

МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ЭКОНОМЕТРИКЕ

У. А. Кришень, С. В. Рогозин

Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

В данной статье рассматривается вопрос стационарности и нестационарности временных рядов. Выделяются факторы, влияющие на свойства стационарности/нестационарности. Также исследуются методы анализа нестационарных временных рядов в эконометрике и проводится их сравнение для определения наиболее оптимального метода для того или иного эконометрического исследования.

Ключевые слова: стационарность; нестационарность; графический анализ; анализ автокорреляционной функции; тесты «единичного корня».

METHODS OF ANALYSING NON-STATIONARY TIME SERIES IN ECONOMETRICS

U. A. Krishen, S. V. Rogosin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

The key question in this article is to analyse the topic of stationarity and non-stationarity of time series in economics. Factors affecting the stationarity/non-stationarity properties are highlighted. Methods for analysing non-stationary time series in econometrics are also explored and compared to determine the most optimal approach for a particular econometric study.

Keywords: stationarity; non-stationarity; graphical analysis; autocorrelation function analysis; unit root tests.

В эконометрике важным аспектом анализа и последующего моделирования временного ряда является проверка его свойств стационарности. **Стационарность** — свойство временного ряда, обозначающее неизменность статистических свойств значений ряда с изменением временного масштаба. Выделяются условия, по которым временной ряд определяется, как строго или слабо стационарный.

К *строго стационарному* временному ряду относится тот ряд, в котором сдвиг временного промежутка на любую константу C не меняет статистических свойств распределения любого подмножества значений ряда, взятого на одинаковом временном расстоянии. Иначе можно говорить об инвариантности взаимного распределения вероятностей m

наблюдений при сдвиге временного аргумента. Примером строго стационарного временного ряда является так называемый «белый шум». [1]

Строгая стационарность ряда редко встречается на практике, поэтому исследование вопроса слабой стационарности поднимается намного чаще. Свойства *слабо стационарного* ряда определяются в следующем: в неизменности математического ожидания (среднего), дисперсии (среднеквадратического отклонения в квадрате), и ковариации от момента времени.

$$M(x_t) = a = const \quad (1)$$

$$D(x_t) = \sigma^2 = const \quad (2)$$

$$cov(x_t; x_{(t-1)}) = R(k) \quad (3)$$

При невыполнении одного из условий слабой стационарности ряд считается нестационарным. С точки зрения статистики, нестационарный временной ряд можно рассматривать как ряд, возникающий из нелинейной динамической системы, если он характеризуется такими признаками, как ненормальность, аперриодичность либо же содержит асимметричные циклы, нелинейные причинно-следственные связи между запаздывающими переменными и иное.

Существует множество методов, тестов, которые были разработаны с целью выявления свойства нестационарности временного ряда: графический анализ, анализ автокорреляционных функций (общей и частной), тесты единичного корня. Графический анализ может определить очевидное наличие трендов (возрастающих и убывающих), изменение размаха колебаний ряда с течением времени и резкие изменения в ряде динамики и т.д. Такое поведение отмечается во многих временных рядах, представленных в экономике и финансах. Недостатком графического анализа является то, что временной ряд может не содержать в себе значительных изменений, которые свободно можно проинтерпретировать как некие особенности динамики. Именно поэтому были разработаны анализ автокорреляционной функции и тесты единичного корня.

Анализ автокорреляционной функции был предложен М. Бертрамом Пристли в 1981 году в работе «Спектральный анализ и временные ряды». **Автокорреляция** — мера степени зависимости между уровнями одного временного ряда в разные промежутки времени. Она показывает, насколько текущее значение случайной величины (далее – СВ) связано с её предыдущим значением и рассчитывается по формуле:

$$\rho_h = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+h} - \mu)]}{\sqrt{E[(x_t - \mu)^2]E[(x_{t+h} - \mu)^2]}} = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t+h})}{\text{VAR}(x_t)} = \frac{x_h}{x_0}, \quad |\rho_h| \leq 1, \quad (4)$$

где $\text{cov}(x_t, x_{t+h})$ – показатель ковариации, $\text{VAR}(x_t)$ – дисперсия временного ряда

