

АНАЛИЗ МЕТОДА РАСПОЗНАВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ НА ОСНОВЕ ТОРСИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В данной работе проанализирована теория многоуровневого представления формы, основанного на геометрических инвариантах пространственных кривых [1], подтверждается ряд свойств исследуемого торсиального преобразования и приводится алгоритм распознавания пространственных кривых на основе данного преобразования.

Исследуемый метод представления формы, с вычислительной точки зрения, является точным и надежным, т.е. удовлетворяет критериям: инвариантности, однозначности, устойчивости, эффективности, локальной поддержки.

Множество точек пространственной кривой – это значения непрерывной векторнозначной функции: $\Gamma = \Gamma(u) = (x(u), y(u), z(u))$, где $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ – компоненты $\Gamma(u)$, и u – функция длины дуги s пространственной кривой. Функцию $\Gamma(u)$ или тройку функций $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ называют параметрическим представлением пространственной кривой. Здесь: при первой параметризации u совпадает с s .

Так как пространственная кривая представлена в параметрическом виде, то нам понадобятся производные от функций $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ по параметру u . Введем обозначения: первую производную от функции f обозначим через \dot{f} ; вторую производную от функции f обозначим через \ddot{f} ; третью производную от функции f обозначим через \dddot{f} .

Кручение пространственной кривой в случае произвольной параметризации рассчитывается по формуле:

$$\tau(u) = \frac{\dot{x}(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}) - \dot{y}(\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x}) + \dot{z}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})}{(\dot{y}\dot{z} - \dot{z}\dot{y})^2 + (\dot{z}\dot{x} - \dot{x}\dot{z})^2 + (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})^2}$$

Для вычисления τ при различных уровнях детализации кривой Γ применяется свертка функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ с Гауссовым ядром $g(u, \square)$ ширины \square . Использование Гауссовых ядер приводит к получению торсиального изображения пространственной кривой, обладающего свойствами монотонности и сходимости.

Свернутые функции определяют эволюционирующую кривую Γ_\square . Процесс генерации эволюционирующих кривых Γ_\square , при изменении \square от 0 до \square , называется эволюцией кривой Γ .

Пусть $F(u, \square) = f(u) \square g(u, \square)$, где \square – это оператор свертки. Известно, что

$$F^{(n)}(u, \square) = \frac{\square^n F(u, \square)}{\square u^n} = f(u) \square \frac{\square^n g(u, \square)}{\square u^n}.$$

Эти свойства свертки могут быть использованы для вычисления кручения эволюционирующих версий пространственной кривой \square .

Пусть: $X = x(u) \square g(u, \square)$, $Y = y(u) \square g(u, \square)$, $Z = z(u) \square g(u, \square)$. Тогда кручение кривой \square :

$$\square(u, \square) = \frac{\dot{X}(\ddot{Y}\ddot{Z} \square \ddot{Z}\ddot{Y}) \square \dot{Y}(\ddot{X}\ddot{Z} \square \ddot{Z}\ddot{X}) + \dot{Z}(\ddot{X}\ddot{Y} \square \ddot{Y}\ddot{X})}{(\dot{Y}\ddot{Z} \square \dot{Z}\ddot{Y})^2 + (\dot{Z}\ddot{X} \square \dot{X}\ddot{Z})^2 + (\dot{X}\ddot{Y} \square \dot{Y}\ddot{X})^2}.$$

Функция кручения устанавливает, что кривая уникальна к вращению, гомотетии и параллельному переносу [2]. Следовательно, торсиальное изображение предполагается как многомасштабное представление пространственной кривой, основанное на кручении. Для вычисления торсиального изображения пространственной кривой $\square = \square(u) = (x(u), y(u), z(u))$, эволюционирующие кривые \square вычисляются с изменением \square . Затем находятся нули кручения функций \square и отображаются на плоскости $u \square \square$, как показано на рис. 1. Наименьшее значение \square берется близкое к нулю и увеличивается до тех пор, пока число нулей кручения эволюционирующей кривой не стабилизируется на маленькое значение.

Данное преобразование является эффективным для вычисления, так как для его реализации не приходится находить производные по разностной схеме, а используется свойство свертки:

$$F^{(n)}(u, \square) = \frac{\square^n F(u, \square)}{\square u^n} = f(u) \square \frac{\square^n g(u, \square)}{\square u^n},$$

т. е. вычислительная погрешность метода определяется только машинной погрешностью. А само торсиальное изображение может храниться в виде матрицы второго ранга либо в виде статического изображения в любом формате.

