

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

ТЫШКО

Юлия Юрьевна

**МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ
ТЕРМИНАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

Дипломная работа

Научный руководитель:
канд. физ.-мат. наук,
доцент Н.М. Дмитрук

Допущена к защите

«_____» _____ 2024 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ И ТЕРМИНОВ	9
ГЛАВА 1 ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ГАРАНТИРУЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ	11
1.1 Постановка задачи и основные понятия	11
1.2 Эквивалентная детерминированная задача оптимального управления	13
1.3 Выводы	16
ГЛАВА 2 ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ С ОДНИМ МОМЕНТОМ ЗАМЫКАНИЯ	17
2.1 Основные обозначения и определения	17
2.2 Допустимая и оптимальная стратегия управления с одним моментом замыкания	18
2.3 Аппроксимация множеств замыкания	21
2.4 Построение субоптимальной начальной программы	24
2.5 Выводы	30
ГЛАВА 3 ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ СО МНОГИМИ МОМЕНТАМИ ЗАМЫКАНИЯ	32
3.1 Стратегия управления с многими моментами замыкания	32
3.2 Построение субоптимальной начальной программы	33
3.3 Выводы	38
ГЛАВА 4 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	40
4.1 Пример задачи построения стратегии с одним моментом замыкания	40
4.2 Пример задачи построения стратегии со многими моментами замыкания	43
4.3 Выводы	45

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	50

РЕФЕРАТ

Дипломная работа: 50 с., 8 рис., 1 табл., 8 источников, 0 прил.

Ключевые слова: ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, ВОЗМУЩЕНИЕ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, СТРАТЕГИЯ, МОМЕНТ ЗАМЫКАНИЯ

Объект исследования: Задача оптимального управления линейной дискретной системой с неизвестными ограниченными возмущениями.

Цель исследования: Разработка оптимальной стратегии управления для перевода системы за конечное время с гарантией на терминальное множество, обеспечивая при этом минимум терминального критерия качества.

Методы исследования: Методы оптимизации, включая, линейное программирование, выпуклое программирование, многопараметрическое линейное программирование.

Полученные результаты и их новизна: Предложена оптимальная стратегия управления, которая учитывает информацию о будущем состоянии системы. Результаты численных экспериментов демонстрируют улучшение качества управления по сравнению с оптимальной гарантирующей программой.

Область возможного практического применения: Применение результатов исследования в практических задачах оптимального управления.

Автор работы подтверждает, что приведенный в ней расчетно-аналитический материал правильно и объективно отражает состояние исследуемого процесса, а все заимствованные из литературных и других источников теоретические, методологические и методические положения и концепции сопровождаются ссылками на их авторов.

(подпись студента)

РЭФЕРАТ

Дыпломная праца: 50 с., 8 мал., 1 табл., 8 крыніц, 0 прыкл.

Ключавыя словы: ЛІНЕЙНАЯ СІСТЭМА, ЗБУРЭННЕ, АПТЫМАЛЬНАЕ КІРАВАННЕ, СТРАТЭГІЯ, МОМАНТ ЗАМЫКАННЯ

Аб’ект даследавання: Задача аптымальнага кіравання лінейнай дыскрэтнай сістэмай з невядомымі абмежаванымі парушэннямі.

Мэта даследавання: Распрацоўка аптымальнай стратэгіі кіравання для пераводу сістэмы за канчатковы час з гарантыяй на тэрмінальны набор, забяспечваючы пры гэтым мінімум тэрмінальнага крытэрыя якасці.

Метады даследавання: Метады аптымізацыі, уключаючы лінейнае праграмаванне, выпуклае праграмаванне, мнагаметражнае лінейнае праграмаванне.

Атрыманыя вынікі і іх навізна: Прапанована аптымальная стратэгія кіравання, якая ўлічвае інфармацыю пра будучы стан сістэмы. Вынікі лічбавых эксперыментаў паказваюць паляпшэнне якасці кіравання ў параўнанні з аптымальнай гарантыючай праграмай.

Вобласць магчымага практычнага прымянення: Прымяненне вынікаў даследавання ў практычных задачах аптымальнага кіравання.

Аўтар працы пацвярджае, што прыведзены ў ёй разлікова-аналітычны матэрыял правільна і аб’ектыўна адлюстроўвае стан доследнага працэсу, а ўсе запазычаныя з літаратурных і іншых крыніц тэарэтычныя, метадалагічныя і метадычныя становішча і канцэпцыі суправаджаюцца спасылкамі на іх аўтараў.

(подпіс студэнта)

ANNOTATION

Degree paper: 50 p., 8 ill., 1 tab., 8 sources, 0 app.

Key words: LINEAR SYSTEM, DISTURBANCE, OPTIMAL CONTROL, STRATEGY, CLOSING MOMENT

Object of research: The problem of optimal control of a linear discrete system with unknown bounded disturbances.

Purpose of research: Develop an optimal control strategy to transfer the system to a terminal set within a finite time while ensuring the minimum terminal quality criterion.

Research methods: Optimization methods, including linear programming, convex programming, multiparametric linear programming.

Obtained results and their novelty: An optimal control strategy that takes into account information about the future state of the system has been proposed. The results of numerical experiments demonstrate an improvement in control quality compared to the optimal guaranteeing program.

Area of possible practical application: Applying the research results to practical tasks in optimal control.

The author of the work confirms that computational and analytical material presented in it correctly and objectively reproduces the picture of investigated process, and all the theoretical, methodological and methodical positions and concepts borrowed from literary and other sources are given references to their authors.

(Student's signature)

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления актуальны и важны в теории систем управления с неопределенностями, которые описывают различные прикладные задачи в экономике, технике и т.д.

Реальные системы управления функционируют, как правило, в условиях неопределенности, обусловленной разнообразными причинами (неполные начальные данные, наличие неизвестных и неточно заданных возмущений, ошибки в каналах связи и т.п.). Поэтому в реальных задачах существуют неопределенности в описании объекта. В то же время реальная система управления должна быть спроектирована и реализована так, чтобы она была работоспособна при наличии этих неопределенностей [7, 8].

Интерес к подобным задачам обусловлен в первую очередь практически приложениями. Для таких задач желательно получить гарантированный результат, то есть обеспечить выполнение ограничений и гарантировать значение критерия качества при всех возможных реализациях возмущения.

В настоящей дипломной работе рассматривается один подход к исследованию задач оптимального управления в условиях существенно ограниченной исходной информации (постоянно действующих возмущений) [3].

Будем рассматривать терминальную задачу оптимального управления, в которой систему требуется за конечное время перевести с гарантией на терминальное множество, при этом выполнить все ограничения и минимизировать терминальный критерий качества.

В главе 1 будем решать задачу нахождения оптимальной гарантирующей программы. Это один из возможных подходов при решении задачи о гарантированном переводе траекторий системы на терминальное множество и минимизации терминального критерия качества.

Вторая задача (глава 2) состоит в том, чтобы в процессе управления в один или несколько заранее заданных моментов времени скорректировать запланированное управление [5]. Для терминальной задачи будет построена оптимальная стратегия управления с одним моментом замыкания. В этой главе далее рассматривается задача линейного программирования к которой сводится задача нахождения оптимальной гарантирующей программы и множества замыкания аппроксимируются внешними многогранниками.

В главе 3 рассматривается многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления. Для построения многократной замыкаемой стратегии управления вво-

дятся специальные множества замыкания, соответствующие моментам замыкания, строятся их аппроксимации и задача линейного программирования, из которой находится субоптимальная начальная программа для стратегии.

В главе 4 приводятся примеры построения стратегии управления с одним и несколькими моментами замыкания. В примере 1 строится оптимальная гарантирующая программа управления и оптимальная стратегия управления. В примере 2 находится оптимальная стратегия при нескольких моментах замыкания (указанные оптимальные стратегии при двух и пяти моментах замыкания).

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ И ТЕРМИНОВ

- $x(t)$ — состояние системы в момент времени t .
- $u(t)$ — управляющее воздействие в момент времени t .
- $w(t)$ — внешнее возмущение в момент времени t .
- A — матрица системы, определяющая динамику состояния без учета управления.
- B — матрица управления, через которую управление $u(t)$ влияет на состояние системы.
- M — матрица, через которую внешние возмущения $w(t)$ влияют на состояние системы.
- x_0 — начальное состояние системы.
- c — вектор коэффициентов для линейной функции стоимости в зависимости от конечного состояния $x(T)$.
- H — матрица, задающая линейные ограничения на конечное состояние системы.
- $g_{\max}, g_{\min}$ — векторы, ограничивающие допустимые значения $Hx(T)$ сверху и снизу соответственно.
- $u_{\max}, u_{\min}$ — максимальные и минимальные допустимые значения управления.
- $\lambda(t)$ — двойственные переменные, ассоциированные с ограничениями на состояние и управления.
- γ — вектор оценок для «сужения» терминального множества.
- T — горизонт планирования, конечный момент времени управления.
- $T_1, T_2, \dots, T_n$ — моменты замыкания в стратегии со многими моментами замыкания.
- Δ_j — промежуток между моментами замыкания T_j и T_{j+1} .

- π_j — стратегия управления.
- $\|a\|_\infty = \max_j |a_j|$ — равномерная норма.
- $\|a\|_1 = \sum_j |a_j|$ — L_1 норма.
- $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ — положительная срезка.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ГАРАНТИРУЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе формулируется задача оптимального управления дискретной линейной стационарной системой управления с ограниченными возмущениями. Для нее рассматривается задача терминального гарантированного управления, которая сводится к эквивалентной детерминированной задаче и далее представима в виде задачи линейного программирования [2]. Решая последнюю задачу, находим оптимальную гарантирующую программу управления.

