

---

---

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

---

## PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

---

---

УДК 51-77:336.6

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД, УЧИТЫВАЮЩИЕ СТОХАСТИЧЕСКУЮ ПРИРОДУ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Г. А. КЕСИЯН<sup>1)</sup>, А. В. КОВАЛЕНКО<sup>1)</sup>,  
М. А. Х. УРТЕНОВ<sup>1)</sup>, З. М. ЛАЙПАНОВА<sup>2)</sup>, А. В. ОВСЯННИКОВА<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, 350040, г. Краснодар, Россия

<sup>2)</sup>Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева,  
ул. Ленина, 29, 369202, г. Карачаевск, Россия

<sup>3)</sup>Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,  
пр. Ленинградский, 49/2, 125167, г. Москва, Россия

**Аннотация.** Развиваются известные подходы к моделированию деятельности финансовых пирамид и проводится их обобщение с помощью стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Представленные модели учитывают зависимость времени существования пирамиды от начисляемой процентной ставки и роста числа клиентов, а также разные варианты ведения рекламной кампании. Приводятся полученные формулы и результаты соответствующих экспериментов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; финансовая пирамида; схема Понци; стохастические дифференциальные уравнения; процессы Ито; численная схема Рунге – Кутты.

---

#### Образец цитирования:

Кесиян ГА, Коваленко АВ, Уртенов МАХ, Лайпанова ЗМ, Овсянникова АВ. Математические модели финансовых пирамид, учитывающие стохастическую природу принятия решений. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;2:27–39. EDN: OGJSND

#### For citation:

Kesiyan GA, Kovalenko AV, Urtenov MAKh, Laipanova ZM, Ovsyannikova AV. Mathematical models of Ponzi schemes that consider the stochastic nature of decision-making. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;2:27–39. Russian. EDN: OGJSND

---

Сведения об авторах см. на с. 39

Information about the authors see p. 39

---



## MATHEMATICAL MODELS OF PONZI SCHEMES THAT CONSIDER THE STOCHASTIC NATURE OF DECISION-MAKING

G. A. KESIYAN<sup>a</sup>, A. V. KOVALENKO<sup>a</sup>,  
M. A. Kh. URTENOV<sup>a</sup>, Z. M. LAIPANOVA<sup>b</sup>, A. V. OVSYANNIKOVA<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Kuban State University, 149 Stavropolskaja Street, Krasnodar 350040, Russia

<sup>b</sup>Karachay-Cherkessian State University named after U. D. Aliev, 29 Lenina Street, Karachaevsk 369202, Russia

<sup>c</sup>Financial University under the Government of the Russian Federation,  
49/2 Leningradskij Avenue, Moscow 125167, Russia

Corresponding author: A. V. Ovsyannikova (anna\_ovsyannikov@bk.ru)

**Abstract.** In this paper, we further develop well-known approaches to modelling the functioning of Ponzi schemes and generalise them using stochastic differential equations in the Ito form. The applied models take into account the dependence of the scheme's existence time on the accrued interest rate and the growth of the number of clients, as well as different variants of the advertising campaign. The obtained formulas and results of the corresponding experiments are given.

**Keywords:** mathematical modelling; financial pyramid; Ponzi scheme; stochastic differential equations; Ito processes; numerical Runge – Kutta scheme.

### Введение

Исследованию деятельности финансовых пирамид посвящено множество работ. При этом существует несколько подходов к математическому моделированию деятельности финансовых пирамид: подход «экономически рациональный субъект», игровой подход и подход Дубовского. Кроме того, одни модели выражаются детерминированными уравнениями, а другие – стохастическими.

В работах [1–3] предложены дискретные и непрерывные детерминированные модели, лишенные недостатков модели Дубовского [4; 5], в которой отсутствовал учет таких затрат, как затраты на рекламу.

В статье [6] для описания схемы Понци используется линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Модель основана на обещанной (нереалистичной) процентной ставке, фактической (реализованной) номинальной процентной ставке, скорости накопления новых депозитов и скорости снятия средств. Обнаружение схемы Понци изучают и современные авторы (см., например, [7–9]).

Далее рассмотрим работы, учитывающие случайность.

Вероятностная модель финансовой пирамиды, описанная в статье [10], демонстрирует, что потенциальные выгоды от инвестиций искажаются учредителями. Основные последствия заключаются в том, что у подавляющего большинства участников есть менее чем десятипроцентный шанс окупить свои первоначальные инвестиции, когда достигается небольшая прибыль, как только они нанимают трех человек, и что в среднем половина участников больше никого не наймут и потеряют все свои деньги.

В работе [11] финансовые пирамиды моделируются как стохастическая игра при неполной информации между фирмой Понци – предполагаемым строителем пирамиды – и группой разнородных индивидуальных инвесторов. Показано, что, хотя равновесные стратегии, включающие индивидуальное решение инвестировать, могут существовать в сценических играх, во всей динамической игре нет равновесия, кроме тривиального, в которое никто не инвестирует, и, следовательно, пирамида не растет. Таким образом, индивидуальные решения инвестировать объясняются либо наивной верой в честность фирмы, либо неадекватными параметрами задачи динамической оптимизации.

В статье [12] авторы предлагают математическую модель процессов притока и оттока капитала в структуре финансовой пирамиды, учитывающую возможность привлечения новых клиентов с помощью рекламы и сарафанного радио. Результатами являются окончательные распределения притока и оттока капитала, а также графическое представление прибыли финансовой пирамиды в каждый момент времени.

### Стохастическое моделирование прибыли финансовых пирамид

В данной работе предлагаются стохастические модели, содержащие преимущества непрерывных моделей и учитывающие как детерминированные, так и случайные факторы [13].

