Краткие сообщения

Short communications

УДК 519.8

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РАНДОМИЗИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ АСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

М. С. БАРКЕТОВ[1)]

[1)]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Рассматривается асимметричная задача коммивояжера, в которой надо найти гамильтонов цикл с минимальной суммарной стоимостью дуг в полном ориентированном графе. Для решения данной задачи на основе алгоритма, построенного автором в статье «Полиномиальный рандомизированный алгоритм для задачи “Асимметричный коммивояжер”» (Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2022. Т. 66, № 5. С. 489–494), разработан новый параметризованный полиномиальный рандомизированный алгоритм. Его отличие состоит в другой параметризации. Однако основным результатом является препроцессинговый полиномиальный алгоритм линейного программирования для определения оптимальных параметров.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; теория вероятностей; рандомизированный алгоритм; приближенный алгоритм; задача коммивояжера.

Благодарность. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проекты Ф21-010 и Ф23РНФ-017).

Образец цитирования:
Баркетов МС. Оптимизация параметров полиномиального рандомизированного алгоритма для асимметричной задачи коммивояжера. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:113–118.
EDN: HJEEJF

For citation:
Barketau MS. Parameter optimisation of the polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:113–118. Russian.
EDN: HJEEJF

Автор:
Максим Сергеевич Баркетов – кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики.

Author:
Maksim S. Barketau, PhD (physics and mathematics), docent; senior researcher at the laboratory of mathematical cybernetics.
barketau@mail.ru

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024;2:113–118
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2024;2:113–118

PARAMETER OPTIMISATION OF THE POLYNOMIAL RANDOMISED ALGORITHM FOR THE ASYMMETRIC TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

M. S. BARKETAU[a]

[a]*United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus, 6 Surganava Street, Minsk 220012, Belarus*

Abstract. The asymmetric travelling salesman problem without metric restrictions is herein considered. The polynomial randomised algorithm depending on the set of parameters is proposed similar to the one developed by the author in the article «Polinomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem» (Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2022. Vol. 66, No. 5. P. 489–494). The difference of the proposed algorithm is in different parametrisation. The parameter optimisation is arranged with the help of the polynomial preprocessing algorithm.

Keywords: combinatorial optimisation; probability theory; randomised algorithm; approximation algorithm; asymmetric travelling salesman problem.

Acknowledgements. This work was carried out with partial financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (projects F21-010 and F23RNF-017).

Введение

Рассматривается асимметричная задача коммивояжера. Пусть дан полный ориентированный граф $G = G(V, A)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством из $n(n-1)$ дуг $A = \{(u, v) | u, v \in V, u \neq v\}$. У каждой дуги есть неотрицательная стоимость $c(u, v) \geq 0$. Обходом (частичным обходом) называется перестановка множества (подмножества) вершин $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Стоимостью обхода $c(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ является значение

$$c(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{j=2}^{n} c(i_{j-1}, i_j) + c(i_n, i_1).$$

Задача состоит в том, чтобы найти обход вершин (гамильтонов цикл) минимальной стоимости.

Сначала в разделе «Рандомизированный алгоритм» разрабатывается общий параметризованный рандомизированный алгоритм. Рандомизированный алгоритм – это алгоритм, в котором на некоторых шагах организуется вероятностный эксперимент, результаты которого влияют на дальнейшее выполнение алгоритма. Параметризованный рандомизированный алгоритм – это рандомизированный алгоритм, в котором есть параметры, влияющие на вероятности. Подбор в некотором смысле оптимальных параметров рассматривается в разделе «Линейные программы» с использованием формулировок линейного программирования.

Похожий рандомизированный подход предложен в работе [1]. Однако в данной статье основным результатом является не рандомизированный алгоритм, а быстрый препроцессинговый полиномиальный алгоритм подбора в некотором смысле оптимальных параметров рандомизированного алгоритма. Под оптимальными параметрами понимаются такие параметры, которые обеспечивают низкое математическое ожидание стоимости решения, построенного рандомизированным алгоритмом. Понятно, что построение решения с минимально возможным математическим ожиданием, или, другими словами, с математическим ожиданием, равным минимальной стоимости решения, кажется сложным, так как задача является NP-трудной в сильном смысле, но тем не менее возможны подходы, позволяющие заметно повысить качество построенных решений.

