

Белорусский государственный университет

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г.Прохоренко

«05» июля 2024 г.

Регистрационный № УД – 12961/уч.



## **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 07 Прикладная информатика(по направлениям)  
направления специальности: 1-31 03 07-01 Прикладная информатика  
(программное обеспечение компьютерных систем)**

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 07-2021, типового учебного плана №G 31-1-030/пр.-тип. от 01.07.2021, учебных планов БГУ №G 31-1-216 уч. от 22.03.2022, №G 31-1-224 уч. ин. от 27.05.2022.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

**Л.И. Лавринович**, доцент кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**О.И. Костюкова**, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

**И.К. Асмыкович**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 10 от 22.05.2024 г.)

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол № 9 от 28.06.2024 г.)

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления  
Белорусского государственного университета,  
кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М.Дмитрук

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» знакомит студентов с классическими и современными подходами к решению экстремальных задач, возникающих в повседневной человеческой деятельности (техника, наука, экономика, финансы). Базой для изучения методов оптимизации являются дисциплины модуля «Высшая математика».

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цели** учебной дисциплины «Методы оптимизации»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. изучение математического аппарата и методов, применяемых при решении экстремальных задач, возникающих в практической деятельности при решении задач оптимального управления, распределения ресурсов, организации производства, сетевого планирования и т.п.

**Задачи** учебной дисциплины:

1. выработать навыки применения методов оптимизации и алгоритмов решения прикладных задач на высоком профессиональном уровне;
2. подготовить студентов к внедрению этих методов и алгоритмов в современной экономической системе.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» относится к компоненту учреждения высшего образования и входит **в модуль** «Математические методы принятия решения и интеллектуальные системы».

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» опирается на дисциплины: «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальные уравнения». Дисциплина служит базой для учебной дисциплины «Исследование операций».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Методы оптимизации» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции**:

СК-7. Строить и анализировать математические модели для задач принятия оптимальных решений в различных прикладных областях, обосновывать методы теоретического исследования моделей, включающие аппарат математического программирования, теории игр, вариационного исчисления оптимального управления, использовать основные методы и модели искусственного интеллекта для различных типов данных, строить интеллектуальные системы и определять их структурные свойства, использовать современные эффективные алгоритмы для решения прикладных задач на многоядерных вычислительных устройствах.

В результате изучения дисциплины студент должен

**знать:**

- основы теории оптимизации и управления;
- линейное программирование;
- транспортные задачи;
- методы решения задач выпуклого и нелинейного программирования;
- основы динамического и целочисленного программирования;
- принцип максимума;

**уметь:**

- моделировать оптимизационные задачи экономики;
- применять методы решения оптимизационных задач;
- проводить анализ решения;
- корректировать решения при изменении исходных данных;

**владеть:**

- методами моделирования оптимизационных задач;
- методами решения оптимизационных задач;
- методами проведения анализа решения и прогнозирования.

### **Структура учебной дисциплины**

Форма получения высшего образования – дневная (очная).

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## **Введение**

Предмет методов оптимизации. Историческая справка. Место дисциплины среди других математических наук.

## **Раздел 1. Выпуклое программирование**

### **Тема 1.1. Выпуклые множества и функции. Основная задача выпуклого программирования**

Выпуклые множества и функции и их свойства. Основная задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.

### **Тема 2.2. Введение в теорию двойственности**

Теория двойственности в выпуклом программировании. Квадратичное программирование. Задача геометрического программирования.

## **Раздел 2. Нелинейное программирование**

### **Тема 2.1. Задачи математического и нелинейного программирования**

Классификация задач нелинейного программирования. Задачи на безусловный минимум.

### **Тема 2.2. Задачи со смешанными ограничениями**

Задачи на условный минимум. Обобщенное правило множителей Лагранжа. Классическое правило множителей Лагранжа. Лемма о включении. Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности.

## **Раздел 3. Линейное программирование**

### **Тема 3.1. Симплекс-метод**

Производственная задача. Графический метод решения. Каноническая и нормальная формы задач линейного программирования.

Базисный план. Потенциалы и оценки. Критерий оптимальности. Итерация симплекс-метода. Первая фаза. Конечность метода.

### **Тема 3.2. Двойственность в линейном программировании**

Двойственная каноническая задача линейного программирования. Базисный двойственный план и псевдоплан. Теория двойственности в линейном программировании.

Критерий оптимальности базисного двойственного плана. Итерация двойственного симплекс-метода. Первая фаза.

Анализ решения: единственность оптимальных прямого и двойственного планов, физический смысл двойственных переменных, анализ чувствительности.

### **Тема 3.3. Специальные задачи**

Сетевая транспортная задача. Матричная транспортная задача. Некоторые приложения линейного программирования: задачи на минимакс, кусочно-

линейная экстремальная задача, приложение к исследованию линейных соотношений и матричных игр.