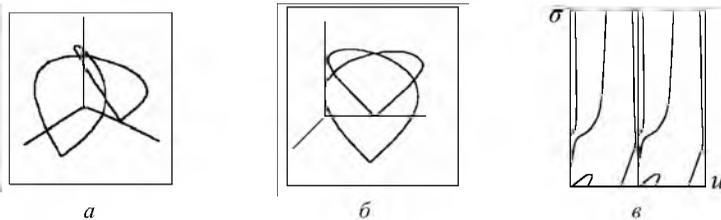


Рис. 1. Пространственная кривая при двух ракурсах (а, б) и ее торсиальное изображение (е)

Ниже приводится пример, иллюстрирующий свойство инвариантности данного преобразования к аффинным преобразованиям исходной пространственной кривой. За исходный берется контур произвольной формы (рис. 2 *а*). Далее применяется поворот на произвольный угол (рис. 2 *б*) и сравниваются полученные торсиальные изображения.

Аналогичные результаты получаются для гомотетии и параллельного переноса. Следовательно, можно сделать вывод об инвариантности торсиального изображения к аффинным преобразованиям.

В ходе исследований точка отсчета на кривых выбиралась при одном и том же значении параметра u . Это делалось для того, чтобы торсиальное изображение не смещалось вдоль горизонтальной координаты.

Эволюция не изменяет физической интерпретации пространственной кривой как контура, лежащего на поверхности трехмерного объекта, т. е. замкнутая пространственная кривая остается замкнутой в процессе эволюции, а непрерывная – непрерывной.

Для анализа этого свойства рассмотрим простой контур в форме прямоугольника (рис. 3):

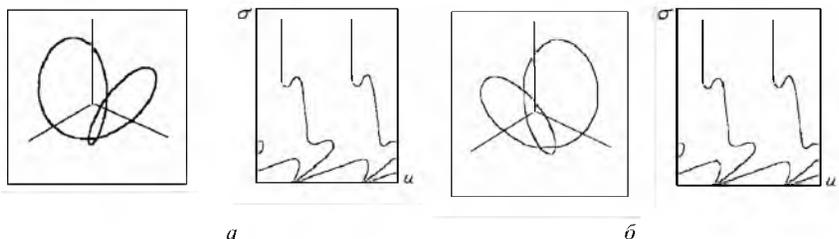


Рис. 2. Инвариантность к аффинным преобразованиям.
а – исходный контур и его торсиальное изображение;
б – поворот исходного контура и его торсиальное изображение

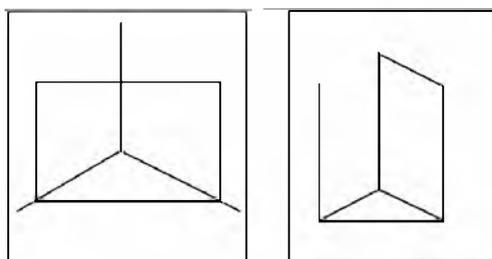


Рис. 3. Два вида пространственной кривой,

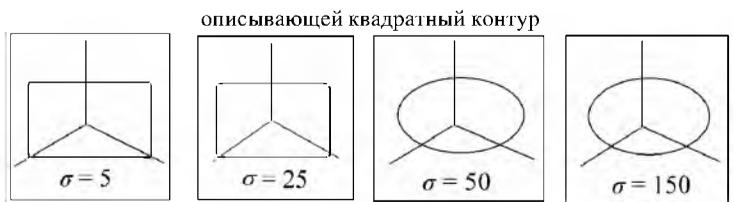


Рис. 4. Квадратный контур в процессе эволюции

На следующем рисунке (рис. 4) показан данный контур в процессе эволюции. Из рисунка видно, что и при небольших, и при больших значениях ядра свертки \square , пространственная кривая, описывающая квадрат, остается непрерывной и замкнутой.

Свойство однозначности торсиального преобразования подтверждается анализом торсиальных изображений пространственных контуров, представленных на рис. 1, 3.

Из исследований торсиальных изображений в высших масштабах видно, что каждая замкнутая кривая в процессе эволюции достигает состояния, в котором новые нули кручения не возникают, и пространственная кривая остается в этом состоянии при дальнейшем увеличении \square .

Основополагающая идея алгоритма торсиального соответствия состоит в нахождении грубого соответствия, используя структурные детали рассматриваемых пространственных кривых (исследуемой и эталонной). Такое соответствие может быть быстро и достоверно найдено, так как в верхних масштабах торсиальных изображений относительно не много деталей для сопоставления. Для нахождения соответствия используются экстремумы торсиальных контуров. Причина использования экстремумов в качестве деталей соответствия в том, что они являются самыми существенными точками торсиальных контуров: координаты экстремумов в торсиальном изображении содержат информацию и о локализации, и о масштабе соответствующего контура. Более того, экстремумы – изолированные точечные свойства, и, следовательно, решение проблемы детального соответствия становится довольно простым. Это особенно хорошо видно в высоких масштабах торсиального изображения, где экстремумы немногочисленны.

