МАКСИМИЗАЦИЯ МЕЖВРЕМЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

А. А. Литвинович¹, Э. М. Аксень²

¹ *Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь*

² *Белорусский государственный экономический университет, г. Минск,
Республика Беларусь*

В работе предложена методика максимизации межвременного интегрального социально-экономического показателя. Предложенная методика направлена на улучшение прогнозирования и планирования сбалансированного распределения бюджетных ресурсов на жилищную политику по регионам.

Ключевые слова: интегральный показатель; оптимизация; моделирование.

MAXIMIZATION OF INTERTEMPORAL INTEGRAL SOCIO- ECONOMIC INDICATOR

A. A. Litvinovich, E. M. Aksen

¹ *Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

² *Belarusian state economic university, Minsk, Republic of Belarus*

The paper proposes a method for maximizing the intertemporal integral socio-economic indicator. The proposed methodology is aimed at improving forecasting and planning for a balanced distribution of budget resources for housing policy in the regions.

Keywords: integral indicator; optimization; modeling.

Социально-экономические показатели, такие как количество безработных, рождаемость, обеспеченность жильем и др. зависят от объемов жилищного строительства, средств, выделяемых на поддержку малообеспеченных граждан и других составляющих государственной жилищной политики ([1], [2]). Схожими проблемами прогнозирования объемов строительства жилья и инвестиций в жилищную сферу занимались многие авторы: российские ученые Г.М. Стерник, С.Г. Стерник, В.К. Севек, О.Н. Монгуш, А.Э. Чульдум, А.А. Салчак, Т.А. Игнашева, Т.А. Дуброва, А.Н. Лозовская, Т.А. Игнашева, Л.П. Бакуменко, Т.В. Сарычева, М.И. Каменецкий, А.А. Кузьменков, Е.Г. Емельянова, Е.Б. Олейник, А.П. Захарова, А.Б. Копейкин, Н.Н. Рогожина, А.А. Туманов, американские авторы Ф. Хаяши, Т. Итои, Дж. Слемрод, британские ученые С. Адели-

кан, С. Вамузири, В. Бинсарди, Л. Браун, белорусские авторы В.В. Валетко, М.М. Еременко.

Введем межвременной (динамический) интегральный показатель для социально-экономических показателей за период планирования $[T_1, T_2]$ следующим образом:

$$Y(T_1, T_2) = \exp \left(\int_{T_1}^{T_2} \varphi(t) \ln Y(t) dt \right), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ – весовой коэффициент для интегрального социально-экономического показателя $Y(t)$ в момент времени t , причем $\int_{T_1}^{T_2} \varphi(t) dt = 1$.

Зададим также $\alpha_{ik}(t)$ – весовой коэффициент для k -го социально-экономического показателя для i -го региона в t -м периоде, причем

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) = 1. \quad (2)$$

Пусть в момент времени t в целом по всем регионам суммарное взвешенное значение j -го показателя жилищной политики не должно превышать планового значения $B_j(t)$. Например, в целом по всем регионам интенсивность строительства жилой площади не может превышать $B_j(t)$ тысяч квадратных метров; средняя цена жилья в регионе не должна превышать плановое значение, и т.п. Тогда при планировании показателей жилищной политики по регионам должно учитываться следующее ограничение:

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (3)$$

где $c_{ij}(t)$ – известные коэффициенты, $[T_1, T_2]$ – период планирования. Данные условия должны учитываться при максимизации межвременного интегрального показателя (1) для планового периода $[T_1, T_2]$.

Заметим, что оптимизационная задача с прологарифмированной целевой функцией и прологарифмированными (некоторыми) ограничениями равносильна исходной задаче. Так, задача, эквивалентная задаче максимизации межвременного интегрального показателя (1):

$$\ln Y(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t) \ln Y(t) dt \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\ln Y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln [y_{ik}(t)], \quad t \in [T_1, T_2], \quad (5)$$

$$\ln [y_{ik}(t)] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \cdot \ln [\tilde{x}_{ijk}(t)], \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (6)$$

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(T_1) e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-T_1)} + \gamma_{ijk} \int_{T_1}^t x_{ij}(\tau) e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-\tau)} d\tau,$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (8)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (9)$$

Отметим, что в силу зависимостей (5)–(7) в качестве переменных этой динамической оптимизационной задачи в конечном счете выступают траектории $x_{ij}(t)$, ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $t \in [T_1, T_2]$), описывающие жилищную политику государства.