**Общая модель.** Общая формула в непрерывном детерминированном случае в текущий момент времени  $t$  имеет вид

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $S(t)^{\text{det}}$  – прибыль финансовой компании в текущий момент времени  $t$ ;  $S_0 = S(0)$ ;  $m$  – фиксированная сумма вклада (предполагаем, что используется один тип вклада);  $N_0 = N(0)$ ;  $N(t)$  – количество клиентов в текущий момент времени  $t$ ;  $mN(t)$  – денежные поступления от клиентов;  $\alpha(t)$  – расходы на рекламу в текущий момент времени  $t$ ;  $\beta$  – процент по вкладу, который начисляется ежемесячно (предполагаем месяц в качестве базового периода);  $\beta m \int_0^t N(\tau) d\tau$  – выплата дивидендов клиентам.

Уравнение (1) в дифференциальной форме записывается следующим образом:

$$\frac{dS}{dt} = m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t). \quad (2)$$

Учтем правую часть уравнения (2) как детерминированный коэффициент сноса  $a(S, t)$  общего процесса Ито

$$dS = a(S, t) dt + b(S, t) \delta W,$$

где  $\delta W$  – бесконечно малый винеровский шум. Получим общую формулу для процесса Ито, описывающего прибыль финансовых пирамид:

$$dS = \left( m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) dt + b(S, t) \delta W. \quad (3)$$

Уравнение (3) в интегральной форме записывается как

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + \int_0^t b(S(\tau), \tau) \delta W_\tau.$$

Если коэффициент волатильности  $b(S, t)$  зависит только от времени, т. е.  $b(S, t) = b(t)$ , то имеем точное решение в неявной форме:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + \sqrt{\int_0^t b^2(\tau) d\tau} \cdot \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

**Характеристики процесса.** Среднее значение процесса (3) можно получить из следующего динамического уравнения для средних значений:

$$\langle \dot{S} \rangle = \langle a(S, t) \rangle.$$

Так как  $a(S, t)$  не зависит от  $S$ , то среднее значение процесса  $S$  при любом коэффициенте волатильности  $b(S, t)$  совпадает с детерминированным уравнением (1):

$$\langle \dot{S} \rangle = \left\langle m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right\rangle,$$

$$\langle \dot{S} \rangle = m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t),$$

$$\langle S \rangle = m \int_0^t \frac{dN}{dt} d\tau - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + C_1,$$

$$\langle S \rangle = mN(t) - mN_0 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + S_0.$$

Далее, полагая, что  $C_1 = S_0$ , получаем решение, аналогичное детерминированному:

$$\langle S \rangle = mN(t) - mN_0 - \int_0^t \alpha(\tau) d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau) d\tau + S_0. \quad (4)$$

Волатильность процесса получим из следующего соотношения:

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2} = \sqrt{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2}. \quad (5)$$

Чтобы вычислить выражение (5), требуется найти  $\langle S^2 \rangle$ , для этого можно воспользоваться леммой Ито

$$\frac{d\langle F(S, t) \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} - \alpha(S, t) \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{b^2(S, t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right\rangle.$$

Подставим  $F(S, t) = S^2$ :

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}^2 \rangle &= \left\langle 0 - 2S \left( m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) + 2 \frac{b^2(S, t)}{2} \right\rangle, \\ \langle \dot{S}^2 \rangle &= \left\langle 2S \left( m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) + b^2(S, t) \right\rangle, \\ \langle \dot{S}^2 \rangle &= 2 \left( m \frac{dN}{dt} - \alpha(t) - \beta m N(t) \right) \langle S \rangle + \langle b^2(S, t) \rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $b^2(S, t)$  – диффузия.

Для последующего интегрирования уравнения (6) надо учесть явный вид  $b(S, t)$  и подставить  $\langle S \rangle$  из формулы (4).

**Методы анализа.** Один из распространенных подходов при исследовании процессов Ито заключается в анализе плотности вероятности, которая удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка. Однако данный подход содержит ряд недостатков: уравнение Фоккера – Планка сложно решить (кроме линейного и градиентного случаев), плотность не дает информации о корреляциях во времени, и отдельные траектории могут сильно отклоняться от среднего процесса. По этой причине в данной работе делается упор на коридор волатильности и траекторное описание процессов, моделирующих деятельность финансовых пирамид.

Под коридором волатильности будем понимать область внутри верхней ( $\sigma_S^+$ ) и нижней ( $\sigma_S^-$ ) границ коридора, которые определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_S^+ &= \langle S \rangle + \sigma_S, \\ \sigma_S^- &= \langle S \rangle - \sigma_S. \end{aligned}$$

**Определение параметров моделей.** Для определения параметров моделей и проведения экспериментов в качестве примера финансовой пирамиды будем использовать МММ-2012. Основной принцип в МММ-2012 гласит: чем больше срок вложения, тем больше доходность.

Указанная система предоставляет вклады трех типов.

1. Основной вклад (процент по вкладу составляет 30 % в месяц, снятие денежных средств можно осуществить в любой момент).

2. Простой депозит (может быть на 3 мес. (40 %), 6 мес. (50 %) и 12 мес. (60 %), позволяет получить минимальные проценты (30 % в месяц) даже при досрочном снятии).

3. Сверхдоходный депозит (также может быть на 3 мес. (55 %), 6 мес. (65 %) и 12 мес. (75 %), как видно, имеет более высокие проценты по вкладу, чем простой депозит, но при досрочном снятии участник теряет все накопленные проценты и получает только вложенную сумму).