1.1 Постановка задачи и основные понятия

Пусть рассматривается линейная дискретная система вида

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad (1.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние (фазовый вектор); $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — управление; $w(t) \in \mathbb{R}^p$ — возмущение в момент времени t ; A, B, M — заданные постоянные матрицы размеров $n \times n, n \times r, n \times p$ соответственно.

Функции $u(t)$ и $w(t)$ в каждый момент времени $t, t = 0, 1, \dots, T-1$, принимают значения из заданных множеств

$$U = \{u \in \mathbb{R}^r : u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}\},$$

$$W = \{w \in \mathbb{R}^p : \|w\|_{\infty} \leq w_{\max}\}.$$

Здесь $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}^r$; $w_{\max} > 0$; $\|a\|_{\infty} = \max_j |a_j|, a \in \mathbb{R}^p$.

Управление

$$u(\cdot) = (u(t) \in U, t = 0, 1, \dots, T-1)$$

будем называть *допустимым управлением*.

При некотором допустимом управлении $u(\cdot)$, возможном возмущении

$$w(\cdot) = \{w(t) \in W, t = 0, 1, \dots, T-1\}$$

и начальном условии $x(0) = x_0$ решение системы (1.1) будем обозначать

$$x(t) = x(t|x_0, u(\cdot), w(\cdot)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Зададим терминальное множество

$$X_T = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leq Hx \leq g_{\max}\},$$

где $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $g_{\min}, g_{\max} \in \mathbb{R}^m$, на которое нужно перевести траекторию (решение) системы (1.1) с гарантией попадания траектории на множество в момент $t = T$ (рисунок 1.1).

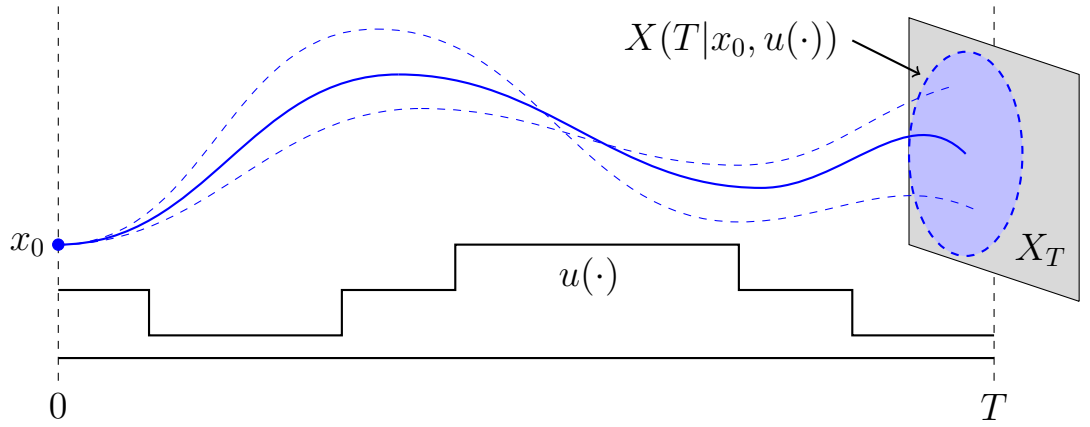


Рис. 1.1: Оптимальная гарантирующая программа управления

В связи с гарантированным попаданием на множество X_T необходимо и определить понятие *управления* (программы управления), которое назовем *гарантирующим управлением* (гарантирующей программой управления).

Определение 1.1 Гарантирующей программой управления называется допустимое управление $u(\cdot)$, которое при любом возможном возмущении $w(\cdot)$ переводит траекторию системы (1.1) в момент времени T на терминальное множество, т.е. выполняется включение

$$x(T|x_0, u(\cdot), w(\cdot)) \in X_T \quad \forall w(t) \in W, \quad t = 0, 1, \dots, T-1. \quad (1.2)$$

При этом качество гарантирующей программы оценивается терминаль-

ным (типа Майера) функционалом

$$J(u) = \max_{w(\cdot)} c'x(T), \quad c \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Это значение терминального критерия качества при наихудшей реализации возмущения называется *гарантированным значением* критерия качества.

Определение 1.2 Гарантирующая программа $u^0(\cdot)$ называется оптимальной программой, если она минимизирует гарантированное значение критерия качества (1.3), т.е.

$$J(u^0) = \min_{u(\cdot)} J(u).$$

Далее построим задачу оптимального управления (без возмущений) эквивалентную задаче минимизации функционала (1.3) на траекториях системы (1.1) при условиях (1.2).

1.2 Эквивалентная детерминированная задача оптимального управления

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = x_0, \\ t &= 0, 1, \dots, T-1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Используя систему (1.4) построим следующую детерминированную задачу, как в статье [3].

Для этого вычислим оценки наихудшей реализации возмущения по векторам c и вектор-строкам h'_i , $i = \overline{1, m}$, матрицы H , т.е.

$$\gamma_0(\tau) = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \|c' A^t M\|_1,$$

$$\gamma_i(\tau) = w_{\max} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} \|h'_i A^t M\|_1, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\|a\|_1 = \sum_i |a_i|$.

Замечание 1.1 Оценки наихудшей реализации возмущения по векторам c и h'_i , $i = \overline{1, m}$, вычисляются следующим образом.

Запишем решение системы (1.4)

$$y(t) = A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau), \quad y(0) = x_0, \\ t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Эти траектории должны попадать в момент $t = T$ на терминальное множество X_T , т.е. должны выполняться неравенства

$$g_{\min} \leq H y(T) \leq g_{\max}$$

и при этом

$$J(u) = \max_{w(\cdot)} c' y(T)$$

Первое неравенство имеет место, если

$$g_{\min} + \gamma - H A^T x_0 \leq \sum_{t=0}^{T-1} H A^{T-t-1} B u(t) \leq g_{\max} - \gamma - H A^T x_0,$$

где

$$\gamma = \max_{w(\cdot)} \sum_{t=0}^{T-1} H A^{T-t-1} M w(t).$$

По аналогии, для $J(u) = \max_{w(\cdot)} c' y(T)$ имеем

$$J(u) = \beta + \sum_{t=0}^{T-1} c' A^{T-t-1} B u(t),$$

где

$$\beta = c' A^T x_0 + \max_{w(\cdot)} \sum_{t=0}^{T-1} c' A^{T-t-1} M w(t).$$

Вектор оценок $\gamma = (\gamma_i, i = \overline{1, m})$ используется для «сужения» терминального множества. Этот вектор переводит на терминальное множество траектории системы (1.4).

Таким образом, эквивалентная детерминированная задача запишется в

виде:

$$\begin{aligned}
J(u) &= \gamma_0 + \min_{u(\cdot)} c'y(T), \\
y(t+1) &= Ay(t) + Bu(t), \\
y(0) &= x_0, \\
g_{\min} + \gamma &\leq Hy(T) \leq g_{\max} - \gamma, \\
u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max}, \\
t &= 0, 1, \dots, T-1.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Запишем решение системы (1.4)

$$\begin{aligned}
y(t) &= A^t x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} Bu(\tau), \\
t &= 0, 1, \dots, T.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда из (1.6) следует, что при $t = T$:

$$y(T) = A^T x_0 + \sum_{t=0}^{T-1} A^{T-t-1} Bu(t). \tag{1.7}$$

Следовательно, из (1.5), (1.7) получим, что оптимальная гарантирующая программа $u^0(\cdot)$ находится из следующей задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
\beta + \sum_{t=0}^{T-1} c' A^{T-t-1} Bu(t) &\rightarrow \min_{u(\cdot)}, \\
g_{\min} + \gamma - HA^T x_0 &\leq \sum_{t=0}^{T-1} HA^{T-t-1} Bu(t) \leq g_{\max} - \gamma - HA^T x_0, \\
u_{\min} &\leq u(t) \leq u_{\max}, \\
t &= 0, 1, \dots, T-1,
\end{aligned}$$

где константа $\beta = c' A^T x_0 + \gamma_0$.

Решение этой задачи дает оптимальную гарантирующую программу в исходной задаче (1.1).

1.3 Выводы

Как видно из вышеизложенного, оптимальная гарантирующая программа является простейшим решением задачи о гарантированном переводе системы (1.1) на терминальное множество и минимизации терминального критерия качества (1.3). Эта программа не учитывает ее коррекции по ходу управления. При вычислении программы не используется информация о возможном измерении состояния системы в будущем. Главным достоинством этой программы с вычислительной точки зрения является простота при построении. Поэтому, в следующей главе, в отличие от гарантирующих программ, мы рассмотрим оптимальную стратегию управления.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ С ОДНИМ МОМЕНТОМ ЗАМЫКАНИЯ

В данной главе рассматривается задача построения стратегии управления с одним моментом замыкания. Показывается, как определить оптимальную стратегию управления, используя принцип оптимальности динамического программирования Р. Беллмана [4]. Вводятся множества замыкания, которые состоят из всех состояний системы в момент замыкания, для которых существует оптимальная гарантирующая программа, переводящая систему с гарантией на терминальное множество. Задача построения оптимальной стратегии сводится к решению ряда задач линейного программирования на основе изучения свойств множества замыкания.