Рандомизированные алгоритмы применялись для решения некоторых похожих задач. Наиболее успешным примером, вероятно, является евклидова задача коммивояжера [2]. Однако для евклидовой задачи коммивояжера построена полиномиальная приближенная схема, а для асимметричной задачи коммивояжера без неравенства треугольника не существует полиномиального алгоритма, строящего приближенное решение с константной степенью приближения в случае $P \neq NP$. Отметим, что в работе [2] используется принципиально иной способ рандомизации, основанный на геометрических свойствах задачи.

Для асимметричной задачи коммивояжера наиболее исследованным является случай с метрическими ограничениями, или случай с неравенством треугольника. Недавно для данной задачи было доказано существование полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной константной степенью приближения [3]. Кроме того, в литературе для асимметричной задачи коммивояжера предлагаются относительно быстрые метаэвристические подходы (см., например, [4]) и подходы точного решения для разных вариантов задачи [5].

Рандомизированный алгоритм

Предлагается следующий рандомизированный алгоритм.

Начало алгоритма.

Шаг 0. Выбрать произвольную вершину i_1 в качестве начальной вершины обхода.

Шаг 1. Сгенерировать дугу (i_1, x_1), где x_1 – вторая вершина частичного обхода.

Рассмотрим следующие коэффициенты:

$$d_j = f_1(c(i_1, j)),$$

где $f_1(x)$ – некоторая невозрастающая неотрицательная функция.

Определим дискретное распределение случайной величины x_1, обозначающей следующую вершину частичного обхода. Случайная величина x_1 принимает значения $j \in V$ с вероятностями

$$P(x_1 = j) = \frac{d_j}{\sum\limits_{l \in V \setminus i_1} d_l}, \text{ если } j \in V \setminus i_1,$$

$$P(x_1 = j) = 0, \text{ если иначе.}$$

Шаги 2, …, *n* – 1. Сгенерировать дугу (i_k, x_{k+1}), где x_{k+1} – это $(k+1)$-я вершина частичного обхода, при условии, что уже сгенерирован частичный обход $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Рассмотрим следующие коэффициенты:

$$d_j = f_k(c(i_k, j)),$$

где $f_k(x)$ – некоторая невозрастающая неотрицательная функция.

Определим дискретное распределение случайной величины x_{k+1}, обозначающей следующую вершину частичного обхода. Случайная величина x_{k+1} принимает значения $j \in V$ с вероятностями

$$P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \ldots, i_k)) = \frac{d_j}{\sum\limits_{l \in V \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} d_l}, \text{ если } j \in V \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\},$$

$$P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \ldots, i_k)) = 0, \text{ если иначе.}$$

Запись $P(x_{k+1} = j | (i_1, i_2, \ldots, i_k))$ означает вероятность выбора следующей возможной вершины j при условии, что уже сгенерирован частичный обход $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

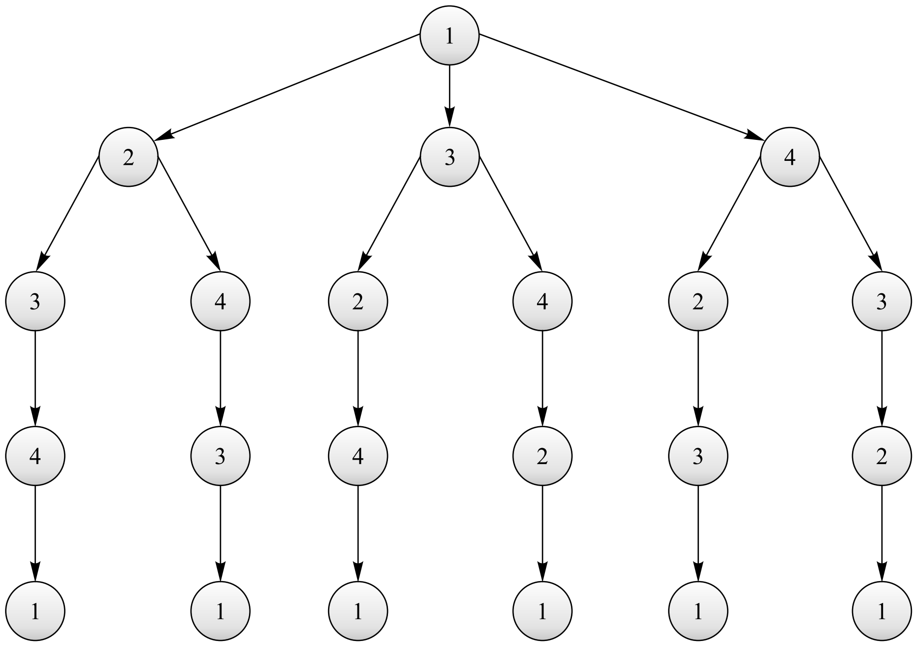
Шаг *n*. Добавить к частичному обходу $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ дугу (i_n, i_1) с вероятностью 1.