Участник МММ-2012 проходил регистрацию на специальном сайте, за ним закреплялись десятник (прямой руководитель) и сотник (руководитель руководителя). Все деньги конвертировались в виртуальную валюту МАВРО. Операции с МАВРО учитывались в личном кабинете, а также согласовывались с десятником. Курсы менялись по вторникам и четвергам в 00:00 по Гринвичу (04:00 по Москве).

Таким образом, для моделирования в настоящей работе будем использовать основной вклад (30 % в месяц) МММ-2012, т. е. параметр  $\beta = 0,3$  (30 %). Период моделирования выберем исходя из продолжительности деятельности МММ-2012: с июня 2012 по январь 2013 г. (8 мес.). Предположим, что участники снимают накопленные проценты в конце каждого месяца. Остальные параметры определяем исходя из здравого смысла и специальной литературы.

Курс покупки МАВРО-RUR для вкладов под 30 % на 31.05.2012 г. составлял 1,0 руб. С учетом этого, чтобы не производить конвертацию валют и упростить вычисления, прибыль финансовой пирамиды будем считать в валюте МАВРО-RUR.

По данным Росстата, среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников по полному кругу организаций в 2012 г. составила 26 629 руб. На основании этого будем предполагать, что средняя сумма вклада ( $m$ ) в МММ-2012 достигала приблизительно 30 000 руб., т. е. была соразмерна одной накопленной заработной плате.

**Примеры моделей и эксперименты.** Рассмотрим модель с постоянным количеством клиентов и постоянными расходами на рекламу.

Пусть число клиентов не меняется:

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad N(t) = N^* = \text{const.}$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение (1) примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 - mN^* + mN^* - \int_0^t R_0 d\tau - \beta m \int_0^t N^* d\tau,$$

$$S(t)^{\text{det}} = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью  $b(S, t) = \sigma$  получаем

$$dS = (-R_0 - \beta mN^*)dt + \sigma dW. \quad (7)$$

Процесс (7) представляет собой винеровское блуждание со сносом.

Заметим сразу, что из-за отрицательного коэффициента сноса процесс (7) будет убывать, хотя старт процесса может находиться в положительной области (зависит от  $S_0$ ).

Точное решение уравнения (7) имеет вид

$$S(t) = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (8)$$

Среднее значение процесса (7) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = S_0 + (-R_0 - \beta mN^*)t.$$

Дисперсия процесса (7) определяется как

$$\sigma_S^2(t) = \int_0^t \sigma^2(\tau) d\tau = \sigma^2 t.$$

Тогда волатильность процесса (7) равна

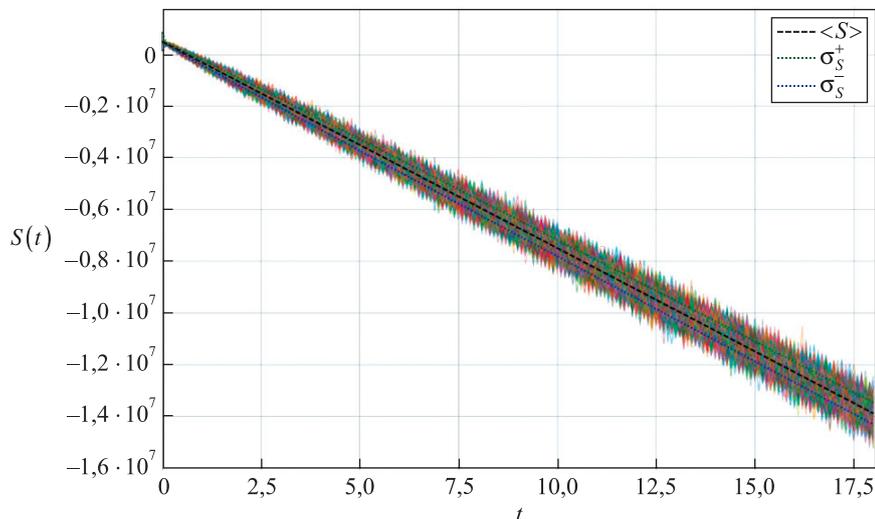
$$\sigma_S = \sigma\sqrt{t}.$$

Для реализации формул и проведения экспериментов была разработана программа «Анализ стохастических финансовых пирамид (*StochasticFPyramidsBuilder*)» на языке Python.

Для моделирования процесса (7) заданы следующие исходные данные: сумма вклада  $m = 10^5$  МАВРО, процент по вкладу  $\beta = 0,3$  (30 %), количество участников до начала деятельности финансовой пирамиды  $N_0 = 10$  человек (организаторы распространяли свои финансовые инструменты среди знакомых или «нужных» людей), постоянные расходы на рекламу  $R_0 = 5 \cdot 10^5$  МАВРО, интенсивность шума того же порядка, что и коэффициент сноса, т. е.  $\sigma = 10^5$ , сумма вкладов на начало деятельности финансовой пирамиды, определяемая как денежные поступления от первых клиентов (близких, знакомых, «нужных» людей) минус сумма, потраченная финансовой пирамидой на рекламную кампанию до начала деятельности, т. е.  $S_0 = mN_0 - R_0$ , начальный момент времени моделирования процесса  $t_0 = 0$ , конечный момент времени моделирования процесса  $t_1 = 18$  мес. (1,5 года), шаг моделирования  $h = 0,1$  (достаточен, так как используем точное решение (8)). Для моделирования описанных ниже процессов задаются такие же начальные параметры, если не оговорено иное.