2.1 Основные обозначения и определения

Рассматриваем систему (1.1):

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1.$$

До начала процесса управления зафиксируем момент времени T_1 ,

$$T_1 \in 1, 2, \dots, T-1.$$

Этот момент времени будем называть [3] *моментом замыкания* системы (1.1).

Обозначим:

$$\Delta_0 = \{1, 2, \dots, T_1 - 1\};$$

$$\Delta_1 = \{T_1, T_1 + 1, \dots, T - 1\};$$

$$u_0(\cdot) = (u_0(t) \in U, \quad t \in \Delta_0) \text{ — управление на } \Delta_0;$$

$$u_1(\cdot) = (u_1(t) \in U, \quad t \in \Delta_1) \text{ — управление на } \Delta_1;$$

$$w_k(\cdot) = (w_k(t) \in W, \quad t \in \Delta_k), \quad k = 0, 1 \text{ — возмущение на } \Delta_k, k = 0, 1;$$

$U_k = \{u_k(t) \in U, t \in \Delta_k\}$ — множество допустимых управлений на Δ_k , $k = 0, 1$;

$W_k = \{w_k(t) \in W, t \in \Delta_k\}$ — множество возможных возмущений на Δ_k , $k = 0, 1$.

Пусть на Δ_0 выбрано управление $u_0(\cdot) = u_0(\cdot|x_0) \in U_0$. Тогда в момент T_1 траектория системы (1.1) может оказаться в какой-то точке x_1 множества

$$X(T_1|x_0, u_0(\cdot)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)), w_0(\cdot) \in W_0\}.$$

Будем считать, что в момент T_1 :

1. Будет известно точное текущее состояние объекта управления

$$x_1 = x(T_1|x_0, u_0(\cdot), w_0(\cdot)).$$

2. Можно выбрать новое управление $u_1(\cdot) = u_1(\cdot|x_1)$ на Δ_1 с учетом x_1 .

С учетом 1 и 2, будем искать решение задачи управления (1.1) в виде *стратегии управления* $\pi_1(0, x_0)$ с одним моментом замыкания T_1 .

Определение 2.1 *Стратегией управления с одним моментом замыкания T_1 на $\{\Delta_0, \Delta_1\}$ назовем совокупность*

$$\pi_1(0, x_0) = \{u_0(\cdot|x_0); u_1(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\},$$

где $u_0(\cdot|x_0)$ будем называть *начальной программой*.

Тогда траектория системы управления (1.1) будет определяться как решение двух систем

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_0(t|x_0) + Mw_0(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \Delta_0;$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_1(t|x(T_1)) + Mw_1(t), \quad x(T_1) = x(T_1|x_0, u_0, w_0), \quad t \in \Delta_1.$$

2.2 Допустимая и оптимальная стратегия управления с одним моментом замыкания

Для того, чтобы стратегия π_1 была допустимой (гарантировала выполнение терминального ограничения для определенной выше траектории) необ-

ходимо применить стандартные рассуждения динамического программирования. Будем последовательно рассматривать процесс управления сначала на Δ_1 , а после на Δ_0 (рисунок 2.1). Пара (T_j, x_j) , $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, 1$ называется *позицией процесса управления*.

На Δ_1 начальная позиция процесса управления (T_1, x_1) . Для того, чтобы на Δ_1 попасть в терминальное множество, выбираем управление $u_1(\cdot|x_1) \in U_1$ в момент времени T_1 таким образом, чтобы выполнялось включение:

$$X(T|x_1, u_1) \subseteq X_T. \quad (2.1)$$

Введем множество

$$X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : \exists u_1(\cdot|x_1) \in U_1, X(T|x_1, u_1) \subseteq X_T\},$$

которое назовем *множеством замыкания* — множество всех состояний, для которых найдется управление, удовлетворяющее включению (2.1). Полагаем, что множество замыкания X_1 не пустое.

На Δ_0 , для позиции процесса управления $(0, x_0)$, программа $u_0(\cdot|x_0) \in U_0$ должна быть такой, чтобы продолжить процесс управления для любой точки множества $X(T_1|x_0, u_0)$, выбрав управление $u_1(\cdot|x_1)$, удовлетворяющее (2.1).

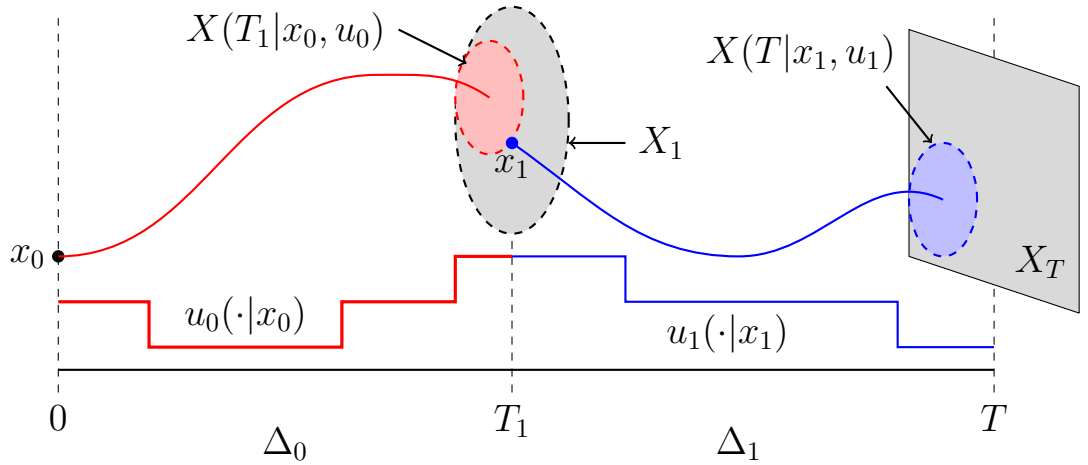


Рис. 2.1: Стратегия управления с одним моментом замыкания.

Определение 2.2 Стратегия управления $\pi_1(0, x_0)$ с одним моментом замыкания T_1 является *допустимой*, если для $u_0(\cdot|x_0) \in U_0$ выполняется следующее включение

$$X(T_1|x_0, u_0) \subseteq X_1.$$

Определим оптимальную стратегию $\pi_1(0, x_0)$ с одним моментом замыкания на $\{\Delta_0, \Delta_1\}$.

Можно заметить, что произвольная допустимая стратегия не лучше допустимой стратегии управления следующего вида

$$\pi_1 = \{u_0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0(\cdot|x_0))\},$$

где на Δ_1 выбраны оптимальные гарантирующие программы $u_1^0(\cdot|x_1)$ для точек x_1 .

Каждая такая программа $u_1^0(\cdot|x_1)$ при фиксированном x_1 является решением задачи оптимального управления

$$V_1(x_1) = \min_{u_1} \max_{w_1} c'x(T),$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu_1(t) + Mw_1(t),$$

$$x(T_1) = x_1,$$

$$u_1(t) \in U, \quad t \in \Delta_1,$$

$$x(T) \in X_T \quad \forall w_1(\cdot) \in W_1.$$

Определение 2.3 Допустимая стратегия управления

$$\pi_1^0 = \{u_0^0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0)\}$$

называется *оптимальной*, если $V(\pi_1^0) = \min V(\pi_1)$, где минимум ищется среди всех допустимых стратегий.

Поэтому оптимальный выбор управления $u_0(\cdot|x_0)$ на промежутке Δ_0 определяет при решении задачи

$$V_0(x_0) = \min_{u_0} \max_{w_0} V_1(x(T_1|x_0, u_0, w_0)) \quad (2.2)$$

оптимальную стратегию с одним моментом замыкания:

$$\pi_1^0(0, x_0) = \{u_0^0(\cdot|x_0); u_1^0(\cdot|x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0)\}.$$

Таким образом, качество оптимальной стратегии $\pi_1^0(0, x_0)$ с одним моментом замыкания определяется следующим образом

$$V_0(x_0) = \min_{u_0} \max_{w_0} \min_{u_1} \max_{w_1} c'x(T),$$

тогда как качество оптимальной гарантирующей программы $u^0(\cdot)$ находится из равенства

$$J(x_0) = \min_{u_0} \min_{u_1} \max_{w_0} \max_{w_1} c'x(T).$$

Отсюда получаем, что

$$V_0(x_0) \leq J(x_0).$$

При решении задачи до начала процесса нужно знать лишь начальную оптимальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$. Оптимальное управление на $u_1^0(\cdot|x_1)$, $x_1 \in X_1$, заранее не строится, а вычисляется в момент замыкания T_1 , когда будет измерено текущее состояние $x^*(T_1)$. Это означает, что необходимо иметь в наличии методы вычисления оптимальной начальной программы $u_0^0(\cdot|x_0)$, т.е. методы решения задачи (2.2).

2.3 Аппроксимация множеств замыкания

Рассмотрим множество

$$X_1(\alpha) = \{x \in X_1 : V_1(x) \leq \alpha\}, \quad (2.3)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и все множества $X_1(\alpha) \neq \emptyset$.

Это множество также будем называть множеством замыкания.