Автокорреляция оценивается на некоторой длине временного ряда, т.е. x_1, x_2, \dots, x_T . Тогда применимо понятие выборочной автокорреляционной функции (далее – ACF), рассчитанной до определенного момента H :

$$c_k = \hat{x}_h = \frac{\sum_{t=1}^{T-h} (x_t - \bar{x})(x_{t+h} - \bar{x})}{T}, \quad h = \overline{1, H} \quad (5)$$

$$r_h = \hat{\rho}_h = \frac{c_h}{c_0}, \quad h = \overline{1, H} \quad (6)$$

Выборочная ACF измеряет корреляцию между значениями на разных лагах внутри выборки. Однако для более полного анализа необходимо учитывать влияние каждой лагирующей переменной на зависимую переменную временного ряда. Поэтому помимо ACF к анализу добавляется частная автокорреляционная функция (далее — PACF), которая необходима при дальнейшем моделировании авторегрессии. В эконометрике считается, что для получения надежной оценки ACF (PACF) необходимо проанализировать не менее 50 наблюдений, а автокорреляции отдельных малых выборок рассчитываются до некоторого лага H , где $H \approx \frac{T}{4}$. Если временной ряд стационарен, то график корреляции, построенный по каждому полученному значению r_h , должен показывать убывающую структуру, где корреляции быстро приближаются к нулю по мере увеличения временного лага.

В то же время нестационарный временной ряд показывает медленно убывающую тенденцию, а значения ACF и PACF будут приравняться к значениям, близким к единице, при первом лаге. Анализ таких графиков – удобный инструмент для любого исследователя. Массивный объем данных, представленных в виде лагированных значений, наглядно показывает, на какие значения и временные промежутки стоит уделить внимание. Однако низкая разрешающая способность графика ACF, PACF при определенном количестве доступных лагов (до 25 лагов в специализированных математических пакетах) может скрыть малозаметные или сложные структуры данных. [2]

Поэтому необходимо проверять гипотезы о нестационарности временного ряда в комбинации с тестами «единичного корня» (с англ. unit

root test). Название данных тестов исходит из того, что решение автокорреляционного уравнения модели временного ряда имеет корни, равные по модулю единице. Существует достаточная база тестов, начиная с теста Дики-Фуллера, заканчивая тестом Эллиота-Ротенберка-Стока.

В данной статье будет проведен анализ методологии тестов и сравнительный анализ их мощности для определения, подходящего для того или иного исследования.

Тест Дики-Фуллера (DF-тест) и расширенный тест Дики-Фуллера (ADF-тест) являются связанными тестами, которые при нулевой гипотезе подразумевают наличие единичного корня во временном ряде. Тест DF базируется на регрессионной модели, где эндогенная переменная — это разность между текущим и предыдущим значением временного ряда, а независимое значение — это предыдущее значение разности. Математически это представляется следующим образом:

$$x_t = \delta + \rho * x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7)$$

$$x_t - x_{t-1} = \delta + \rho * x_{t-1} - x_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8)$$

$$\Delta x_t = \delta + (\rho - 1) * x_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (9)$$

Тогда нулевая и альтернативная гипотезы представляются следующим образом:

$$H_0: \rho = 1, H_1: |\rho| < 1 \quad (10)$$

Недостатком данного теста является низкая мощность при работе с малыми выборками данных. Тест чувствителен к количеству лагов, которые включаются в итоговую модель, а также он не учитывает сезонность данных.

Отличительной чертой теста ADF от DF является включение лагов разности Δx_t . Причиной проведения такой процедуры является то, что на практике нередко наблюдается зависимость текущего значения временного ряда от более чем одного предыдущего значения.

$$\Delta x_t = (\rho - 1) \cdot x_{t-1} + \sum_{i=1}^h \alpha \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (11)$$

Сравнительный анализ данных тестов представлен в таблице.

При выборе теста на наличие или отсутствие «единичного корня» во временном ряде между DF и ADF предпочтительно использовать второй вариант. Однако для понимания того, как лучше проводить тест и какие

факторы стоит учесть, необходимо знать DF-тест, являющийся фундаментом ADF-теста.