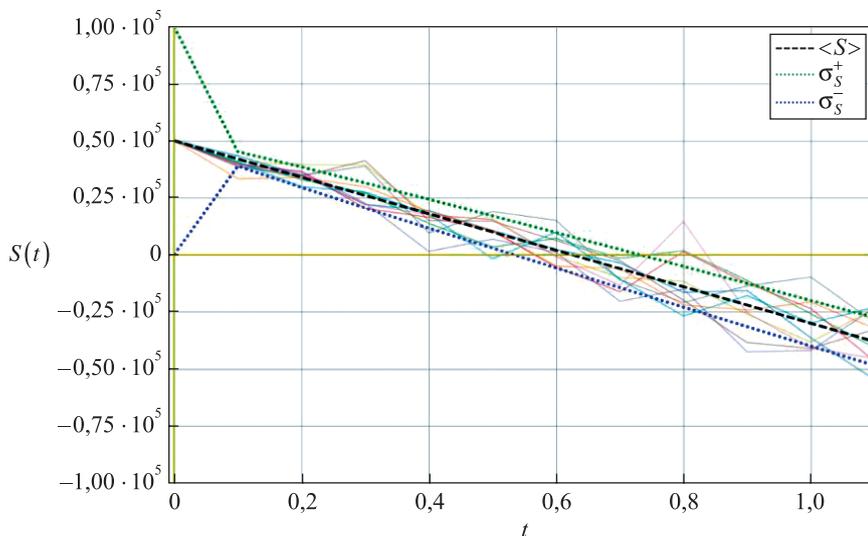
Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий для точного решения (8) в случае постоянного количества клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 1.

Как видно из рис. 2, который аналогичен рис. 1 (но увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат), верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 до  $t = 0,8$ . То есть банкротство наступит раньше, чем за 1 мес.



*Рис. 1.* Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном количестве клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

*Fig. 1.* Profit dynamics of a financial pyramid at constant number of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)



*Рис. 2.* Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном количестве клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение) (увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат)

*Fig. 2.* Profit dynamics of a financial pyramid at constant number of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution) (the scale is enlarged and the display intervals on the abscissa and ordinate axes are limited)

Далее рассмотрим модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу. Пусть прирост клиентов определяется формулами

$$\frac{dN}{dt} = q, \quad N(t) = N^* = N_0 + qt.$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью  $b(S, t) = \sigma$  получаем

$$dS(t) = \left(-\beta mqt + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W. \quad (9)$$

Точное решение уравнения (9) при  $t_0 = 0$  имеет вид

$$S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0 + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (10)$$

Среднее значение процесса (9) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

Дисперсия и волатильность процесса (9) определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_S^2(t) &= \sigma^2 t, \\ \sigma_S &= \sigma\sqrt{t}. \end{aligned}$$

Для моделирования процесса (9) зададим следующие исходные данные: прирост участников  $q = 10^2$  человек, интенсивность шума того же порядка, что и коэффициент сноса, т. е.  $\sigma = 10^7$  ( $0,3 \cdot 10^5 \cdot 10^2 t$ ). Остальные параметры не изменились.

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий для точного решения (10) в случае постоянного прироста клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 3.

Как видно из рис. 4, который аналогичен рис. 3 (но увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат), верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 до  $t = 9$ . То есть в случае постоянного прироста клиентов банкротство наступит за 9 мес.

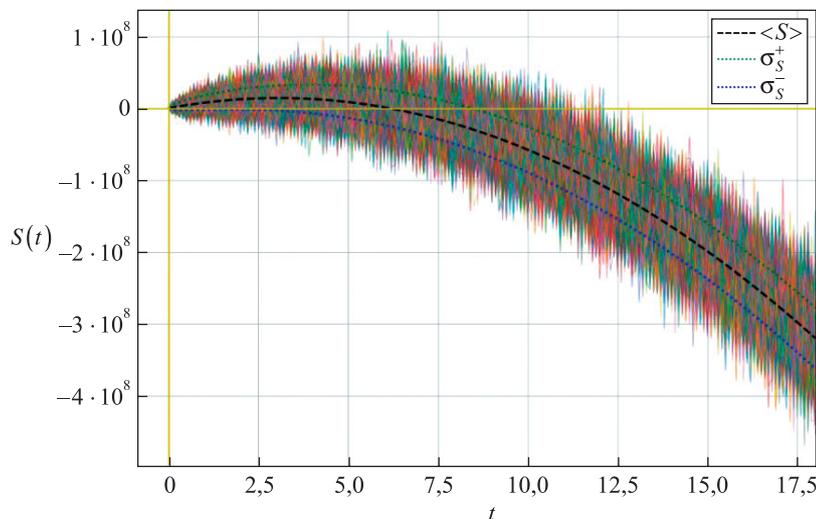


Рис. 3. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

Fig. 3. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)

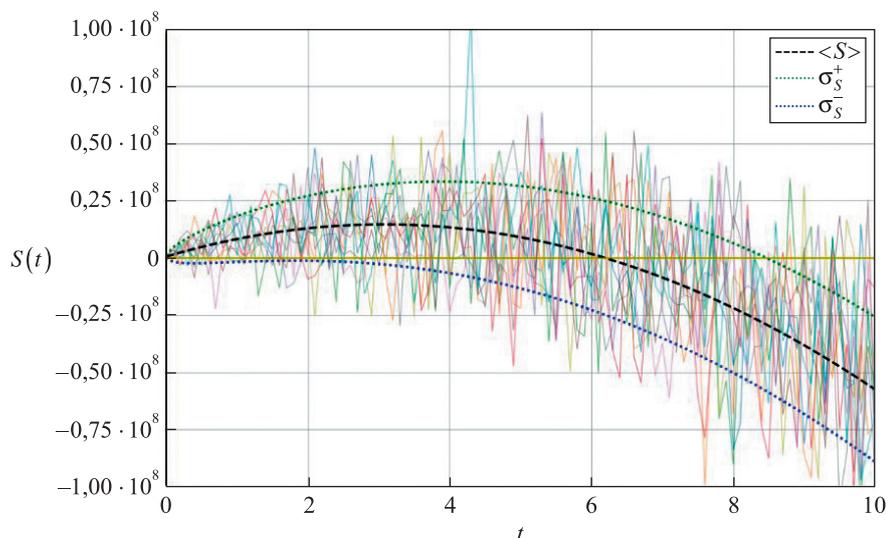


Рис. 4. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение) (увеличен масштаб и ограничены интервалы отображения по осям абсцисс и ординат)