Задачи по нахождению $V_1(x_1)$ и $V_0(x_0)$ с учетом обозначения (2.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &= \min_{u_1, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_1(t) + Mw_1(t), \\ x(T_1) &= x_1, \\ u_1(t) &\in U, \quad t \in \Delta_1, \\ x(T) &\in X_T(\alpha), \quad \forall w_1(\cdot) \in W_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$X_T(\alpha) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : g_{\min} \leq Hx \leq g_{\max}, \quad c'x \leq \alpha\},$$

и

$$\begin{aligned}
V_0(x_0) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\
x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \\
x(0) &= x_0, \\
u_0(t) &\in U, \quad t \in \Delta_0, \\
x(T_1) &\in X_1(\alpha), \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Задача (2.5) определяет оптимальную начальную программу $u_0^0(\cdot|x_0)$. Поэтому нужно описать множество $X_1(\alpha)$ при достаточно широком интервале α . Заметим, что множество $X_1(\alpha)$ является выпуклым многогранником. Это следует из того, что каждая задача (2.4), (2.5) сводится к задаче линейного программирования и при любом фиксированном значении α множество Лебега $X_1(\alpha)$ — выпуклый многогранник (может быть не ограниченным).

Нужно отметить, что точное описание множеств $X_1(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представляет собой весьма трудную задачу. Поэтому, чтобы обойти эту проблему, рассматривается аппроксимация множеств $X_j(\alpha)$ многогранниками $\bar{X}_j(\alpha)$, нормали к граням которых выбраны так, что они не зависят от α . Также желательно ограничить значения α некоторым интервалом $[\alpha_{min}; \alpha_{max}]$.

Если $u^0(\cdot)$ — оптимальная гарантирующая программа, то

$$V_0(x_0) \leq J(x_0)$$

и, значит, можно взять в качестве α_{max} значение $J(x_0)$, т.е.

$$\alpha_{max} = J(x_0).$$

Если в задаче не существует оптимальной гарантирующей программы, то оценить значение α_{max} можно по решению задачи оптимального управления

$$\begin{aligned}
\alpha_{max} &= \max_u c'y(T), \\
y(t+1) &= Ay(t) + Bu(t), \\
y(0) &= x_0, \\
u(t) &\in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\
y(T) &\in X_T.
\end{aligned}$$

Аналогично, для оценки значения параметра снизу, можно решить задачу

$$\alpha_{min} = \min_u c'y(T),$$

$$\begin{aligned}
y(t+1) &= Ay(t) + Bu(t), \\
y(0) &= x_0, \\
u(t) &\in U, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\
y(T) &\in X_T.
\end{aligned}$$

Очевидно, что $X_1(\alpha_{min}) \subseteq X_1(\alpha_{max}) \subseteq X_1$.

Как было сказано ранее, чтобы иметь некоторые характеристики множеств $X_1(\alpha)$, предлагается аппроксимировать эти множества многогранником (многогранным множеством в общем случае) $\bar{X}_1(\alpha)$.

Аппроксимирующий многогранник $\bar{X}_1(\alpha)$ множества замыкания $X_1(\alpha)$ строится следующим образом. Выбирается система векторов

$$p_{1i} \in \mathbb{R}^n, \quad \|p_{1i}\| = 1, \quad i = \overline{1, m_1},$$

которая образует систему нормалей $\bar{X}_1(\alpha)$. Считается, что эта система хорошо аппроксимирует множества замыкания при всех значениях α .

Определим $\bar{X}_1(\alpha)$ следующим образом:

$$\bar{X}_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : P_1 x_1 \leq f_1(\alpha)\},$$

где

$$\begin{aligned}
P_1 &= \left(p'_{1i} \right)_{i = \overline{1, m_1}}, \\
f_1(\alpha) &= \left(f_{1i}(\alpha) \right)_{i = \overline{1, m_1}},
\end{aligned}$$

$$f_{1i}(\alpha) = \max_{x_1} p'_{1i} x_1, \quad x_1 \in X_1(\alpha), \quad i = \overline{1, m_1}. \quad (2.6)$$

При достаточно большом наборе нормалей описанная аппроксимация будет достаточно точно приближать множество $X_1(\alpha)$.

Задачу построения субоптимальной начальной программы аппроксимируем задачей:

$$\begin{aligned}
V_0(x_0) &= \min_{\alpha, u_0} \alpha, \\
x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \\
x(0) &= x_0, \\
u_0(t) &\in U, \quad t \in \Delta_0, \\
P_1 x(T_1) &\leq f_1(\alpha) \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0.
\end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта задача сводится к эквивалентной задаче:

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \min_{\alpha, u_0} \alpha, \\ \sum_{t \in \Delta_0} P_1 A^{T_1-t-1} B u_0(t) &\leq f_1(\alpha) - P_1 A^{T_1} x_0 - w_0^*, \\ u_{\min} &\leq u_0(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_0, \end{aligned}$$

где

$$w_0^* = (w_{0i}^*, \quad i = \overline{1, m_1}), \quad w_{0i}^* = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_0} \|p'_{1i} A^{T_1-t-1} M\|_1.$$

В [3] структура множества $X_1(\alpha)$ не была исследована и для нахождения оптимальной начальной программы использовался следующий итерационный алгоритм. На каждой итерации решались задачи вида

$$f_{1i}(\alpha) = \max_{x_1} p'_{1i} x_1, \quad x_1 \in X_1(\alpha), \quad i = \overline{1, m_1},$$

для текущего приближения параметра $\alpha = \alpha_k$ и текущей матрицы $P_1(k)$, а затем решалась задача допустимости:

найти управление $u_0(\cdot) \in U_0$ такое, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \\ x(0) &= x_0, \quad t \in \Delta_0, \\ P_1(k)x(T_1) &\leq f_1(\alpha_k) \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0. \end{aligned}$$

Значение α_{k+1} находится каким-либо методом минимизации функции одной переменной.

Отметим, что вышеописанный алгоритм на каждой итерации заново строит аппроксимацию множества замыкания для текущего значения параметра α . Также количество итераций по изменению α может оказаться достаточно большим. Поэтому использовать его, например, для задачи построения реализаций оптимальных обратных связей в режиме реального времени, не представляется возможным.

2.4 Построение субоптимальной начальной программы

Далее предлагается алгоритм построения субоптимальной начальной программы, не требующий применения итерационной процедуры и который

существенно снижает трудоемкость. Разработка этого алгоритма основывается на исследовании зависимости множеств X_1 от параметра α .

Теорема 2.1 Для аппроксимаций множества замыкания имеет место представление

$$\bar{X}_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : P_1 x_1 \leq f_1(\alpha)\}, \quad \alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}], \quad (2.8)$$

где функция $f_1(\alpha)$ является линейной функцией параметра α .

В статье [2] доказывается утверждение о линейности функции $f_1(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}]$.

Далее установить справедливость (2.8) позволяет сведение задачи (2.6) вычисления значений $f_{1i}(\alpha)$ сначала к детерминированной задаче оптимального управления со свободным левым концом траектории вида:

$$\begin{aligned} f_{1i}(\alpha) &= \max_{x_1, u_1} p'_{1i} x_1, \\ y(t+1) &= Ay(t) + Bu_1(t), \\ y(T_1) &= x_1, \\ u_1(t) &\in U, \quad t \in \Delta_1, \\ g_{min} + \gamma_1 &\leq Hy(T) \leq g_{max} - \gamma_1, \\ c'x(T) &\leq \alpha - \gamma_{10}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{10} = w_{max} \sum_{t \in \Delta_1} \|c'A^{T-t-1}M\|_1,$$

$$\gamma_1 = (\gamma_{1i}, i = 1, \dots, m_1) : \gamma_{1i} = w_{max} \sum_{t \in \Delta_1} \|h'_i A^{T-t-1}M\|_1, \quad i = \overline{1, m_1}.$$

Затем задача сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} f_{1i}(\alpha) &= \max_{x_1, u_1} p'_{1i} x_1, \\ G_1 x_1 + \sum_{t \in \Delta_1} G_1 D_1(t) u_1(t) &\leq g_T + \lambda_T \alpha, \\ u_{min} &\leq u_1(t) \leq u_{max}, \quad t \in \Delta_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} G_1 &= P_T A^{T-T_1}, \\ D_1(t) &= A^{T_1-t-1} B, \quad t \in \Delta_1, \end{aligned}$$

$$P_T = \begin{pmatrix} -H \\ H \\ c' \end{pmatrix}, \quad \lambda_T = \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_T = \begin{pmatrix} -g_{\min} - \gamma_1 \\ g_{\max} - \gamma_1 \\ -\gamma_{10} \end{pmatrix}.$$

Задача (2.9) — снова задача параметрического линейного программирования, но теперь она зависит от скалярного параметра α . Это значительно упрощает ее исследование.

Оптимальное значение задачи максимизации (2.9), функция $f_{1i}(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, является кусочно-линейной вогнутой [1]. В частном случае, когда ранг матрицы G_1 не превосходит n , эта функция является линейной [2].

Установить структуру кусочно-линейной функции $f_1(\alpha)$ позволяет анализ двойственной к (2.9) задачи, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{1i}(\alpha) &= \min_{y, v_*, v^*} \left((g_T + \lambda_T \alpha)' y + \sum_{t \in \Delta_1} (u'_{\max} v^*(t) - u'_{\min} v_*(t)) \right), \\ G'_1 y &= p_{1i}, \quad y \geq 0, \\ (G_1 D_1(t))' y + v^*(t) - v_*(t) &= 0, \\ v^*(t) &\geq 0, \quad v_*(t) \geq 0, \quad t \in \Delta_1. \end{aligned}$$

Двойственную задачу можно далее упростить, поскольку в ней переменные v_*, v^* можно выразить аналитически:

$$v^*(t) = [-D_1(t)' p_{1i}]_+, \quad v_*(t) = [D_1(t)' p_{1i}]_+, \quad t \in \Delta_1,$$

где $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ — положительная срезка.

