рассмотрим множества

$$P_k(1, (r_{\max}^H)_k) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^k P_i \tilde{\alpha}_{ik} - r_A^{(k)} P^{(k)}, r_A^{(k)} \in [1, (r_{\max}^H)_k] \right\}.$$

При $k = n$ в употребляемых обозначениях индекс n будем опускать.

Для определения знака числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n, r_A) \in P(r_{\min}, r_{\max})$ достаточно применить ко всем $r_A^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) лемму 2. Действительно, находя целое $l(A)$ такое, что для всех $l > l(A)$ индекс $r_A^{(k)} \in (0, (r_{\max}^H)_k]$, а $r_A^{(l(A))} \notin (0, (r_{\max}^H)_{l(A)}]$, знак числа A будет установлен по результатам применения леммы 2 к $r_A^{(A)}$.

Вычисление $r_A^{(k)}$ достаточно производить в диапазоне Q_k^{3H} , выбираемом из условия, что $A \in P_{k+1}(1, (r_{\max}^H)_{k+1})$. Поэтому, согласно (12–14), получим

$$(r_{\min}^{\text{3H}})_k = (r_A^{(k)})_{\min} = -kp_{k+1} + k + 1 + \sum_{j=1}^k \left[\frac{p_{k+1}}{p_j} \right],$$

$$(r_{\max}^{\text{3H}})_k = (r_A^{(k)})_{\max} = (r_{\max}^H)_{k+1} p_{k+1} \leq kp_{k+1}; \quad (15)$$

$$Q_k^{\text{3H}} = (r_{\max}^{\text{3H}})_k - (r_{\min}^{\text{3H}})_k \leq 2kp_{k+1} - (k + 1) - \sum_{j=1}^k \left[\frac{p_{k+1}}{p_j} \right]. \quad (16)$$

Из (16) видно, что если $p_{k+2} \geq 2k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), то для вычисления $r_A^{(k)}$ удобно воспользоваться следующими соотношениями, полученными из (10) и (11):

$$|r_A^{(k)}|_{p_{k+1}} = \rho_1^{(k)} = \left| \sum_{j=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{jk}}{p_j} - \frac{P_{k+1}}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_{k+1} \right|_{p_{k+1}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1); \quad (17)$$

$$|r_A^{(k)}|_{p_{k+2}} = \rho_2^{(k)} = \left| \sum_{j=1}^k \frac{\tilde{\alpha}_{jk}}{p_j} - \frac{P_{k+2}}{P^{(k)}} \tilde{\alpha}_{k+2} \right|_{p_{k+2}}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-2); \quad (18)$$

$$|r_A^{(n-1)}|_p = \rho_2^{(n-1)} = \left| r_A p_n - \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{p_n \tilde{\alpha}_j}{p_j} \right] - \tilde{\alpha}_n \right|_p, \quad \text{где } p \geq 2(n-1). \quad (19)$$

5. Ранг числа. Алгоритм определения нормированного ранга числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) \in [0, P)$ основан на следующей лемме.

Лемма 3. О ранге числа. Для нормированного ранга числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ справедлива формула

$$r_A^H = |-a_2^{(n-1)}|_p - s,$$

где $a_2^{(n-1)}$ — старшая цифра смешанного кода ИИ $r_{A_0}^{(n-1)}$, т. е. $a_2^{(n-1)} = \left[\frac{r_{A_0}^{(n-1)}}{p_n} \right]$, $A_0 = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i$; s — знак числа $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - |-a_2^{(n-1)}|_p P$, определяемый соотношением

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} \geq 0, \\ 1, & \text{если } A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $(\rho_1^{(n-1)}, \rho_2^{(n-1)})$ — остаточный код индекса $r_{A_0}^{(n-1)}$ в системе модулей p_n, p , тогда $r_{A_0}^{(n-1)} = a_2^{(n-1)} p_n + a_1^{(n-1)}$, где $a_1^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)}$, $a_2^{(n-1)} = \left\lfloor \frac{\rho_2^{(n-1)} - \rho_1^{(n-1)}}{p_n} \right\rfloor$.

Согласно определению нормированного ранга, ранг числа $A = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ равен индексу последнего неотрицательного числа в последовательности $A_0, A_1, \dots, A_{r_{\max}^n}$, где $A_j = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - jP$ ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$).

Из формулы (10) видно, что $r_{A_0}^{(n-1)} \leq 0$ и, следовательно,

$$r_{\max}^{3n} \leq a_2^{(n-1)} p_n + a_1^{(n-1)} < p_n p. \quad (20)$$

Из (10) следует также, что увеличение на единицу индекса числа A_j влечет за собой увеличение на p_n числа $r_{A_j}^{(n-1)}$. Следовательно, первым из чисел A_j ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$), для которого ИИ в нормированной ОСОК с основаниями $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ выйдет из области (20), является $A_{p-a_2^{(n-1)}} = A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$.