Fig. 4. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution) (the scale is enlarged and the display intervals on the abscissa and ordinate axes are limited)

Теперь рассмотрим модель с линейным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу. Пусть системе удастся удержать линейный приток клиентов. В этом случае прирост клиентов определяется формулами

$$\frac{dN}{dt} = q_0 + qt, \quad N(t) = N_0 + q_0t + \frac{1}{2}qt^2.$$

Обозначим расходы на рекламу:

$$\alpha(t) = \text{const} = R_0.$$

Тогда детерминированное уравнение примет вид

$$S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0.$$

В форме процесса Ито с постоянной волатильностью  $b(S, t) = \sigma$  получаем

$$dS(t) = \left(-\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m(q - \beta q_0)t + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W. \quad (11)$$

Точное решение уравнения (11) при  $t_0 = 0$  имеет вид

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0 + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon. \quad (12)$$

Среднее значение процесса (11) рассчитывается по формуле

$$\langle S \rangle = S(t)^{\text{det}} = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0. \quad (13)$$

Дисперсия и волатильность процесса (11) определяются как

$$\sigma_S^2(t) = \sigma^2 t,$$

$$\sigma_S = \sigma\sqrt{t}.$$

Для моделирования процесса (11) параметры  $m$ ,  $\beta$ ,  $N_0$ ,  $R_0$ ,  $t_0$  и  $h$  не изменились. Конечный момент времени моделирования  $t_1 = 9$  мес. Для расчета параметров  $q_0$  и  $q$  составим систему из двух уравнений. Для этого подставим в уравнение (13) предполагаемую прибыль 1 млрд руб. через 4 мес., т. е.  $S^{\det}(t = 4, q, q_0) = 10^9$ , и прибыль из соображения банкротства через 8 мес., т. е.  $S^{\det}(t = 8, q, q_0) = 0$ . Все остальные параметры уже заданы. В результате решения системы получим коэффициенты  $q = \frac{200\,245}{104}$ ,  $q_0 = \frac{899\,185}{312}$ . Интенсивность шума имеет тот же порядок, что и коэффициент сноса, т. е.  $\sigma = 10^8$ .

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 10 траекторий для точного решения (12) в случае линейного прироста клиентов, постоянных расходов на рекламу и постоянной волатильности представлены на рис. 5.

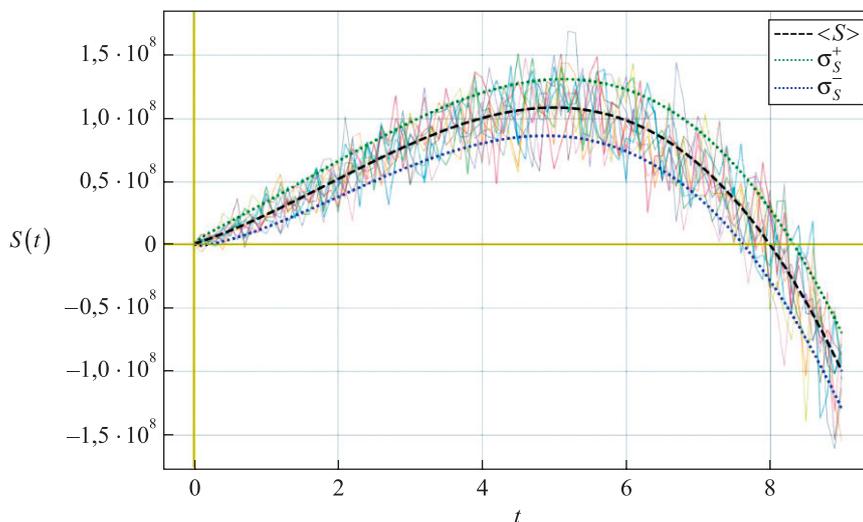


Рис. 5. Динамика прибыли финансовой пирамиды при линейном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и постоянной волатильности (точное решение)

Fig. 5. Profit dynamics of a financial pyramid with a linear growth of clients, constant advertising costs and constant volatility (exact solution)

Для соразмерности шума и исследуемого процесса удобно задать линейную волатильность  $b(S, t) = \sigma S$ . Тогда вместо модели (9) получим

$$dS(t) = \left( -\beta m q t + m \left( q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m} \right) \right) dt + \sigma S \delta W. \quad (14)$$

Можно предположить, что случайные факторы, такие как заинтересованность потенциальных участников и доверие настоящих участников, линейно зависят от прибыли и, например, составляют 30 % от нее, т. е.  $\sigma = 0,3$ . Для проведения экспериментов в разработанной программе *StochasticFPyramidsBuilder* реализована схема Рунге – Кутты 4-го порядка численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Результаты моделирования 1000 траекторий процесса (14) с параметром  $\sigma = 0,3$  представлены на рис. 6.