### **Тема 3.4. Линейное и нелинейное программирование**

Прикладные задачи линейного и нелинейного программирования

## **Раздел 4. Вычислительные методы нелинейного программирования**

### **Тема 4.1. Классификация методов. Метод ветвей и границ**

Классификация вычислительных методов. Методы нулевого порядка. Метод ветвей и границ: схемы одностороннего и полного ветвления. Задача целочисленного линейного программирования. Задача о рюкзаке.

### **Тема 4.2. Динамическое программирование**

Многоэтапные задачи оптимизации. Применение метода динамического программирования к решению конечномерных задач. Задача распределения ресурсов. Задача о кратчайшем пути. Задачи сетевого планирования.

## **Раздел 5. Вариационное исчисление**

### **Тема 5.1. Основная задача вариационного исчисления. Необходимые условия оптимальности первого порядка**

Задача о брахистохроне. Допустимые кривые. Основная задача вариационного исчисления. Слабая и сильная минимали. Необходимые условия оптимальности слабой минимали в терминах вариаций функционала. Условия Эйлера, Вейерштрасса-Эрдмана.

### **Тема 5.2. Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности**

Условие Лежандра-Клебша. Присоединенная задача о минимуме. Условие Якоби. Достаточные условия оптимальности.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
	<b>Введение</b>	1			
<b>1</b>	<b>Выпуклое программирование</b>				
1.1	Выпуклые множества и функции. Основная задача выпуклого программирования	3	6		Решение задач расчетно-графическое задание № 1
1.2	Введение в теорию двойственности	2			Устный опрос, учебная дискуссия
<b>2</b>	<b>Нелинейное программирование</b>				
2.1	Задачи математического и нелинейного программирования	2	2		Решение задач
2.2	Задачи со смешанными ограничениями	6	6		Устный опрос расчетно-графическое задание № 2
<b>3</b>	<b>Линейное программирование</b>				
3.1	Симплекс-метод	2	4		Решение задач
3.2	Двойственность в линейном программировании	3	2		Решение задач
3.3	Специальные задачи	3	4		Решение задач
3.4	Линейное и нелинейное программирование			2	Решение задач,

					расчетно-графическое задание № 3
<b>4</b>	<b>Вычислительные методы нелинейного программирования</b>				
4.1	Классификация методов. Метод ветвей и границ	2	2		Решение задач, учебная дискуссия
4.2	Динамическое программирование	4	2		Решение задач
<b>5</b>	<b>Вариационное исчисление</b>				
5.1	Основная задача вариационного исчисления. Необходимые условия оптимальности первого порядка	4			Устный опрос, учебная дискуссия
5.2	Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности	2	2	2	Контрольная работа
	<b>Итого</b>	<b>34</b>	<b>30</b>	<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. *Иоффе А. Д.* Теория экстремальных задач : учебное пособие для вузов / Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 480 с. - <https://e.lanbook.com/book/266777>.
2. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие для студ. вузов/ А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 511 с.-URL: <https://e.lanbook.com/book/212129>.
3. Ржевский, С. В. Математическое программирование : учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. - 607 с.-URL:<https://e.lanbook.com/book/206993>
4. Методы оптимизации: электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актuarная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.]; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск: БГУ, 2020. – 203 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 202–203. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.

### Перечень дополнительной литературы

5. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. – Минск : Четыре четверти, 2011. – 472 с
6. *Альсевич, В.В.* Методы оптимизации: упражнения и задания: Учебное пособие / В.В. Альсевич, В.В. Крахотко– Мн.: БГУ, 2005. – 405 с.
7. *Васильев, Ф. П.* Методы оптимизации : В 2-х кн: Кн. 1 / Ф. П. Васильев. – Москва: МЦНМО, 2011. – 620 с.
8. *Карманов, В.Г.* Математическое программирование: Учебное пособие/ В.Г. Карманов – М.: Физматлит, 2001. – 263 с.
9. *Моисеев, Н.Н.* Методы оптимизации: Учебное пособие/ Н.Н.Моисеев, Ю.П.Иванилов, Е.М.Столярова – М.: Наука, 1978. – 351 с.
10. *Ашманов, С.А.* Линейное программирование: Учебное пособие / С.А. Ашманов – Москва, URSS. 2021. – 304 с

## **Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Постановлением Министерства образования Республики Беларусь № 319 от 13 октября 2023 г. «Об утверждении Правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования»; Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020)

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

*Устная форма:*

– устный опрос, учебная дискуссия;

*Письменная форма:*

– контрольная работа;

– расчетно-графические задания.

*Устно-письменная форма:*

– решение задач;

– зачет по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Методы оптимизации» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Расчетно-графические задания по каждому изученному разделу предложены на образовательном портале EDUFPMI.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Методы оптимизации» учебным планом предусмотрен **зачет**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

– устный опрос, решение задач – 10 %;

– расчетно-графические задания – 60 %;

– контрольная работа – 30 %.