В результате будет получена следующая задача:

$$\begin{aligned} f_{1i}(\alpha) &= \min_y (g_T + \lambda_T \alpha)' y + c_{1i}, \\ G'_1 y &= p_{1i}, \quad y \geq 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$c_{1i} = \sum_{t \in \Delta_1} (u'_{\max} v^*(t) - u'_{\min} v_*(t)) = \sum_{t \in \Delta_1} (u'_{\max} [-D_1(t)' p_{1i}]_+ - u'_{\min} [D_1(t)' p_{1i}]_+).$$

Отметим, что для задачи (2.10) переменной оптимизации является только вектор y размерности $2m+1$. По решению полученной задачи также можно установить и выполнение предположения о непустоте множества замыкания, которое гарантируется конечностью оптимального значения в (2.10) при минимальном значении α .

Исследуем упрощенную двойственную задачу (2.10) при фиксированном

α . При решении этой задачи могут иметь место три случая:

- 1) задача имеет решение y_{1i} ;
- 2) целевая функция задачи неограничена снизу, т.е. $f_{1i}(\alpha) = -\infty$;
- 3) задача недопустима, т.е. $f_{1i}(\alpha) = +\infty$.

Случай 2) означает, что при данном α множество планов прямой задачи пусто, т.е. $X_1(\alpha) = \emptyset$.

Случай 3) — целевая функция прямой задачи неограничена сверху в этом направлении. Если данный случай реализуется, то необходимо удалить вектор y_{1i} из системы нормалей, так как в направлении p_{1i} множество $X_1(\alpha)$ неограничено.

Если реализуется случай 1), на основе анализа чувствительности для прямой задачи по параметру α находим промежуток $[\alpha_*; \alpha^*]$, $\alpha \in [\alpha_*; \alpha^*]$, для которого сохраняется оптимальный базис задачи линейного программирования (2.9) и двойственное решение задачи (2.10) остается постоянным $y_{1i}(\bar{\alpha}) \equiv y_{1i}(\alpha)$, $\forall \bar{\alpha} \in [\alpha_*; \alpha^*]$.

Определим отрезок $[\alpha_*; \alpha^*]$ следующим образом. Рассмотрим задачу (2.9). Эта задача зависит от скалярного параметра α и является параметрической задачей линейного программирования на максимум. На основе анализа чувствительности для задачи (2.9) по параметру α можно найти промежуток $[\alpha_*, \alpha^*]$, для которого сохраняется оптимальный базис задачи (2.9). Действительно, запишем эту задачу следующим образом

$$\begin{cases} c'z \rightarrow \max, \\ Gz \leq w + s\alpha, \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_1 & G_1 D_1(t), \ t \in \Delta_1 \\ \hline 0 & E \\ 0 & -E \end{array} \right],$$

$$w = (g_T - \gamma_1, \ u_{\max}),$$

$$s = (\lambda_T, \ u_{\min}).$$

Решаем задачу (2.11) при фиксированном α . Пусть оптимальный план задачи (2.11) — z^* с базисным множеством индексов I_B^* , $|I_B^*| = n + r(T - T_1)$. Для базисных индексов $i \in I_B^*$ на оптимальном плане z^* ограничения задачи (2.11) активны:

$$G_i z^* = w_i + s_i \alpha,$$

тогда

$$\begin{cases} G_B z^* = w_B + s_B \alpha, \\ G_H z^* \leq w_H + s_H \alpha, \end{cases} \quad w_B = \begin{pmatrix} w_i, \\ i \in I_B \end{pmatrix}, \quad w_H = \begin{pmatrix} w_i, \\ i \in I_H \end{pmatrix},$$

$$s_B = \begin{pmatrix} s_i, \\ i \in I_B \end{pmatrix}, \quad s_H = \begin{pmatrix} s_i, \\ i \in I_H \end{pmatrix}, \quad \det(G_B) \neq 0.$$

Поэтому $z^* = G_B^{-1}(w_B + s_B \alpha)$. Подставим найденное z^* во второе соотношение (неравенство). Получим, что

$$G_H G_B^{-1}(w_B + s_B \alpha) \leq w_H + s_H \alpha.$$

Отсюда

$$G_i G_B^{-1}(w_B + s_B \alpha) \leq w_i + s_i \alpha, \quad i \in I_H.$$

Таким образом, мы можем записать, что

$$\begin{cases} \alpha \geq \frac{r_i}{l_i}, & \text{если } l_i < 0, \\ \alpha \leq \frac{r_i}{l_i}, & \text{если } l_i > 0, \end{cases}$$

где

$$l_i = G_i G_B^{-1}(s_B - s_i), \quad r_i = w_i - G_i G_B^{-1} w_B.$$

Значит, промежуток, на котором сохраняется оптимальный базис задачи (2.9) будет $[\alpha_*, \alpha^*]$, где

$$\alpha_* = \min_{\substack{i \in I_H \\ l_i < 0}} \frac{r_i}{l_i}, \quad \alpha^* = \max_{\substack{i \in I_H \\ l_i > 0}} \frac{r_i}{l_i}.$$

Далее используем алгоритм, описанный в статье [6]. Этот алгоритм позволяет:

- 1) построить разбиение отрезка $[\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$ на участки линейности функции $f_{1i}(\alpha)$;
- 2) уточнить нижнюю границу $\alpha_{\min}$;
- 3) установить, что множество замыкания $X_1(\alpha_{\max})$ не является пустым.

Применяя указанный алгоритм, найдем число K_i и последовательность точек

$$\alpha_{1i}^1 = \alpha_{\max} > \alpha_{1i}^2 > \dots > \alpha_{1i}^{K_{1i}} > \alpha_{1i}^{K_{1i}+1} = \alpha_{\min},$$

а также двойственное решение y_{1i}^k задачи (2.10), которое остается постоянным на каждом промежутке $[\alpha_{1i}^{k+1}; \alpha_{1i}^k)$ значений параметра, $k = 1, 2, \dots, K_{1i}$. Найденные величины позволяют представить функции $f_{1i}(\alpha)$ в виде

$$f_{1i}(\alpha) = \min_{k=1,2,\dots,K_{1i}} \{f_{1i}^k + \lambda'_T y_{1i}^k (\alpha - \alpha_k)\}, \quad (2.12)$$

где $\alpha_k \in [\alpha_{1i}^k; \alpha_{1i}^{k+1})$, $y_{1i}^k = y_{1i}(\alpha_k)$, $f_{1i}^k = f_{1i}(\alpha_k)$.

Таким образом, мы окончательно имеем простое представление для внешней аппроксимации множества $X_1(\alpha)$, и, как следует из теоремы 2.1 она представляется совокупностью ограничений-неравенств с линейно зависящей от параметра α правой частью:

$$\bar{X}_1(\alpha) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n : P_1 x_1 \leq g_1 + \lambda_1 \alpha\}, \quad \alpha \in [\alpha_{min}; \alpha_{max}],$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{1i} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} g_{1i} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix},$$

где

$$P_{1i} = \begin{pmatrix} p'_{1i} \\ |K_{1i}| \text{ раз} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix}, \quad g_{1i} = \begin{pmatrix} f_{1i}^k - \lambda'_2 y_{1i}^k \alpha_k \\ k \in K_{1i} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1i} = \begin{pmatrix} \lambda'_2 y_{1i}^k \\ k \in K_{1i} \\ i = 1, \dots, m_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь в матрице P_{1i} строка p'_{1i} (i -я нормаль) повторяется K_{1i} раз.

Линейность существенно упрощает задачу построения оптимальной начальной программы управления в составе стратегии с одним моментом замыкания.

Строго говоря, в силу аппроксимации, мы получим не оптимальную, а субоптимальную начальную программу $\bar{u}_0(\cdot|x_0)$, и она будет найдена как решение следующей задачи оптимального гарантированного управления:

$$\begin{aligned} V_0(x_0) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_0(t) + Mw_0(t), \\ x(0) &= x_0, \\ u_0(t) &\in U, \quad t \in \Delta_0, \\ P_1 x(T_1) &\leq g_1 + \lambda_1 \alpha \quad \forall w_0(\cdot) \in W_0, \\ \alpha_{min} &\leq \alpha \leq \alpha_{max}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Задача (2.13) в свою очередь сводится к задаче линейного программиро-

вания вида:

$$\begin{aligned}
V_0(x_0) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\
\sum_{t \in \Delta_0} P_1 A^{T_1-t-1} B u_0(t) - \lambda_1 \alpha &\leq g_1 - \gamma_0 - P_1 A^{T_1} x_0, \\
u_{\min} &\leq u_0(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_0, \\
\alpha_{\min} &\leq \alpha \leq \alpha_{\max},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$\gamma_0 = (\gamma_{0i}, i = 1, 2, \dots, m_1) : \gamma_{0i} = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_0} \|p'_{1i} A^{T_1-t-1} M\|_1.$$

Причем, в (2.14) переменными оптимизации выступают u_0 и α .

В результате мы получим не оптимальную, а субоптимальную начальную программу. Она находится как решение задачи оптимального гарантированного управления (2.13), которая эквивалентна задаче (2.14) линейного программирования.

Заметим, что число ограничений в задаче (2.14) может оказаться большим. Это зависит от требуемой точности аппроксимации множества $X_1(\alpha)$. Следует отметить, что задача (2.14) решается только один раз и сразу дает субоптимальное решение. Это основное отличие от итеративного метода.