Очевидно, $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)} \in [1, r_{\max}^{3n}]$; и так как $p_n \geq 2(n-2) \geq (n-1) > (r_{\max}^n)_{n-1}$ при $n \geq 3$, (см. п. 4), то

$$r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = p_n - \rho_1^{(n-1)} > (r_{\max}^n)_{n-1}$$

и по лемме 2 $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p+1} < 0$.

Поэтому последним неотрицательным числом в последовательности A_j ($j=0, 1, 2, \dots, r_{\max}^n$) является $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$ или $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p-1}$, если $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p} < 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 видно, что для определения r_A^n необходимо:

- по формулам (17)–(19) найти $r_{A_0}^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, n-1$);
- сформировать знак s числа $A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}$, для которого $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(k)} = r_{A_0}^{(k)}$, ($k=1, 2, \dots, n-2$) и $r_{A_{|-a_2^{(n-1)}|_p}}^{(n-1)} = \rho_1^{(n-1)}$;
- найти $r_A^{(n)} = |-a_2^{(n-1)}|_p - s$.

6. Умножение дробей. В нормированных ОСОК удобно рассматривать дроби вида $\frac{A}{SP}$, где S — некоторый натуральный множитель, а $A \in P(r_{\min}, r_{\max})$ [2, 4]. Умножение двух дробей $\frac{A}{SP}$ и $\frac{B}{SP}$ сводится к вычислению обобщенного кода $(\tilde{\gamma}'_1, \tilde{\gamma}'_2, \dots, \tilde{\gamma}'_n, r_{C'})$ числа $C' = \left[\frac{C}{SP} \right]$ — ближайшего целого к $\frac{C}{SP}$ ($C=AB$). Сначала вычисляется остаточный код $\{C'\}_{Q_{\text{пр}}}$ по формуле

$$\{C'\}_{Q_{\text{пр}}} = \left\{ \left\lfloor \frac{\{r_A^n\}_P - \{r_B^n\}_{Q_{\text{пр}}}}{S} \right\rfloor \right\}_{\frac{Q_{\text{пр}}}{S}}. \quad (21)$$

Затем вычисляется $r_{C'}$ по формуле

$$\{r_{C'}\}_{\frac{Q_{np}}{SP}} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_i}{p_i} - \frac{C'}{P} \right\} \frac{Q_{np}}{SP}.$$

Предполагается, что один из модулей диапазона Q_{np} выбран равным множителю S .

Найдем оценки для экстремальных значений $r_{C'}$. Согласно формуле (4) и формулам для C_{min} и C_{max} из п. 2 для систем с симметричным $\bar{P}(r_{min}, r_{max})$ с учетом того, что $r_{min} = r_{max}^H + 1 - r_{max}$, получаем $Q^{pd} \leq 2 \left[\frac{r_{max}^2}{S} \right] + r_{max}^H + 1$.

З а м е ч а н и е. При выполнении операций алгебраического сложения, умножения целых и дробей возможно переполнение. Это происходит, когда ИИ результата выходит из $[r_{min}, r_{max}]$. Проверка на переполнение легко осуществляется с помощью следующей леммы.

Лемма 4. Для того, чтобы число $r = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ в СОК с попарно взаимно простыми модулями $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ удовлетворяло неравенству $0 \leq r < p_m$ ($-p_m \leq r < 0$), необходимо и достаточно, чтобы для $i = 1, 2, \dots, m-1$

$$p_m = p_i \pmod{p_i} \quad (-p_m = p_i \pmod{p_i}).$$

Вышеизложенные алгоритмы выполнения арифметических операций применимы и для нормированных ОСОК 2-го рода с единственным изменением. При анализе на переполнение вместо проверки на принадлежность ИИ к $[r_{min}, r_{max}]$ необходимо проверять условия, налагаемые на ИИ при определении области определения операций. Следует также отметить, что приводимые оценки экстремальных значений и диапазонов изменения ИИ результатов операций изменятся.

Рассмотрим важные с практической точки зрения нормированные ОСОК с расширенным интервальным индексом по рангу (ОСОК РИИР), для которых множество (1) заменяется следующим:

$$\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = \left\{ A \in Z \mid A = \sum_{i=1}^n P_i \tilde{\alpha}_i - r_A P; \quad r_A \in [r_{min} + r_A^H - r_{max}^H, r_{max} + r_A^H] \right\}.$$

Очевидно, $\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = [-r_{max}P, (r_{max}^H + 1 - r_{min})P]$, а в случае симметричности $\bar{P}(r_{min}, r_{max}) = \bar{P}(r_{max}) = [-r_{max}P, r_{max}P]$.