Таким образом, если участники будут принимать случайные решения с учетом прибыли финансовой пирамиды (что вполне вероятно), то, исходя из рис. 6, можно сделать следующие выводы:

- в самом начале деятельности финансовой пирамиды влияние случайных факторов минимальное (в отличие от предыдущих моделей (7), (9) и (11));
- отдельные траектории прибыли могут существенно отличаться от большинства (выше максимальная прибыль);
- верхняя граница коридора волатильности процесса (9) достигает значения 0 после  $t = 8$ , в то время как в модели (14) верхняя граница коридора волатильности достигает значения 0 вблизи  $t = 7$ .

Приведенные выводы говорят о том, что случайные факторы могут существенно влиять на процесс, так как изменилась структура модели и детерминированная часть стала зависеть от волатильности.

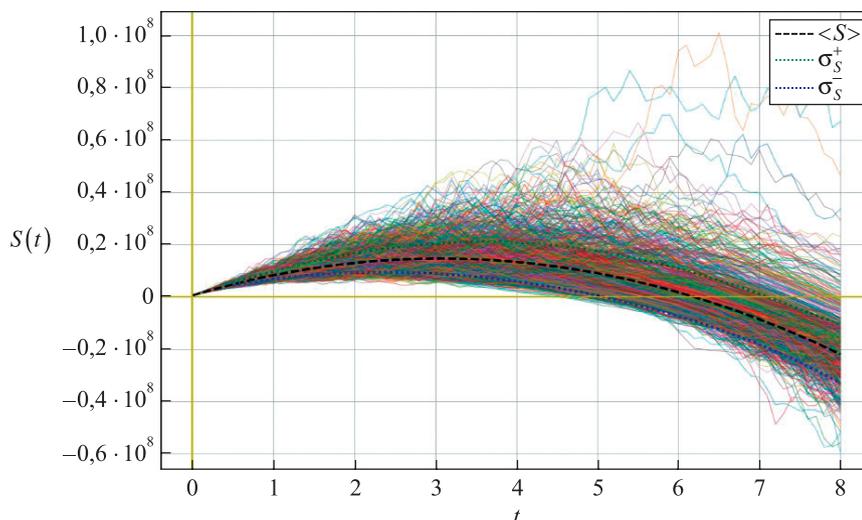


Рис. 6. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, постоянных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 6. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, constant advertising costs and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4<sup>th</sup> order)

Далее выведем СДУ для модели с постоянным приростом клиентов, процентными расходами на рекламу и линейной волатильностью.

В отличие от предыдущей модели в данной модели расходы на рекламу задаются формулой  $a(t) = gm \frac{dN}{dt}$ , где  $g$  ( $0 < g < 1$ ) – процент, который определяет сумму расходов на рекламу от вновь поступивших средств. Тогда  $S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m((1-g)q - \beta N_0)t + S_0$ .

В форме процесса Ито с линейным шумом получаем

$$dS(t) = \left(-\beta mqt + m((1-g)q - \beta N_0)\right)dt + \sigma S \delta W. \quad (15)$$

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий процесса (15) с процентом на рекламу от вновь поступивших средств  $g = 0,2$  представлены на рис. 7.

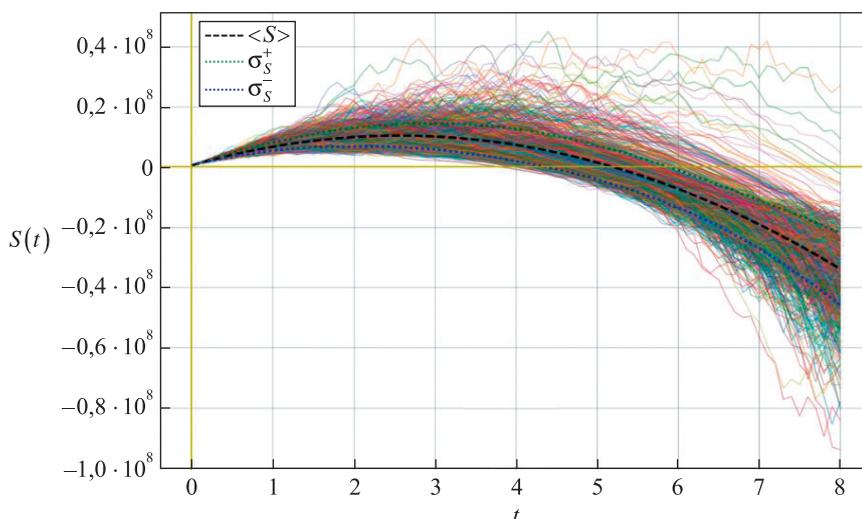


Рис. 7. Динамика прибыли финансовой пирамиды при постоянном приросте клиентов, процентных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 7. Profit dynamics of a financial pyramid at constant growth of clients, interest expenses on advertising and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4<sup>th</sup> order)

Из рис. 7 можно сделать вывод о том, что процентные затраты на рекламу приводят к более быстрому краху пирамиды. Однако в данной модели не учтено, что, возможно, при такой рекламной кампании удастся удержать не постоянный, а линейный прирост клиентов.

Следовательно, в случае линейного прироста клиентов

$$\frac{dN}{dt} = q_0 + qt, \quad N(t) = N_0 + q_0t + \frac{1}{2}qt^2.$$

После приведения подобных имеем

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m((1-g)q - \beta q_0)t^2 + m((1-g)q - \beta N_0)t + S_0.$$

В форме СДУ получаем процесс для линейного прироста клиентов и процентных расходов на рекламу:

$$dS(t) = \left( -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m((1-g)q - \beta q_0)t + m((1-g)q - \beta N_0) \right) dt + \sigma S \delta W. \quad (16)$$

Результаты моделирования в программе *StochasticFPyramidsBuilder* 1000 траекторий процесса (16) с линейным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу при  $q_0 = 1$  представлены на рис. 8.