Алгоритм нахождения торсиального соответствия:

1. Для каждого торсиального изображения выполнить следующее:

\square просмотреть торсиальное изображение, начиная с верхних масштабов, выбирая для соответствия и локализуя экстремумы торсиальных контуров. Записать координаты и тип (максимум или минимум) каждого экстремума в характеристический лист;

- отсортировать по масштабной координате экстремумы;
- пронормировать координаты так, чтобы горизонтальная координата u изменялась в пределах $[0, 1]$.

2. Создать число узлов, в соответствие с возможным сопоставлением экстремумов наивысшего масштаба исследуемого торсиального изображения и каждого из экстремумов (того же типа) эталонного торсиального изображения. Если обе рассматриваемые пространственные кривые замкнуты, то каждый экстремум, сопоставляемый в узле соответствия, должен иметь значение координаты \square близкое к максимальному \square (\square наивысшего экстремума) в своем торсиальном изображении. В таком случае исключить все узлы, которые не удовлетворяют этому ограничению. Инициализировать цену каждого узла нулем.

3. Для каждого узла, созданного на предыдущем шаге, вычислить два торсиальных преобразующих параметра (\square для сдвига и \square для масштаба), используя следующие уравнения:

$$\square_m = \square \square; u_m = \square u + \square,$$

где (u, \square) – координаты экстремума в исследуемом изображении и (u_m, \square_m) – координаты экстремума в эталонном изображении.

4. Создать два листа для каждого узла, созданного на втором шаге. Первый будет содержать неэталонные экстремумы, согласующиеся в пределах данного узла, а второй – соответствующие эталонные экстремумы, согласующиеся в пределах данного узла. Инициализировать первый лист каждого узла содержащимся в нем неэталонным экстремумом наивысшего масштаба. Инициализировать второй лист каждого узла содержащимся в нем соответствующим эталонным экстремумом, определенным на втором шаге. Расширить каждый узел, созданный на втором шаге, используя процедуру, описываемую на следующем шаге.

5. Для того чтобы расширить узел, нужно, используя первый лист, выбирать неэталонные экстремумы наивысшего масштаба, несогласованные в пределах данного узла, и применить торсиальные преобразующие параметры этого узла, вычисленные на третьем шаге, для отображения этих экстремумов на эталонное торсиальное изображение. Если все неэталонные экстремумы уже были согласованы, то выбирать нулевой (по масштабной координате) экстремум в том же месте расположения любого несогласованного эталонного экстремума. Локализовать ближайший эталонный экстремум того же типа, который несогласован в пределах этого узла, для этого используем второй лист, и поставить эти два экстремума в соответствие. Если нельзя найти ни одного такого эталонного экстремума, то поставить в соответствие данному неэталонному

экстремуму нулевой экстремум в том же месте расположения. Цена соответствия определяется как евклидово расстояние в эталонном торсиальном изображении между этими двумя экстремумами (рассчитанным и локализованным). Прибавить полученную цену соответствия к цене узла.

6. Выбрать узел с наименьшим значением цены. Если не осталось ни одного эталонного или неэталонного экстремума, не согласованного в пределах этого узла, то вернуть этот узел, как узел с наименьшим значением цены. В противном случае, вернуться на предыдущий шаг и расширить узел с наименьшей ценой.

Когда наилучшее торсиальное соответствие было определено, можно получить множество точек на каждой из двух пространственных кривых для того, чтобы вычислить аппроксимацию для параметров преобразования, поскольку соответствие между дуговыми значениями на двух пространственных кривых уже известны. Метод итераций так же, как и аналитическое решение, использующее соответствие точек, были разработаны для решения этой проблемы. В этом разделе описывается простой, эффективный, устойчивый и общий метод, который избегает громоздкости аналитического решения и вычислительных затрат итерационного метода. Этот метод применим к преобразованиям 3-D в 3-D так же, как и к 3-D в 2-D. Пусть $X = (x_j, y_j, z_j)$ – это множество из \square точек на эталонной кривой. И пусть $\square = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ – это множество соответствующих точек на исследуемой кривой.