Конец алгоритма.

Отличие этого алгоритма от алгоритма, разработанного в статье [1], состоит в другой параметризации выбора вероятностей.

Внимательный читатель может заметить, что шаги 1, 2, …, n алгоритма есть не что иное, как процесс построения пути от корня к листу в некотором ориентированном выходящем дереве с корнем в вершине, имеющей метку i_1. На рисунке проиллюстрирован этот процесс для полного ориентированного графа с набором вершин $\{1, 2, 3, 4\}$.

Все узлы рассматриваемого дерева разбиты на уровни. Единственный узел нулевого уровня имеет метку i_1. Все узлы k-го уровня соответствуют один к одному частичным гамильтоновым обходам длиной k из начальной вершины i_1 исходного графа G. Фактически можем обозначить узел k-го уровня этим частичным обходом $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Из данного узла в дереве выходят $n - k$ дуг к узлам $(i_1, i_2, \ldots, i_k, j)$, $j \in V \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $(k+1)$-го уровня. Отметим, что степень захода каждого узла в дереве равна единице и дуги выходят только из узла одного уровня к узлам следующего уровня. Листьями дерева являются узлы $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, соответствующие гамильтоновым обходам. Вес дуги из узла $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ к узлу $(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})$ равен $c(i_k, i_{k+1})$.



Дерево построения решения
The tree of the solutions built

Линейные программы

Теперь, когда определен общий алгоритм с входными параметрами, возникает вопрос о том, как найти оптимальные входные параметры, для которых алгоритм работает эффективно, т. е. обладает малым математическим ожиданием стоимости построенного решения. Для построения таких параметров воспользуемся математическим программированием. Рассмотрим следующую модель математического программирования с переменными $f_k\big(c(u, v)\big)$, $1 \le k \le n-1$, $(u, v) \in A$, z. Переменная z обозначает верхнюю границу математического ожидания стоимости гамильтонова цикла при значениях функций $f_k\big(c(u, v)\big)$, $1 \le k \le n-1$, $(u, v) \in A$, заданных на стоимостях дуг орграфа. Для удобства упорядочим по неубыванию стоимостей множество дуг орграфа и обозначим элементы этой упорядоченной последовательности через $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, \big(u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n}\big)$. Пусть I_k обозначает множество частичных обходов длиной k, начинающихся с вершины i_1.

$$\min z,$$

$$\sum_{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus i_1} f_1\big(c(i_1, j)\big) \ge 1, \tag{1}$$

$$f_k\big(c(u_1, v_1)\big) \ge f_k\big(c(u_2, v_2)\big) \ge \ldots \ge f_k\Big(c\big(u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n}\big)\Big) \ge 0 \;\; \forall k, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}} f_k\big(c(i_k, j)\big) \ge f_{k-1}\big(c(i_{k-1}, i_k)\big), \; (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in I_k, \; 2 \le k \le n-1, \tag{3}$$

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I_n} c(i_1, i_2, \ldots, i_n) f_{n-1}\big(c(i_{n-1}, i_n)\big) \le z. \tag{4}$$

Отметим, что переменными в данной программе являются значения $f_k\big(c(u, v)\big)$, $1 \le k \le n-1$, $(u, v) \in A$, z, и что программа с ограничениями (1)–(4) допустима, т. е. существует допустимое решение программы. Допустимым решением могут быть достаточно большие значения переменных $f_k\big(c(u, v)\big)$, $1 \le k \le n-1$, $(u, v) \in A$, и достаточно большое значение переменной z, обозначающей верхнюю границу левой части ограничения (4).