Обучающийся допускается к зачету по учебной дисциплине при условии получения положительной (4 и выше) отметки текущей аттестации по дисциплине.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) - 40 % и отметки на зачете - 60 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

**Тема 3.4.** Линейное и нелинейное программирование. (2 ч)

Примерный перечень заданий:

1. а) Решите задачу линейного программирования графическим методом.  
б) Свести задачу из пункта а) к канонической задаче линейного программирования.  
в) Записать для канонической задачи из пункта б) задачу первой фазы, указать для нее начальный базисный план.  
г) Решить каноническую задачу из пункта в) симплекс методом, построив начальный базисный план на основе небазисной вершины и подобрав к нему базис.  
д) Построить задачу, двойственную к исходной задаче из пункта а)  
е) Записать решение построенной двойственной задачи.  
ж) Для задачи из пункта б) проведите одну итерацию двойственного симплексметода, взяв в качестве начального базис, выбранный в пункте г).
2. Решить задачу выпуклого или нелинейного программирования со смешанными ограничениями.

**Форма контроля** – решение задач, расчетно-графическое задание № 3

**Тема 5.2.** Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности. (2 ч)

Примерный перечень заданий:

1. Решить задачу целочисленного программирования.
2. Решить задачу распределения ресурсов.
3. Решить основную задачу вариационного исчисления.

**Форма контроля**– контрольная работа

### **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

---

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- практические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и промежуточной аттестации,
- вопросы для подготовки к зачету.

## Примерный перечень вопросов к зачету

1. Выпуклые множества. Свойства выпуклых множеств. Теорема о строгой отделимости выпуклых множеств.
2. Опорная плоскость. Теорема о существовании опорной плоскости\*. Теорема об отделимости выпуклых множеств.
3. Лемма о несовместности системы линейных соотношений.
4. Выпуклые функции. Критерии выпуклости.
5. Постановка основной задачи ВП. Теорема Куна-Таккера для основной задачи ВП\*.
6. Гладкая задача ВП. Условия Куна-Таккера.
7. Теория двойственности в ВП. Прямая и двойственная задачи. Соотношения двойственности.
8. Решение простейшей задачи квадратичного программирования.
9. Задача безусловной оптимизации в НЛП. Необходимые условия минимума первого и второго порядка. Достаточное условие локального минимума.
10. Общая задача НЛП. Вспомогательная теорема.
11. Общая задача НЛП. Обобщенное правило множителей Лагранжа.
12. Общая задача НЛП. Классическое правило множителей Лагранжа.
13. Условно-стационарные и нормальные планы в задачах НЛП.
14. Необходимое и достаточное условия минимума второго порядка\*. Общая схема решения задачи НЛП.
15. Векторная оптимизация.
16. Каноническая форма задач ЛП. Основные понятия. Графический метод решения задачи ЛП.
17. Базис. Базисный план. Невырожденный базисный план. Формула приращения целевой функции\*. Потенциалы, оценки.
18. Критерий оптимальности базисного плана.
19. Итерация прямого симплекс-метода.
20. Первая фаза симплекс-метода.
21. Двойственные задачи в ЛП. Правила построения двойственных задач.
22. Теория двойственности в ЛП. Основное неравенство теории двойственности ЛП. Теорема существования. Теорема двойственности. Критерий несовместности ограничений.
23. Базисные двойственный план и псевдоплан. Критерий оптимальности базисного двойственного плана.
24. Итерация двойственного СМ.
25. СТЗ. Постановка задачи. Основные понятия и определения. Базисный сетевой поток. Алгоритм прямого метода потенциалов для СТЗ. Первая фаза метода потенциалов.
26. МТЗ. Постановка задачи. Основные понятия и определения. Базисный план перевозок. Алгоритм прямого метода потенциалов для МТЗ. Первая фаза метода потенциалов.
27. Задача на минимакс.

28. Теорема Фаркаша.
29. Теорема о совместности систем неравенств\*
30. Теорема о несовместности неравенств.
31. Метод ветвей и границ. Основные понятия. Схема полного и одностороннего ветвления. Задача о рюкзаке.
32. Метод ветвей и границ. Основные понятия. Схема полного и одностороннего ветвления. Задача целочисленного линейного программирования.
33. Динамическое программирование. Общая схема.
34. Динамическое программирование. Задача о замене оборудования.
35. Динамическое программирование. Задача распределения ресурсов. Задача о кратчайшем пути.
36. Вариационное исчисление. Основная задача ВИ. Понятия слабой и сильной минималей. Классификация задач ВИ.
37. Метод вариаций. Вариации кривой и функционала. Условия оптимальности в терминах вариаций функционала.
38. Лемма Дюбуа-Раймона. Теорема Эйлера.
39. Теорема Гильбердта. Условия Вейерштрасса-Эрдмана
40. Присоединенная задача о минимуме. Условие Лежандра-Клебша.
41. Условие Якоби. Достаточные условия слабого минимума.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>2</sup>
Исследование операций	Кафедра информационных систем управления	Нет	Изменения не требуются (протокол №10 от 22.05.2024г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
**на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год**

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
методов оптимального управления (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой  
к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_

Н.М.Дмитрук

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
доцент \_\_\_\_\_

Ю.Л. Орлович