Параметры преобразования, подлежащие вычислению:

$$x_j = a\alpha_j + b\beta_j + c\gamma_j + d,$$

$$y_j = e\alpha_j + f\beta_j + g\gamma_j + h,$$

$$z_j = m\alpha_j + n\beta_j + p\gamma_j + q.$$

Для оценки параметров преобразования используется метод наименьших квадратов. Пусть \square будет определять меру расхождения, которая измеряет различие между эталонной кривой и исследуемой, и находится следующим образом:

$$\square = \sum_{j=1}^{\square} \left(x_j^t - x_j^c \right)^2 + \left(y_j^t - y_j^c \right)^2 + \left(z_j^t - z_j^c \right)^2,$$

где (x_j^c, y_j^c, z_j^c) – самая близкая точка эталонной кривой к точке (x_j^t, y_j^t, z_j^t) исследуемой кривой. Используя систему уравнений для выражения координат точки (x_j^t, y_j^t, z_j^t) , получим:

$$\square = \prod_{j=1}^{\square} (a\alpha_j + b\square_j + c\square_j + d\square x_j^c)^2 + (e\alpha_j + f\square_j + g\square_j + h\square y_j^c)^2 + \\ + (m\alpha_j + n\square_j + p\square_j + q\square z_j^c)^2.$$

Пусть $P = (a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, p, q)$ будет вектором параметров преобразования. Тогда решение уравнения $\frac{\square}{\square P} = 0$ является оценкой этих параметров методом наименьших квадратов. Для вычисления этой оценки нужно определить частные производные от \square по всем параметрам преобразования и приравнять их к нулю. В результате получится СЛАУ из 12-ти уравнений с 12-тью неизвестными, которая решается явно, как

$$a = \frac{A}{B},$$

где

$$A = F(x_j^c, \alpha_j) F^2(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F(x_j^c, \alpha_j) F(\square_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j) \square \\ \square F(\alpha_j, \square_j) F(x_j^c, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F(\alpha_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j) F(x_j^c, \square_j) + \\ + F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(x_j^c, \square_j) + \\ + F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(\alpha_j, \square_j) + \\ + F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(x_j^c, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F^2(\alpha_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j), \\ B = F(\alpha_j, \alpha_j) F^2(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F(\alpha_j, \alpha_j) F(\square_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j) \square \\ \square F^2(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) + F^2(\alpha_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j) \square \\ \square F^2(\alpha_j, \square_j) F^2(\square_j, \square_j) + \\ + F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j),$$

а функция F определяется как:

$$F(\square_j, \square_j) = \prod_{j=1}^{\square} \square_j \square_j \square \frac{1}{\square} \prod_{j=1}^{\square} \square_j \prod_{j=1}^{\square} \square_j, \\ F(x_j^c, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F(\square_j, \square_j) F(x_j^c, \square_j) \square \\ b = \frac{\square a F(\alpha_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F(\square_j, \square_j) F(\alpha_j, \square_j)}{F(\square_j, \square_j) F(\square_j, \square_j) \square F^2(\square_j, \square_j)}, \\ c = \frac{F(x_j^c, \square_j) \square a F(\alpha_j, \square_j) \square b F(\square_j, \square_j)}{F(\square_j, \square_j)},$$

$$d = \frac{1}{\prod_{j=1}^n x_j^c} \prod_{j=1}^n a_j \prod_{j=1}^n \infty_j \prod_{j=1}^n b_j \prod_{j=1}^n c_j$$

Выражения для e, f, g, h могут быть получены заменой x_j^c на y_j^c в выражениях для a, b, c, d соответственно. И выражения для m, n, p, q могут быть получены заменой x_j^c на z_j^c в выражениях для a, b, c, d соответственно. В случаях преобразования 3-D к 2-D параметры m, n, p, q полагают равными нулю, а само решение остается аналогичным.

Пространственные кривые играют важную роль в представлении трехмерных поверхностей и объектов. В данной статье был рассмотрен и проанализирован многоуровневый, основанный на кручении представлении форм пространственных кривых в виде плоских изображений. Доказано, что данный метод робастный (устойчивый) и пригодный для распознавания кривых любой ориентации и содержащих помехи, обусловленные шумом. Этот метод отвечает всем основным критериям (инвариантность, однозначность, устойчивость, эффективность, локальная поддержка), которые предъявляются к представлению пространственных кривых для того, чтобы, используя данный метод, была обеспечена возможность точного и надежного представления пространственных кривых и дальнейшего нахождения соответствия. Был представлен алгоритм сравнения пространственных кривых по их торсиальным изображениям, который состоит из двух частей: нахождения торсиального соответствия и получения параметров преобразования. Для улучшения точности полученных параметров применяется итерационный метод. Дальнейшая работа в этой области должна быть направлена на детальное изучение сравнения пространственных кривых при помощи торсиального преобразования и разработку новых модификаций метода сравнения, а также разработку критериев оценки параметров преобразования для установления степени схожести или различия исследуемой и эталонной пространственных кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mokhtarian F.* A Theory of Multi-Scale, Torsion-Based Shape Representation for Space Curves // Computer Vision and Image Understanding. 1997. Vol. 68, No. 1. P. 1–17.
2. *Goetz A.* Introduction to Differential Geometry. Addison-Wesley, Reading, MA, 1970. 423 p.