2.5 Выводы

Таким образом, в данной главе получены следующие результаты.

Определена стратегия управления с одним моментом замыкания, где под замыканием понимается такой момент времени T_1 , в который станет известно точное состояние системы управления и новое управление будет найдено для этого состояния. Получены условия для допустимости стратегии управления и ее оптимальности, сформулированы задачи оптимального управления, по которым находится оптимальная стратегия управления (ее оптимальная начальная программа).

Введено множество замыкания X_1 , как множество таких состояний системы управления в момент замыкания T_1 , для которых можно построить гарантирующую оптимальную программу на промежутке Δ_1 , т.е. после момента замыкания. Тогда это множество таких состояний, из которых можно с гарантией попасть на терминальное множество X_T . Дополнительно введены множества $X_1(\alpha) \subset X_1$, состоящие из тех состояний, для которых гаранти-

рованное значение критерия качества не превосходит α .

Используя полученное представление $\bar{X}_1(\alpha)$, формулируется задача построения субоптимальной начальной программы для стратегии управления. Полученная задача является задачей линейного программирования.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ СО МНОГИМИ МОМЕНТАМИ ЗАМЫКАНИЯ

В данной главе рассматривается задача построения стратегии управления со многими моментами замыканиями. Сначала понятия и определения главы 2 развиваются на случай многих моментов замыкания, а затем формулируются необходимые задачи оптимального управления для нахождения стратегии управления.

3.1 Стратегия управления со многими моментами замыкания

Рассмотрим построение стратегий управления с многократными замыканиями. Предполагаем, что имеется N фиксированных моментов замыкания

$$T_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

для которых предполагается, что:

1. в каждый момент можно будет измерить текущее состояние системы $x^*(T_j)$;
2. на основе измерения $x^*(T_j)$ можно выбрать новое управление $u_j(\cdot|x^*(T_j)) \in U_j$ для интервала Δ_j .

Решение системы (1.1) будем искать в виде стратегии управления π_N , которая в свою очередь определяется рекуррентно.

Как и в главе 2, стратегия с одним моментом замыкания T_N определяется на двух последних промежутках:

$$\pi_1(T_{N-1}, x_{N-1}) = \{u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}); u_N(\cdot|x_N), x_N \in X(T_N|x_{N-1}, u_{N-1})\}.$$

Стратегия с $N - j$ определяется на основе стратегии $N - j - 1$ моментом замыкания и дополняется начальной программной u_j на промежутке Δ_j :

$$\pi_{N-j}(T_j, x_j) = \{u_j(\cdot|x_j); \pi_{N-j-1}(T_{j+1}, x_{j+1}), x_{j+1} \in X(T_{j+1}|x_j, u_j)\},$$

где $j = N - 2, N - 3, \dots, 1$.

Таким образом, стратегия управления с N моментами замыкания имеет вид:

$$\pi_N(0, x_0) = \{u_0(\cdot|x_0); \pi_{N-1}(T_1, x_1), x_1 \in X(T_1|x_0, u_0)\}.$$

Далее необходимо построить субоптимальную начальную программу $\bar{u}_0(\cdot|x_0)$, необходимую для начала процесса управления.

3.2 Построение субоптимальной начальной программы

В момент времени $T_{N+1} = T$, зададим множество

$$X_{N+1} = X_T.$$

Далее, рекуррентно определим множества замыкания

$$X_N, \dots, X_1$$

и управления

$$u_{N-1}(\cdot|x_{N-1}) \in U_{N-1}, \dots, u_1(\cdot|x_1) \in U_1$$

так, чтобы

$$X_j = \{x_j \in \mathbb{R}^n : \exists u_j(\cdot|x_j) \in U_j, X(T_{j+1}|x_j; u_j) \subseteq X_{j+1}\},$$

$$j = \overline{1, N}.$$

Как видно из построения, множество замыкания X_j состоит из всех состояний x_j , для которых существует управление $u_j(t|x_j)$, $t \in \Delta_j$, управляющее системой с гарантией из состояния $x(T_j) = x_j$ в следующее множество замыкания X_{j+1} .

Предположение 3.1 Все множества замыкания $X_1, X_2, \dots, X_N$ не пусты.

Данная процедура описывает построение последовательности множеств замыкания и управлений, а также гарантирует, что динамическая система может быть последовательно переведена из одного заданного состояния в следующее, в определенные моменты времени T_j , при условии, что для каждого множества замыкания найдется подходящее управление.

Стратегия управления $\pi_N(0, x_0)$ с N моментами замыкания является *допустимой*, если её начальная программа управления $u_0(\cdot|x_0)$ такова, что выполнено условие:

$$X(T_1|x_0, u_0) \subseteq X_1.$$

Для определения оптимальной стратегии управления запишем уравнения Беллмана:

$$\begin{aligned} V_N(x_N) &= \min_{u_N} \max_{w_N} c'x(T|x_N, u_N, w_N), \quad X(T|x_N, u_N) \subseteq X_T, \\ V_j(x_j) &= \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)), \quad j = N-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решения уравнений (3.1) дают оптимальные программы u_j , которые составляют оптимальную стратегию управления.

Оптимальные программы, определяющие оптимальную стратегию управления $\pi_{N-j}^0(T_j, x_j)$, находятся как:

$$u_j^0(\cdot|x_j) = \arg \min_{u_j} \max_{w_j} V_{j+1}(x(T_{j+1}|x_j, u_j, w_j)).$$

Как и в случае стратегии с одним моментом замыкания, определим множества $X_j(\alpha)$ как множества Лебега для функции оптимального значения $V_j(x_j)$, $x_j \in X_j$.

Множество $X_j(\alpha)$ определяется как:

$$X_j(\alpha) = \{x \in X_j : V_j(x) \leq \alpha\}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}.$$

Как обсуждалось ранее в главе 2, точное построение множеств замыкания — сложная задача, поэтому будем строить их внешние аппроксимации многогранниками с заданными нормальными для граней.

Для терминального множества аппроксимация совпадает с самим множеством, все остальные аппроксимируются.

Для терминального множества имеем:

$$\bar{X}_{N+1}(\alpha) = X_{N+1}(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_{N+1}x \leq g_{N+1} + \lambda_{N+1}\alpha\}$$

где

$$P_{N+1} = P_T, \quad g_{N+1} = g_T, \quad \lambda_{N+1} = \lambda_T.$$

Для внешней аппроксимации множества $X_j(\alpha)$, $j = N, N-1, \dots, 1$ имеем

представление

$$\bar{X}_j(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_j x \leq f_j(\alpha)\},$$

где

$$f_j(\alpha) = (f_{ji}(\alpha), i = 1, 2, \dots, m_j).$$

Определим $f_{ji}(\alpha)$:

$$f_{ji}(\alpha) = \max_{x_j} p'_{ji} x_j, \quad x_j \in X_j(\alpha), \quad (3.3)$$

и матрицу P_j :

$$P_j = \begin{pmatrix} p'_{j1} \\ \vdots \\ p'_{jm_j} \end{pmatrix}$$

размерности $P_j \in \mathbb{R}^{m_j \times n}$.

Аналогично теореме 2.1 можно показать, что аппроксимация множеств замыкания $\bar{X}_j(\alpha)$ представима в виде

$$\bar{X}_j(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : P_j x \leq g_j + \lambda_j \alpha\}, \quad \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}],$$

где

$$g_j = \begin{pmatrix} g'_{j1} \\ \vdots \\ g'_{jm_j} \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda'_{j1} \\ \vdots \\ \lambda'_{jm_j} \end{pmatrix}.$$

Данное утверждение дает представление аппроксимации в зависимости от параметра α . Для построения всех аппроксимаций получим следующий вид для задачи (3.3):

$$\begin{aligned} f_{ij}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p'_{ji} x_j, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \\ x(T_j) &= x_j, \\ u_j(t) &\in U, \quad t \in \Delta_j, \\ P_{j+1}x(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha, \quad \forall w_j(\cdot) \in W_j. \end{aligned}$$

Далее эту задачу сводим к детерминированной задаче управления на промежутке Δ_j :

$$\begin{aligned}
f_{ij}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p'_{ji} x_j, \\
y(t+1) &= Ay(t) + Bu_j(t), \\
y(T_j) &= x_j, \\
u_j(t) &\in U, \quad t \in \Delta_j, \\
P_{j+1}y(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha - \gamma_j,
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_j = (\gamma_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m_j) : \gamma_{ji} = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} \|p'_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} M\|_1.$$

Так как

$$y(T_{j+1}) = A^{T_{j+1}-T_j} x_j + \sum_{t \in \Delta_j} A^{T_{j+1}-t-1} Bu(t),$$

то последняя задача запишется в виде:

$$\begin{aligned}
f_{ji}(\alpha) &= \max_{x_j, u_j} p'_{ji} x_j, \\
G_j x_j + \sum_{t \in \Delta_j} G_j D_j(t) u_j(t) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1} \alpha - \gamma_j, \\
u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}
G_j &= P_{j+1} A^{T_{j+1}-T_j} \in \mathbb{R}^{m_{j+1} \times n}, \\
D_j(t) &= A^{T_j-t-1} B \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad t \in \Delta_j.
\end{aligned}$$

Далее, используя алгоритм, описанный в главе 2, можно уточнить вид функций $f_{ji}(\alpha)$ на промежутке $[\alpha_{ji}^{k+1}, \alpha_{ji}^k]$, $k = 1, 2, \dots, k_{ji}$:

$$f_{ji}(\alpha) = \min_{k=1,2,\dots,k_{ji}} \{f_{ji}^k + \lambda'_{j+1} y_{ji}^k (\alpha - \alpha^k)\},$$

где $\alpha^k \in [\alpha_{ji}^k, \alpha_{ji}^{k+1}]$, y_{ji}^k – двойственный план, который остается постоянным на каждом промежутке $[\alpha_{ji}^k, \alpha_{ji}^{k+1}]$, $f_{ji}^k = f_{ji}^k(\alpha^k)$.