Следует отметить, что данная программа минимизирует не в точности математическое ожидание стоимости построенного решения, а верхнюю границу математического ожидания. Если бы ограничения (1) и (3) являлись ограничениями типа равенства, это было бы точное значение математического ожидания стоимости решения. Но в этом случае программа может быть недопустима из-за слишком большого числа ограничений типа равенства. Другими словами, данный процесс трудно моделировать точно с помощью линейных ограничений. В связи с этим заменяем ограничения типа равенства ограничениями типа неравенства. При этом ограничения (1) и (3) гарантируют, что значения $f_k\left(c\left(i_k, j\right)\right)$ являются верхними границами вероятностей построения частичного обхода $\left(i_1, i_2, \ldots, i_k, j\right)$ для каждого возможного такого частичного обхода (см. дерево обхода на рисунке). Ограничения (2) гарантируют невозрастание функций f_k, что кажется естественным ограничением, так как меньшие стоимости дуг, предположительно, с большей вероятностью должны вести к меньшим стоимостям обхода. Ограничение (4) гарантирует, что z является верхней границей математического ожидания стоимости построенного решения.

Заметим, что число ограничений в рассматриваемой программе экспоненциально. Покажем, что можно найти оптимальное решение данной программы за полиномиальное время. Для этого за полиномиальное время построим отделяющую гиперплоскость для случая, когда точка, определенная вектором значений переменных, не принадлежит допустимому многограннику, или установим, что точка принадлежит допустимому многограннику.

Первая и вторая группы ограничений проверяются непосредственно, так как этих ограничений полиномиальное число.

Чтобы проверить выполнение третьей группы ограничений, зафиксируем уровень k и последнюю дугу частичного обхода $\left(i_{k-1}, i_k\right)$. В этом случае легко проверить, что если какое-то ограничение из третьей группы не выполняется, то не выполняется и следующее ограничение из третьей группы. Пусть $\left(i_k, a_1\right), \left(i_k, a_2\right), \ldots, \left(i_k, a_{n-k}\right)$ – это $n-k$ дуг, которые имеют наибольшие стоимости среди всех дуг, ведущих из вершины i_k во множество вершин $V \setminus \left\{i_1, i_{k-1}, i_k\right\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-k} f_k\left(c\left(i_k, a_j\right)\right) \ge f_{k-1}\left(c\left(i_{k-1}, i_k\right)\right). \tag{5}$$

Это ограничение выбрано как наиболее важный представитель группы ограничений с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода $\left(i_{k-1}, i_k\right)$. Оно обладает следующим свойством.

Теорема 1. *Если выполняется ограничение (5), то выполняются и все остальные ограничения из группы с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода* $\left(i_{k-1}, i_k\right)$. *Если какое-то ограничение из третьей группы (с фиксированным уровнем k и последней дугой частичного обхода* $\left(i_{k-1}, i_k\right)$*) не выполняется, то не выполняется и ограничение (5).*

Значит, используя теорему 1, третью группу из экспоненциального числа ограничений можем заменить группой из полиномиального числа ограничений.

Теорема 2. *Третья группа из экспоненциального числа ограничений задачи с ограничениями (1)–(4) эквивалентна группе из полиномиального числа ограничений по одному ограничению (5) для каждого фиксированного уровня k и последней дуги частичного обхода* $\left(i_{k-1}, i_k\right)$.

Четвертая группа ограничений (включает одно ограничение) заменяется эквивалентным ограничением (приводятся слагаемые при каждой переменной $f_{n-1}\left(c\left(u, v\right)\right)$)

$$\sum_{(u, v) \in A} C\left(u, v\right) f_{n-1}\left(c\left(u, v\right)\right) \le z,$$

где величина $C\left(u, v\right)$ обозначает сумму стоимостей всех гамильтоновых обходов $\left(i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, u, v\right)$. Величины $C\left(u, v\right)$ подсчитываются за полиномиальное время подобно похожим величинам из работы [1].

Таким образом, приведен полиномиальный алгоритм, строящий отделяющую гиперплоскость, которая определяется невыполненным ограничением, в случае, если точка не принадлежит многограннику задачи. Значит, для программы можно найти решение за полиномиальное время с помощью алгоритма, основанного на многократном применении метода эллипсоидов, изложенного в работе [6]. Альтернативным прикладным методом решения задачи является эквивалентная формулировка на основе теоремы 2 с полиномиальным числом переменных и ограничений.

$$\min z,$$
$$\sum_{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus i_1} f_1\left(c\left(i_1, j\right)\right) \geq 1,$$
$$f_k\left(c\left(u_1, v_1\right)\right) \geq f_k\left(c\left(u_2, v_2\right)\right) \geq \ldots \geq f_k\left(c\left(u_{(n-1)n}, v_{(n-1)n}\right)\right) \geq 0 \ \forall k.$$