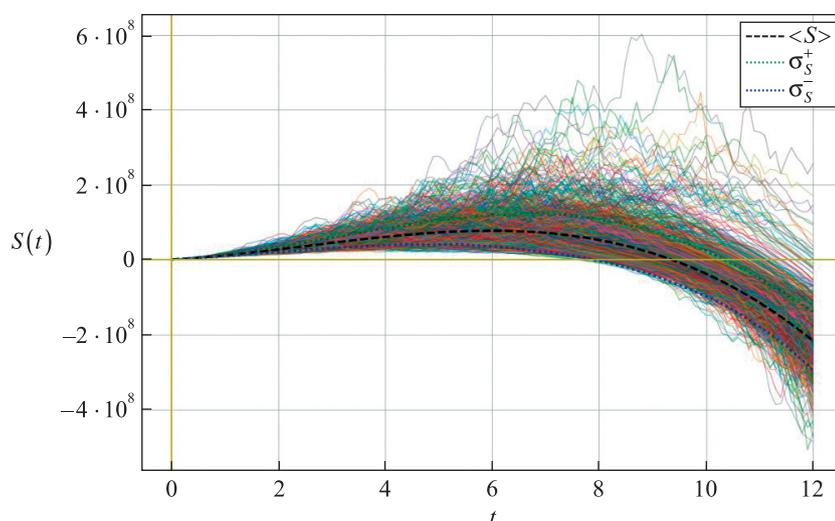


Рис. 8. Динамика прибыли финансовой пирамиды при линейном приросте клиентов, процентных расходах на рекламу и линейной волатильности (схема Рунге – Кутты 4-го порядка)

Fig. 8. Profit dynamics of a financial pyramid under linear growth of clients, interest expenses on advertising and linear volatility (Runge – Kutta scheme of 4<sup>th</sup> order)

Как показывает рис. 8, процентные затраты на рекламу оправдываются (максимальная прибыль выше и продолжительность функционирования финансовой пирамиды дольше), если при такой рекламной кампании удастся удержать линейный прирост клиентов.

### Заключение

Таким образом, создан программный продукт, который позволяет моделировать прибыль финансовой пирамиды с использованием СДУ в форме процессов Ито с помощью точного решения и схемы Рунге – Кутты 4-го порядка численного решения СДУ.

В программе реализованы следующие модели с постоянной волатильностью:

- модель с постоянным количеством клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с линейным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу.

Также в программе реализованы модели с линейной волатильностью:

- модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу;
- модель с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу;
- модель с линейным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу.

Результаты анализа траекторий прибыли финансовой пирамиды позволяют сделать следующие выводы:

- случайные факторы могут существенно влиять на детерминированную часть формирования прибыли;
- отдельные траектории таких моделей могут существенно отличаться от большинства.

### Библиографические ссылки

1. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 1, Основные понятия. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf>.
2. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 2, Дискретные модели. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf>.
3. Коваленко АВ, Уртенев МХ, Чагаров РХ. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамиды. Часть 3, Непрерывные модели. *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета* [Электронный ресурс]. 2012 [процитировано 17 июля 2023 г.];8. Доступно по: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>.
4. Дубовский СВ. *Прогнозирование инфляции и обменного курса рубля в российской нестационарной экономике*. Москва: УРСС; 2001. 40 с. (Труды Института системного анализа РАН).
5. Дубовский СВ. Обменный курс рубля как результат денежной эмиссии, внешней торговли и блуждающих финансовых потоков. *Экономика и математические методы*. 2002;38(2):84–96.
6. Artzrouni M. The mathematics of Ponzi schemes. *Mathematical Social Sciences*. 2009;58(2):190–201. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2009.05.003.
7. Huynh PD, Dau SH, Li X, Luong P, Viterbo E. Improving robustness and accuracy of Ponzi scheme detection on Ethereum using time-dependent features. arXiv:2308.16391 [Preprint]. 2023 [cited 2023 August 31]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2308.16391>.
8. Fan S, Fu S, Xu H, Cheng X. AI-SPSD: anti-leakage smart Ponzi schemes detection in blockchain. *Information Processing & Management*. 2021;58(4):102587. DOI: 10.1016/j.ipm.2021.102587.
9. van de Voort J, Coneys S. *Classifying bitcoin Ponzi schemes with machine learning* [Internet]. Shanghai: New York University Shanghai; 2018 December 1 [cited 2023 July 17]. [about 8 p.]. Available from: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.13091.58405>.
10. Gastwirth JL. A probability model of a pyramid scheme. *The American Statistician*. 1977;31(2):79–82. DOI: 10.1080/00031305.1977.10479200.
11. Belianin A, Issoupova O. *Financial pyramids in transitional economies: a game-theoretic approach*. Moscow: EERC; 2001. 70 p. (Education and research consortium working paper series; number 2K/10).
12. Новиков АК, Осадчий АА. *Математическое моделирование процессов притока и оттока капитала в структуре финансовой пирамиды и реализация модели на ЭВМ* [Интернет]. Москва: Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; 7 января 2022 г. [процитировано 17 июля 2023 г.]. 41 с. Доступно по: [https://www.researchgate.net/publication/358771924\\_Matematicheskoe\\_modelirovanie\\_processov\\_pritoka\\_i\\_ottoka\\_kapitala\\_v\\_strukture\\_finansovoj\\_piramidy\\_i\\_realizacia\\_modeli\\_na\\_EVM](https://www.researchgate.net/publication/358771924_Matematicheskoe_modelirovanie_processov_pritoka_i_ottoka_kapitala_v_strukture_finansovoj_piramidy_i_realizacia_modeli_na_EVM).
13. Кесиян ГА, Уртенев МХ, Коваленко АВ. *Математические модели ценообразования на российском рынке ценных бумаг*. Краснодар: Кубанский государственный университет; 2014. 158 с.