Подставив формулу (6) в равенство (5), получим:

$$\ln Y(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln a_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m \alpha_{ik}(t) b_{ijk} \cdot \ln [\tilde{x}_{ijk}(t)]. \quad (10)$$

Подставив выражение (7) в формулу (10), будем иметь:

$$\begin{aligned} \ln Y(t) = & \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln a_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m \alpha_{ik}(t) b_{ijk} \ln [\tilde{x}_{ijk}(T_1)] e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-T_1)} + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m \alpha_{ik}(t) b_{ijk} \gamma_{ijk} \int_{T_1}^t \ln [x_{ij}(\tau)] e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив эту формулу в целевой функционал (4) и произведя некоторые преобразования (в частности, поменяв порядок интегрирования), получим:

$$\begin{aligned} \ln Y(T_1, T_2) = & \int_{T_1}^{T_2} \varphi(t) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \left\{ \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \ln [\tilde{x}_{ijk}(T_1)] e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-t_0)} \right\} dt + \\ & + \int_{T_0}^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^s b_{ijk} \gamma_{ijk} \int_{\tau}^T \varphi(t) \alpha_{ik}(t) e^{-\gamma_{ijk} \cdot (t-\tau)} dt \right\} \ln [x_{ij}(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что первый интеграл в формуле (12) не зависит от траекторий переменных $x_{ij}(t)$ (описывающих динамику жилищной политики). Следовательно, оптимизационная задача (4)–(9) равносильна следующей:

$$\int_{T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln [x_{ij}(t)] dt \rightarrow \max, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (14)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (15)$$

где

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^s b_{ijk} \gamma_{ijk} \int_t^{T_2} \varphi(\tau) \alpha_{ik}(\tau) e^{-\gamma_{ijk} \cdot (\tau-t)} d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (16)$$

Заметим, что решение динамической задачи (13)–(16) сводится к решению следующих статических задач при каждом отдельно взятом $t \in [T_0, T]$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln [x_{ij}(t)] \rightarrow \max, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (18)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Решим оптимизационные задачи (17)–(19) методом множителей Лагранжа [3, с. 254]. Для этого построим функцию Лагранжа для задачи (17)–(19):

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln [x_{ij}(t)] - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \left[\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) - B_j(t) \right]. \quad (20)$$

Продифференцируем функцию Лагранжа (20) по $x_{ij}(t)$ и приравняем полученные выражения к нулю:

$$\frac{\beta_{ij}(t)}{x_{ij}(t)} - c_{ij}(t) \lambda_j(t) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (21)$$

Запишем также условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\lambda_j(t) \left[\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) - B_j(t) \right] = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (22)$$

$$\lambda_j(t) \geq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (23)$$

Соотношения (18), (19), (21)–(23) – это условия Куна-Таккера для задачи (17)–(19). В силу вогнутости целевой функции (17) эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными условиями оптимальности для решения рассматриваемой задачи.

Заметим, что из равенства (20) следует положительность множителей Лагранжа $\lambda_j(t)$, откуда в свою очередь в силу условий дополняющей нежесткости (22) вытекает, что ограничения (18) должны выполняться со знаком равенства:

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) = B_j(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (24)$$

Выразим $x_{ij}(t)$ из уравнений (21):

$$x_{ij}(t) = \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \lambda_j(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (25)$$

Подставив выражения (25) в равенство (24), получим формулу для множителей Лагранжа:

$$\lambda_j(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{ij}(t)}{B_j(t)}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (26)$$

Подставив выражение (26) в формулу (25), получим оптимальные решения задач (17)–(19):

$$x_{ij}(t) = w_{ij}(t)B_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (27)$$

где

$$w_{ij}(t) := \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \sum_{l=1}^n \beta_{il}(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (28)$$

В силу вышесказанного формулы (27), (28) дают (единственное) оптимальное решение задачи (4)–(9) максимизации межвременного интегрального показателя (1) для планового периода $[T_1, T_2]$.