Зафиксируем уровень k, $2 \leq k \leq n - 1$, и дугу $\left(i_{k-1}, i_k\right)$. Пусть $\left(i_k, a_1\right), \left(i_k, a_2\right), \ldots, \left(i_k, a_{n-k}\right)$ – это $n - k$ дуг, которые имеют наибольшие стоимости среди всех дуг, ведущих из вершины i_k во множество вершин $V \setminus \left\{i_1, i_{k-1}, i_k\right\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-k} f_k\left(c\left(i_k, a_j\right)\right) \geq f_{k-1}\left(c\left(i_{k-1}, i_k\right)\right) \forall k, \ 2 \leq k \leq n-1, \ \forall \left(i_{k-1}, i_k\right) \in A, \ i_1 \neq i_{k-1}, \ i_1 \neq i_k,$$
$$\sum_{(u, v) \in A} C(u, v) f_{n-1}\left(c(u, v)\right) \leq z.$$

Отметим, что значения $C(u, v)$ могут быть довольно большими числами. Для того чтобы данный подход был применим в реальности с помощью компьютерных программ для линейного программирования, воспользуемся следующим приемом: округлим все числа до некоторого разряда и отбросим одинаковое количество младших разрядов до данного разряда. Такие огрубленные коэффициенты могут быть значимыми с точки зрения смысла линейной программы, но достаточно небольшими, чтобы быть воспринятыми программами для линейного программирования. На данный момент довольно часто встречаются компьютеры с 64-битной арифметикой, а это числа с 20 десятичными разрядами. Более того, не исключено развитие программ для линейного программирования по направлению длинной арифметики, потенциально позволяющее обрабатывать большие числа $C(u, v)$ без огрублений.

Заключение

Таким образом, разработан новый рандомизированный алгоритм для асимметричной задачи коммивояжера на основе подхода, изложенного в статье [1], но с другой параметризацией. Однако основной результат данной работы – это препроцессинговый полиномиальный алгоритм линейного программирования для выбора параметров.

Библиографические ссылки / References

1. Barketau MS. Polynomial randomised algorithm for the asymmetric travelling salesman problem. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2022;66(5):489–494. Russian. DOI: 10.29235/1561-8323-2022-66-5-489-494.

2. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems. In: *Proceedings of 37th Annual symposium on foundations of computer science; 1996 October 14–16; Burlington, USA.* Los Alamitos: IEEE Computer Society Press; 1996. p. 2–11. DOI: 10.1109/sfcs.1996.548458.

3. Svensson O. Approximating ATSP by relaxing connectivity. In: *Proceedings of 2015 IEEE 56th Annual symposium on foundations of computer science (FOCS-2015); 2015 October 17–20; Berkeley, USA.* Los Alamitos: Conference Publishing Services of the IEEE Computer Society; 2015. p. 1–19. DOI: 10.1109/focs.2015.10.

4. Burke EK, Cowling PI, Keuthen R. Effective local and guided variable neighbourhood search methods for the asymmetric travelling salesman problem. In: Boers EJW, Cagnoni S, Gottlieb J, Hart E, Lanzi PL, Raidl GR, et al., editors. *Applications of evolutionary computing. EvoWorkshops-2001: EvoCOP, EvoFlight, EvoIASP, EvoLearn, and EvoSTIM; 2001 April 18–20; Como, Italy.* Berlin: Springer; 2001. p. 203–212 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 2037). DOI: 10.1007/3-540-45365-2_21.

5. Fischetti M, Lodi A, Toth P. Exact methods for the asymmetric traveling salesman problem. In: Gutin G, Punnen AP, editors. *The traveling salesman problem and its variations.* New York: Springer; 2007. p. 169–205 (Du D-Z, Pardalos PM, editors. Combinatorial optimization; volume 12). DOI: 10.1007/0-306-48213-4_4.

6. Grötschel M, Lovász L, Schrijver A. *Geometric algorithms and combinatorial optimization.* 2nd edition. Berlin: Springer-Verlag; 2012. XII, 362 p. (Graham RL, Korte B, Lovász L, editors. Algorithms and combinatorics; volume 2).

Получена 18.04.2024 / исправлена 12.06.2024 / принята 12.06.2024.
Received 18.04.2024 / revised 12.06.2024 / accepted 12.06.2024.