Сравнительный анализ тестов DF и ADF

Показатель	DF-тест	ADF-тест
Гипотезы	H0: единичный корень присутствует H1: единичного корня нет	
Факторы, учитываемые в тесте	Учитывает только линейный тренд	Учитывает любой тренд (линейный, квадратичный, экспоненциальный и др.), сезонность
Лаг	Первого порядка	Лаги разных порядков. Оптимальное число лагов выбирается на базе сравнения информационного критерия Акаике (с англ. AIC) в разных моделях
Спецификация	None, Const, Trend+Const	None, Const, Trend+Const
Мощность	Растет с увеличением размера выборки. Слабая мощность на малых выборках	Растет с увеличением размера выборки. Более высокая мощность на малых выборках

Следующим тестом является тест Филлипса-Перрона. Основной предпосылкой является то, что остатки модели, полученные путем удаления тренда из временного ряда, обладают свойством стационарности. При ярко выраженных структурных сдвигах и сезонности случайные отклонения (иначе можно интерпретировать как остатки регрессионной модели) могут демонстрировать автокорреляционную структуру, обладать свойством гетероскедестичности (=иметь различные дисперсии) и подчиняться любому из законов распределения, за исключением нормального распределения. Использование PP-теста позволяет исправить проблему автокорреляции остатков модели и получить более эффективные выводы о наличии или отсутствии «единичного корня». В этом и заключается разница между ним и тестом ADF.

Интересной модификацией двух тестов ADF и PP является тест Эллиота-Ротенберка-Стока (иначе ERS-тест). Данный тест основан на t-статистике, которая проверяет нулевую гипотезу о том, что $(\rho - 1) = 0$, против альтернативной гипотезы о стационарности $(\rho - 1) < 0$:

$$\Delta x_t^d = (\rho - 1) \cdot x_{t-1}^d + \sum_{i=1}^h \alpha_i \Delta x_{t-i}^d + \varepsilon_t, \quad (12)$$

где i — лаги зависимой переменной для учета остаточной линейной корреляции, x_t^d — ряд x_t , подвергнутый GLS-детерминированию.

GLS-детерминирование позволяет выполнить взвешенную минимизацию суммы квадратов остатков, что в свою очередь учитывает гетероскедстичность и коррелированность ошибок в модели. Данный тест не так известен по сравнению с тестом ADF и PP.

Заключительным из исследуемых тестов является тест Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина (KPSS-тест). Его отличием от остальных рассматриваемых тестов является нулевая гипотеза. За нулевую гипотезу берется стационарность ряда (TS-ряд), в отличие от предыдущих тестов, где за нулевую гипотезу принимается принадлежность к DS-рядам.

Существует 2 спецификации теста: с трендом (13) и с константой (14).

$$x_t = \delta + \xi_t + \gamma t + \varepsilon_t \quad (13)$$

$$x_t = \delta + \xi_t + \varepsilon_t \quad (14)$$

где ξ — стохастическая составляющая ряда.

Тогда для данного теста нулевая гипотеза будет приниматься в том случае, когда ξ будет неизменной на протяжении всей длины исследуемого ряда. В обратном случае, ряд признается нестационарным и нуждается в дальнейших корректировках. [3-5]

Подводя итог, можно сказать о том, эконометрика обладает широким спектром тестов для определения «единичного корня» во временных рядах. У исследователя есть выбор в методике тестирования временного ряда, и он может выбрать ту, которая лучше всего соответствует его конкретным вопросам и целям исследования.

Библиографические ссылки

1. Афанасьев В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование: учебник. Ай Пи Ар Медия Оренбургский гос. ун-т 2020. – 286 с. [Электронный ресурс]. URL: http://elib.osu.ru/bitstream/123456789/13336/1/133563_20201117.pdf?ysclid=lspy0z0ir1405701902. (дата обращения: 03.04.2024).
2. Эконометрия. Анализ временных рядов [Электронный ресурс]. URL: <http://bseu.by/russian/faculty5/stat/docs/4/EconometricsBook3.pdf>. (дата обращения: 03.04.2024).
3. Стохастические процессы и системы: Учеб. пособие для студентов фак. радиофизики и электроники / С. В. Гилевский. - Мн.: БГУ, 2004. - 112 с.
4. Процессы «единичного корня». Тесты «единичного корня»: ADF, PP, KPSS [Электронный ресурс]. URL: <https://bsu.by/upload/page/546923.pdf?ysclid=ltuipd31wr1610738>. (дата обращения: 03.04.2024).
5. Эконометрика: Учебник / В. А. Валентинов. — 2-е изд. — М.: Издательско-торговая корпорация «Даш ков и К», 2009. — 448 с. [Электронный ресурс]. URL: <https://goo.su/A03v6Mn>. (дата обращения: 21.03.2024).