Отметим, что в соответствии с формулой (27) $w_{ij}(t)$ – это доли суммарного значения j -го показателя $B_j(t)$ по регионам в периоде t . В силу формулы (27) указанные доли не зависят от суммарного значения $B_j(t)$.

При постоянных во времени коэффициентах α_{ik} формула (16) примет вид:

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^s b_{ijk} \gamma_{ijk} \alpha_{ik} \int_t^{T_2} \varphi(\tau) e^{-\gamma_{ijk}(\tau-t)} d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (29)$$

В случае, когда эластичность $e(t_1, t_2)$ зависит только от разности между моментами времени t_1 и t_2 для коэффициента $\varphi(t)$ справедлива формула:

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{\ln \delta}{1 - \delta^{T_2 - T_1}} \delta^{t - T_1} & \text{при } \delta \neq 1, \\ \frac{1}{T_2 - T_1} & \text{при } \delta = 1, \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (30)$$

Подставив указанную формулу в соотношения (29) получим:

$$\beta_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{\rho \delta^{t-T_1}}{1 - \delta^{T_2-T_1}} \sum_{k=1}^s \frac{b_{ijk} \alpha_{ik} \gamma_{ijk}}{\rho + \gamma_{ijk}} \left[1 - e^{-(\rho + \gamma_{ijk})(T_2-t)} \right] & \text{при } \delta \neq 1, \\ \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{k=1}^s b_{ijk} \alpha_{ik} \left[1 - e^{-\gamma_{ijk}(T_2-t)} \right] & \text{при } \delta = 1, \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2], \quad (31)$$

где $\rho := \ln \delta$.

Упростим коэффициенты (31) по формуле:

$$\tilde{\beta}_{ij}(t) := \sum_{k=1}^s \frac{b_{ijk} \alpha_{ik} \gamma_{ijk}}{\rho + \gamma_{ijk}} \left[1 - e^{-(\rho + \gamma_{ijk})(T_2-t)} \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (32)$$

Из соотношений (28), (31), (33) следует, что оптимальные доли $w_{ij}(t)$ могут быть найдены также с помощью упрощенных коэффициентов $\tilde{\beta}_{ij}(t)$:

$$w_{ij}(t) := \frac{\tilde{\beta}_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \sum_{l=1}^n \tilde{\beta}_{lj}(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (33)$$

В случае одного показателя жилищной политики и одного социально-экономического показателя (т.е. когда $m=1$ и $s=1$) нет необходимости использовать индексы j и k , тогда формулы (32), (33) и (27) запишутся проще:

$$\tilde{\beta}_i(t) := \frac{b_i \alpha_i \gamma_i}{\rho + \gamma_i} \left[1 - e^{-(\rho + \gamma_i)(T_2-t)} \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (34)$$

$$w_i(t) := \frac{\tilde{\beta}_i(t)}{c_i(t) \sum_{l=1}^n \tilde{\beta}_l(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [T_1, T_2], \quad (35)$$

$$x_i(t) = w_i(t) B(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (36)$$

Представленная выше методика позволяет в дальнейшем на основе реальных данных получить оптимальные (плановые) доли $w_i(t)$ для ввода в эксплуатацию жилых домов по областям и г. Минску для заданного периода планирования.

Библиографические ссылки

1. *Еременко М.М., Стасюкевич С.В.* Реализация государственной жилищной политики Республики Беларусь // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость: материалы XV Международной научно-практической конференции. Минск, 19-20 мая 2022 г. БГЭУ. А.В. Егоров (ред.). С. 261-262.

2. *Литвинович А.А., Аксень Э.М.* Моделирование влияния объемов жилищного строительства на социально-экономические показатели с учетом запаздывания // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2023. Минск: НИЭИ Мин-ва экономики Респ. Беларусь. Вып. 17. С. 258–265.

3. *Галеев Э.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. Москва: Едиториал УРСС. 2002. 304 с.