### References

1. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 1, Definitions. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf>. Russian.
2. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 2, Discrete models. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf>. Russian.
3. Kovalenko AV, Urtenov MKh, Chagarov RH. Mathematical modeling of financial pyramid scheme. Part 3, Continuous models. *Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University* [Internet]. 2012 [cited 2023 July 17];8. Available from: <http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf>. Russian.
4. Dubovsky SV. *Prognozirovanie inflyatsii i obmennogo kursa rublya v rossiiskoi nestatsionarnoi ekonomike* [Forecasting inflation and the ruble exchange rate in the Russian non-stationary economy]. Moscow: URSS; 2001. 40 p. (Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN). Russian.
5. Dubovsky SV. Ruble exchange rate as a result of money issue, foreign trade and wandering financial flows. *Economics and Mathematical Methods*. 2002;38(2):84–96. Russian.
6. Artzrouni M. The mathematics of Ponzi schemes. *Mathematical Social Sciences*. 2009;58(2):190–201. DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2009.05.003.
7. Huynh PD, Dau SH, Li X, Luong P, Viterbo E. Improving robustness and accuracy of Ponzi scheme detection on Ethereum using time-dependent features. arXiv:2308.16391 [Preprint]. 2023 [cited 2023 August 31]: [17 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2308.16391>.
8. Fan S, Fu S, Xu H, Cheng X. AI-SPSD: anti-leakage smart Ponzi schemes detection in blockchain. *Information Processing & Management*. 2021;58(4):102587. DOI: 10.1016/j.ipm.2021.102587.
9. van de Voort J, Coneys S. *Classifying bitcoin Ponzi schemes with machine learning* [Internet]. Shanghai: New York University Shanghai; 2018 December 1 [cited 2023 July 17]. [about 8 p.]. Available from: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.13091.58405>.

10. Gastwirth JL. A probability model of a pyramid scheme. *The American Statistician*. 1977;31(2):79–82. DOI: 10.1080/00031305.1977.10479200.
11. Belianin A, Issoupova O. *Financial pyramids in transitional economies: a game-theoretic approach*. Moscow: EERC; 2001. 70 p. (Education and research consortium working paper series; number 2K/10).
12. Novikov AK, Osadchii AA. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov pritoka i ottoka kapitala v strukture finansovoi piramidy i realizatsiya modeli na EVM* [Mathematical modelling of processes of inflow and outflow of capital in the structure of the financial pyramid and realization of the model on the computer] [Internet]. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 2022 January 7 [cited 2023 July 17]. 41 p. Available from: [https://www.researchgate.net/publication/358771924\\_Matematicheskoe\\_modelirovanie\\_processov\\_pritoka\\_i\\_otтока\\_kapitala\\_v\\_strukture\\_f finansovoj\\_piramidy\\_i\\_realizatsiya\\_modeli\\_na\\_EVM](https://www.researchgate.net/publication/358771924_Matematicheskoe_modelirovanie_processov_pritoka_i_otтока_kapitala_v_strukture_f finansovoj_piramidy_i_realizatsiya_modeli_na_EVM). Russian.
13. Kesiyan GA, Urtenov MKh, Kovalenko AV. *Matematicheskie modeli tsenoobrazovaniya na rossiiskom rynke tsennykh bumag* [Mathematical models of pricing in the Russian securities market]. Krasnodar: Kuban State University; 2014. 158 p. Russian.

Получена 02.05.2024 / исправлена 12.06.2024 / принята 12.06.2024.  
Received 02.05.2024 / revised 12.06.2024 / accepted 12.06.2024.

---

#### Авторы:

**Грант Арутович Кесиян** – старший преподаватель кафедры анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

**Анна Владимировна Коваленко** – доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

**Махамет Али Хусеевич Урtenов** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры прикладной математики факультета компьютерных технологий и прикладной математики.

**Зульфа Мисаровна Лайпанова** – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой математического анализа физико-математического факультета, исполняющий обязанности декана физико-математического факультета.

**Анна Вячеславовна Овсянникова** – кандидат педагогических наук, доцент; доцент кафедры математики факультета информационных технологий и анализа больших данных.

#### Authors:

**Grant A. Kesiyan**, senior lecturer at the department of data analysis and artificial intelligence, faculty of computer technology and applied mathematics.

[grant.kesiyan@mail.ru](mailto:grant.kesiyan@mail.ru)  
<https://orcid.org/0009-0001-1635-110X>

**Anna V. Kovalenko**, doctor of science (engineering), docent; head of the department of data analysis and artificial intelligence, faculty of computer technology and applied mathematics.

[savanna-05@mail.ru](mailto:savanna-05@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

**Makhamet Ali Kh. Urtenov**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of applied mathematics, faculty of computer technology and applied mathematics.

[urtenovmax@mail.ru](mailto:urtenovmax@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>

**Zulfa M. Laipanova**, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics, and acting dean of the faculty of physics and mathematics.

[laipanovazulfa@mail.ru](mailto:laipanovazulfa@mail.ru)  
<https://orcid.org/0000-0003-3051-6078>

**Anna V. Ovsyannikova**, PhD (pedagogics), docent; associate professor at the department of mathematics, faculty of information technology and big data analysis.

[anna\\_ovsyannikov@bk.ru](mailto:anna_ovsyannikov@bk.ru)  
<https://orcid.org/0000-0002-1716-3100>