Для получения экстремальных значений ИИ чисел в рассматриваемых системах удобнее всего воспользоваться леммой 1. Ее применение для систем с $P(r_{max})$ дает следующие соотношения:

$$r_{min}^{сум} = r_{min}^{раз} = r_{min}^{ac} = 2r_{max}; \quad r_{max}^{сум} = r_{max}^{раз} = r_{min}^{ac} = 2r_{max} + r_{max}^H;$$

$$Q_{ac} = 4r_{max} + r_{max}^H;$$

$$r_{min}^{np} = -r_{max}^2 P; \quad r_{max}^{np} = r_{max}(r_{max}P - 1) + r_{max}^H; \quad Q_{np} = 2r_{max}^2 P - r_{max} + r_{max}^H;$$

$$r_{min}^{pd} = -r_{max}; \quad r_{max}^{pd} = r_{max} + r_{max}^H; \quad Q^{pd} = 2r_{max} + r_{max}^H.$$

Последние три соотношения получены в предположении, что $S = r_{max}$. В этом случае имеется возможность оперировать с дробями из $(-1, 1)$, что весьма удобно.

1. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 1, с. 12.
2. Коляда А. А.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех., 1976, № 3, с. 3.
3. Коляда А. А., Кравцов В. К. Обнаружение и исправление ошибок при выполнении операций в ОСОК с помощью R-кодов. ВИНТИ, № 2240-77. Деп. от 06.06.77.
4. Коляда А. А., Кравцов В. К. Ранг числа и умножение дробей в нормированных обобщенных СОК. ВИНТИ № 4111-76. Деп. от 29.11.76.

Поступила в редакцию
15.06.78.

Кафедра электронных
математических машин

УДК 539.107.5

А. С. ГАХОВИЧ, А. А. КОЛЯДА, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА, ГЕНЕТИЧЕСКИ СВЯЗАННОГО С НЕКОТОРЫМ ПОТОКОМ СИГНАЛОВ, С ПОМОЩЬЮ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ МВА

Данная работа посвящена определению интенсивности случайного потока сигналов, порожденного потоком $A = \{A_1, A_2, \dots\}$, являющимся стохастическим нестационарным. В [1] эта задача решена для случая, когда для накопления статистических данных используются многоканальные временные анализаторы (МВА), работающие в одностоповом режиме. Применение таких МВА оправдано, когда порождаемый поток малоинтенсивен. Если поток имеет высокую интенсивность, следует использовать анализаторы, работающие в многостоповом режиме. При k -стоповом режиме МВА за цикл измерения T может зарегистрировать первые k сигналов, начиная с момента привязки τ_0 .

Введем обозначения: $\Omega_0 = (a, b)$ — область задания A ; $\Omega = (\tau_0, \tau_0 + t)$, $\tau_0 \in \Omega_0$, $t \in (0, c)$, c — длительность вторичного потока B_i ($i = 1, 2, \dots$); T — максимальная длина интервалов, измеряемых многоканальным временным анализатором; $A' = A + \Pi$, $B' = B + \Pi$, B — поток, получающийся в результате наложения B_i ($i = 1, 2, \dots$), Π — помеховый поток; $N(t)$ — содержимое канала МВА с номером $\left[\frac{t}{\Delta}\right]$, Δt — ширина канала, а квадратные скобки употребляются для обозначения целой части числа; N — число проведенных циклов измерений МВА; $P_e^B(\Omega)$, $P_e^{B'}(\Omega)$, $P_e^{B_i}(\Omega)$, $P_e^\Pi(\Omega)$ — вероятности попадания e импульсов в область Ω соответственно потоков B , B' , B_i и помехового; $f_1^A(\tau)$, $f_1^{A'}(\tau)$, $f_1^B(\tau)$, $f_1^{B'}(\tau)$, $\bar{f}_1^B(\tau)$, $\bar{f}_1^\Pi(\tau)$ — интенсивности потоков.

В обозначениях характеристик B_0 верхний индекс будем опускать.

Так же как в [1], предположим, что все вторичные потоки являются однопоточными и не зависят друг от друга. Интенсивность первичного потока, а также типы первичного и вторичного потоков известны. Для определенности поток A считается пуассоновским, потоки B_i — отрицательно-биномиальными, а поток Π — стационарным пуассоновским.

Пусть произведено N циклов измерений. Тогда при работе в k -стоповом режиме величина $N(t)/N$ ($0 < t \leq T$), очевидно, является частотой попадания в интервал $(\tau_0 + t, \tau_0 + t + \Delta t)$ какого-то из первых k импульсов потока B' , находящегося правее τ_0 , независимо от величины τ_0 . При достаточно большом N эта частота приближается к безусловной вероятности $W_k(t)\Delta t$ попадания в $(\tau_0 + t, \tau_0 + t + \Delta t)$ указанного импульса, независимо от момента привязки на входе 1.

Идея, положенная в основу используемого в данной работе решения рассматриваемой задачи, состоит в приравнивании вероятности $W_k(t)\Delta t$,