Запишем двойственную задачу к задаче линейного программирования (3.4), она имеет вид:

$$f_{ji}(\alpha) = \min_{y, v_*, v^*} (g_{j+1} + \lambda_{j+1} - \gamma_j)'y + \sum_{t \in \Delta_j} (u'_{\max} v^*(t) - u'_{\min} v_*(t)),$$

$$\begin{aligned} G'_j y &= p_{ji}, \quad y \geq 0, \\ (G_j D_j(t))' y + v^*(t) - v_*(t) &= 0, \\ v^*(t) &\geq 0, \quad v_*(t) \geq 0, \quad t \in \Delta_j. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$v_* = [D_j(t)' p_{ji}]_+, \quad v^* = [D_j(t)' p_{ji}]_+, \quad t \in \Delta_j,$$

где $[z]_+ = \max\{z, 0\}$ – положительная срезка для $z \in \mathbb{R}$; $[z]_+ = ([z_j]_+, j = 1, \dots, r)$, $z \in \mathbb{R}^r$, и обозначив

$$c_{ji} = \sum_{t \in \Delta_j} (u'_{\max} v^*(t) - u'_{\min} v_*(t)),$$

последняя задача запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{ji}(\alpha) &= \min_y (g_{j+1} + \lambda_{j+1} \alpha - \lambda_j)'y + c_{ji}, \\ G'_j y &= p_{ji}, \quad y \geq 0 \quad (y \in \mathbb{R}^{m_{j+1}}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Причем, размерность задач вида (3.5) составляет $n \times m_{j+1}$. Процедура решения достаточно трудоемкая, что связано с большим числом задач линейного программирования, хотя она выполняется однократно, до начала процесса управления. Поэтому для установления отрезка $[\alpha_*, \alpha^*]$ будем пользоваться описанной процедурой из главы 2. После этого, фактически, согласно (3.2), известны явные описания множеств замыкания, которые не нуждаются в корректировке в процессе управления.

Субоптимальная начальная программа $\bar{u}_j^0(\cdot | x^*(T_j))$ для измеренного состояния $x^*(T_j)$ в момент замыкания T_j определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} V_j(x^*(T_j)) &= \min_{u_j, \alpha} \alpha, \\ x(t+1) &= Ax(t) + Bu_j(t) + Mw_j(t), \\ x(T_j) &= x^*(T_j), \\ u_j(t) &\in U, \quad t \in \Delta_j, \\ P_{j+1}x(T_{j+1}) &\leq g_{j+1} + \lambda_{j+1}\alpha, \quad \forall w_j(\cdot) \in W_j. \end{aligned}$$

Эквивалентная задача линейного программирования выглядит следую-

щим образом:

$$\begin{aligned}
V_j(x^*(T_j)) &= \min_{u_0, \alpha} \alpha, \\
\sum_{t \in \Delta_j} P_{j+1} A^{T_{j+1}-t-1} B u_j(t) - \lambda_{j+1} \alpha &\leq g_{j+1} - \gamma_j - P_{j+1} A^{T_{j+1}} x^*(T_j), \\
u_{\min} &\leq u_j(t) \leq u_{\max}, \quad t \in \Delta_j,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где γ_j определяется как:

$$\gamma_j = (\gamma_{ji}, i = 1, \dots, m_j) : \gamma_{ji} = w_{\max} \sum_{t \in \Delta_j} \|p'_{j+1,i} A^{T_{j+1}-t-1} + M\|_1$$

Таким образом, для любого j в момент времени T_j субоптимальная начальная программа $\bar{u}_j^0(\cdot | x_j)$ в составе каждой стратегии находится из решения задачи (3.5), которая сводится к задаче линейного программирования (3.6).

3.3 Выводы

Метод построения оптимальной гарантирующей программы описан во многих статьях и хорошо разработан [3]. Этот метод использует линейность системы, терминальных ограничений и критерия качества, чтобы свести исходную задачу к детерминированной задаче оптимального управления. В этой задаче требуется перевести систему без возмущения на «суженное» терминальное множество, которое определяется оценками для наихудших реализаций возмущения, вычисленных направлений, задаваемых строками матрицы терминальных ограничений. Таким образом, оптимальная гарантирующая программа это функция времени, одна для всех возможных возмущений, планируется до начала процесса управления и по его ходу не корректируется. То есть при вычислении программы не используется информация о состоянии системы в будущем. Основное преимущество — простота построения с вычислительной точки зрения.

Более лучшее решение в виде оптимальной обратной связи (применение динамического программирования). Поэтому был предложен подход, который предполагает построение решения задачи в виде не программы, а стратегии управления, которая представляет собой симбиоз между оптимальной гарантирующей программой и динамическим программированием.

В дипломной работе основным понятием обратной связи является один или несколько моментов времени, которые носят название моментов замыка-

ния системы управления (моменты коррекции управления).

Основное предположение, что до начала процесса управления известно, что в моменты замыкания T_j можно будет точно и полно измерить текущее состояние объекта управления и скорректировать управление на интервале Δ_j .

Если у нас один момент замыкания T_1 , то стратегия управления π_1 , состоит из управления u_0 на промежутке управления Δ_0 (начальная программа) и совокупности управлений u_1 на Δ_1 для всех возможных состояний системы в момент замыкания в силу управления u_0 .

Таким образом, рассматриваются две задачи. Задача на промежутке Δ_1 при любом фиксированном, начальном состоянии x_1 , т.е. находится оптимальная гарантирующая программа для T_1 , x_1 . Она сводится сначала к детерминированной задаче оптимального управления, а затем к задаче линейного программирования.

Теперь решаем задачу оптимального гарантированного управления на промежутке Δ_0 . В этой задаче переменными оптимизации являются начальная программа u_0 и параметр α , который оценивает наихудшее значение критерия качества V_1 . Цель управления — гарантированный перевод системы на множество замыкания $X_1(\alpha)$ с минимальным значением α .

Точно построить множество $X_1(\alpha)$ можно только в исключительных случаях. Поэтому это множество аппроксимируется многогранником. На каждой итерации заново строится аппроксимация множества замыкания для текущего значения α . Количество итераций по изменению α может оказаться достаточно велико. Таким образом, эта процедура достаточно трудоемка. Снизить трудоемкость этого алгоритма позволило установление того факта, что множество X_1 зависит от α линейно.

По сравнению с одним моментом замыкания задача со многими моментами замыкания, вообще говоря, приводит к построению более эффективной оптимальной стратегии, так как коррекция управления производится в большем числе точек.

ГЛАВА 4

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данной главе предложенный метод построения оптимальной стратегии иллюстрируется на двух примерах. Результаты численных экспериментов показывают улучшение качества управления для оптимальной стратегии по сравнению с оптимальной гарантирующей программой при соразмерной трудоемкости их вычисления.

4.1 Пример задачи построения стратегии с одним моментом замыкания

Рассмотрим задачу из [2]:

$$\begin{aligned} x_2(T) &\rightarrow \max, \\ x(t+1) &= \begin{pmatrix} 0.9950 & 0.0998 \\ -0.0998 & 0.9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.0049 \\ 0.0998 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0.0049 \\ 0.0998 \end{pmatrix} w(t), \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ x(T) &\in X_T = \{x \in \mathbb{R}^2, 2 \leq x_1 \leq 10\}, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad |w(t)| \leq 0.5, \\ t &= 0, \dots, T-1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Замечание 4.1 Здесь данные матриц заданы с точностью до 4 знака после запятой. В программе для получения более точных значений данные имеют точность 10^{-15} .

Сперва выбираем горизонт планирования $T = 120$. Далее строим гарантирующую программу $u^0(\cdot)$, которая доставляет критерию качества гарантированное значение

$$J(x_0) = 1.501102.$$

Время, затраченное на построение оптимальной программы, составило 0.0301 с.

Перейдем к построению субоптимальной стратегии с одним моментом

замыкания $T_1 = 80$. Субоптимальная стратегия дает значение

$$V_0(x_0) = 2.754215,$$

что значительно улучшило критерий качества по сравнению с оптимальной гарантирующей программой.

Время, затраченное на построение субоптимальной стратегии с одним моментом замыкания составило 0.0519 с. Также была построена аппроксимация множества $X_1(\alpha)$, что заняло 2.6425 с.

Результаты решения примера представлены на рисунке 4.1.

Поясним рисунок 4.1. Здесь изображены фазовые траектории системы (4.1) под действием оптимальной гарантирующей программы $u^0(t)$, $t = 0, \dots, T-1$ (розовая линия) и субоптимальной стратегии управления $\pi_1(0, x_0)$ (синие линии). Сплошная и штриховая синие линии описывают траектории реальной и номинальной системы, соответственно. Синей пунктирной линией представлено множество $X(T|x_0, u(\cdot))$ возможных состояний системы (4.1). Множество $X(T|x_0, u(\cdot))$ целиком принадлежит терминальному множеству X_T (серая полоса). Оптимальная начальная программа $u_0^0(\cdot|x_0)$ в свою очередь порождает множество $X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))$ возможных состояний системы (4.1) в момент замыкания T_1 . Это множество целиком лежит в множестве $X_1(\alpha^0)$ (черные пунктирные линии внизу справа). Т.е. для любого $x_1 \in X(T_1|x_0, u_0^0(\cdot|x_0))$ имеет место $J_1(x_1) \geq \alpha^0$, $\alpha^0 = 2.7542$.

Для аппроксимации множества $X_1(\alpha)$ было использовано 203 вектора, 200 из которых вида $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$, $\varphi = \pi/100, 2\pi/100, \dots, 2\pi$, и 3 остальные вектора-строки матрицы $P_{N+1}A^{T-T_1}$. Однако, в силу неограниченности множества X_T , задача имеет 103 основных ограничения.

Изменения состояний системы $x(t)$ и управления $u(t)$ на промежутке времени от 0 до T представлены на рисунке 4.2. Розовой линией изображено поведение траектории системы под действием оптимальной гарантирующей программы, синей линией — под действием субоптимальной стратегии.

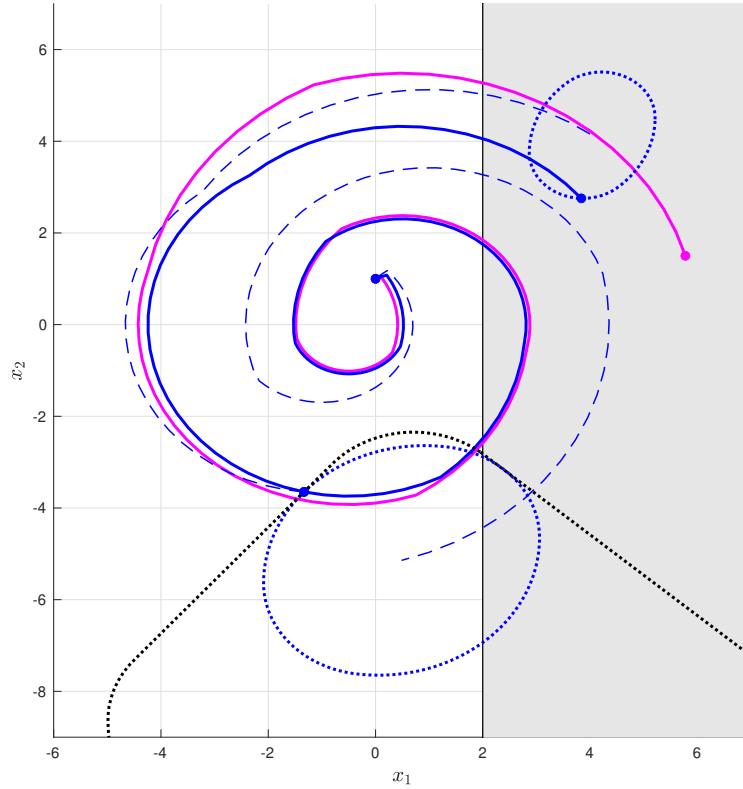


Рис. 4.1: Иллюстрация решения примера под действием оптимальной гарантирующей программы и субоптимальной стратегии управления с одним моментом замыкания $T_1 = 80$.

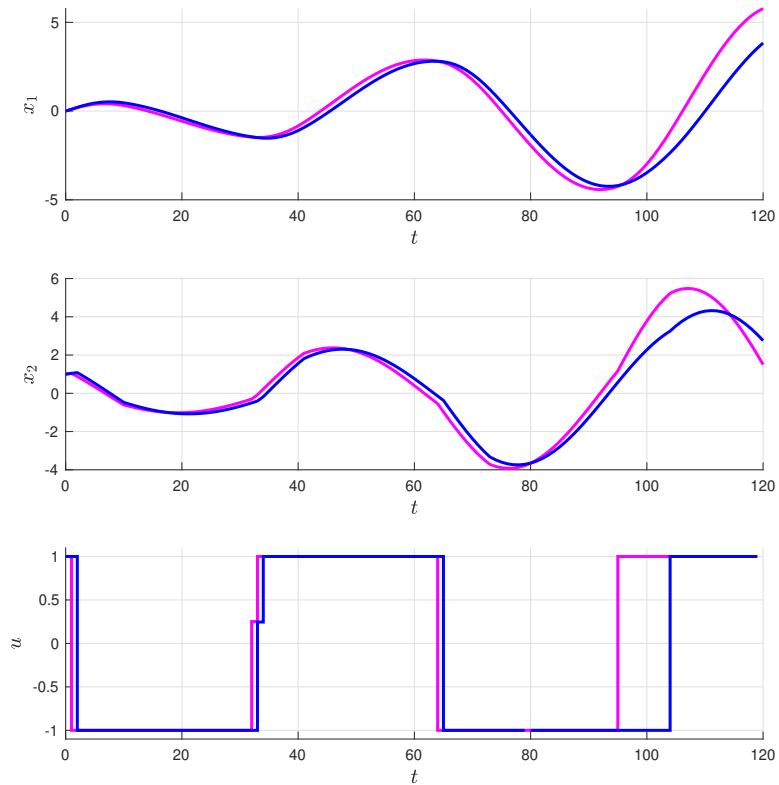


Рис. 4.2: Иллюстрация состояний системы $x(t)$ и управлений $u(t)$ на промежутке времени от 0 до $T = 120$.

4.2 Пример задачи построения стратегии со многими моментами замыкания

Снова рассмотрим задачу (4.1) и построим субоптимальную стратегию $\pi_2(0, x_0)$ с двумя моментами замыкания: $T_1 = 40$ и $T_2 = 80$. Аналогично примеру задачи построения стратегии с одним моментом замыкания, для аппроксимации множеств $X_1(\alpha)$ и $X_2(\alpha)$ было использовано по 103 вектора. На построение аппроксимаций пришлось 3.6821 с. Исходя из выбора моментов замыкания T_1 и T_2 было получено оптимальное значение на стратегии —

$$V_0(x_0) = 3.385022$$

за время 0.0503 с.

Замечание 4.2 В главе 3, при исследовании задачи параметрического линейного программирования (3.4) получили, что функции $f_{ji}(\alpha)$ являются кусочно-линейными вогнутыми. В частном случае, когда ранг матриц G_j не превосходит n , эти функции и вовсе линейные. Например, при одном моменте замыкания функция $f_{1i}(\alpha)$ имеет вид (2.12) и мы имеем простое представление для аппроксимации множества $X_1(\alpha)$, в котором она представляется совокупностью ограничений неравенств с линейно зависящей от параметра α правой частью. Линейность значительно упрощает задачу построения оптимальной начальной программы управления в составе стратегии управления с одним и многими моментами замыкания.

Полученные результаты представлены на рисунке 4.3. Здесь, как и на рисунке 4.1, сплошной розовой линией изображена траектория системы (4.1) под действием оптимальной гарантирующей программы $u^0(t), t = 0, \dots, T-1$, сплошной синей линией — под действием субоптимальной стратегии управления $\pi_2(0, x_0)$ и экстремального возмущения $w(t)$.

На рисунке 4.4 представлены состояния системы $x(t)$ и управление $u(t)$ на промежутке от 0 до T . Розовой линией изображено поведение траектории системы под действием оптимальной гарантирующей программы, синей линией — под действием оптимальной стратегии.

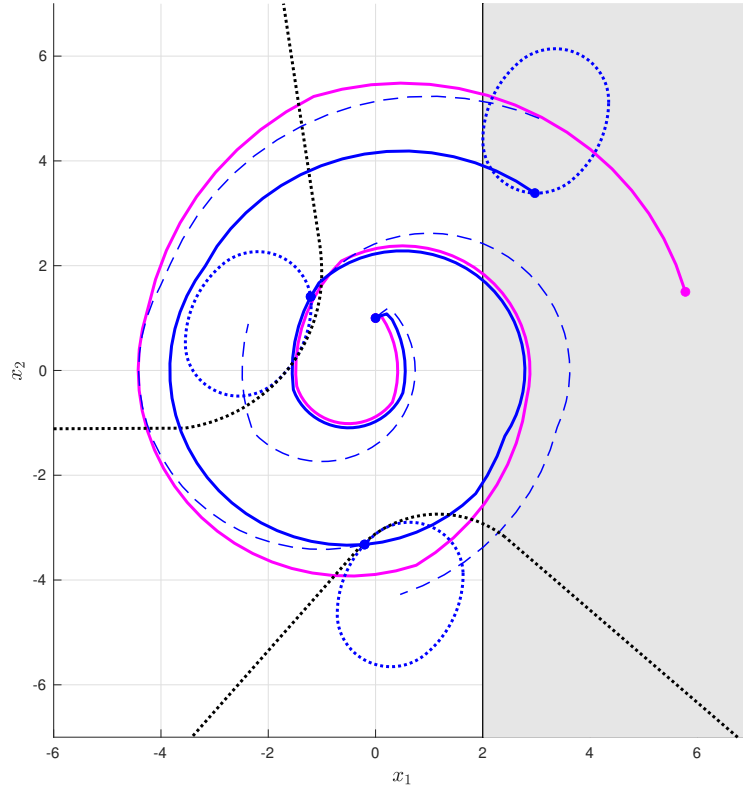


Рис. 4.3: Иллюстрация решения примера под действием оптимальной гарантирующей программы и оптимальной стратегии управления с двумя моментами замыкания $T_1 = 40$ и $T_2 = 80$.

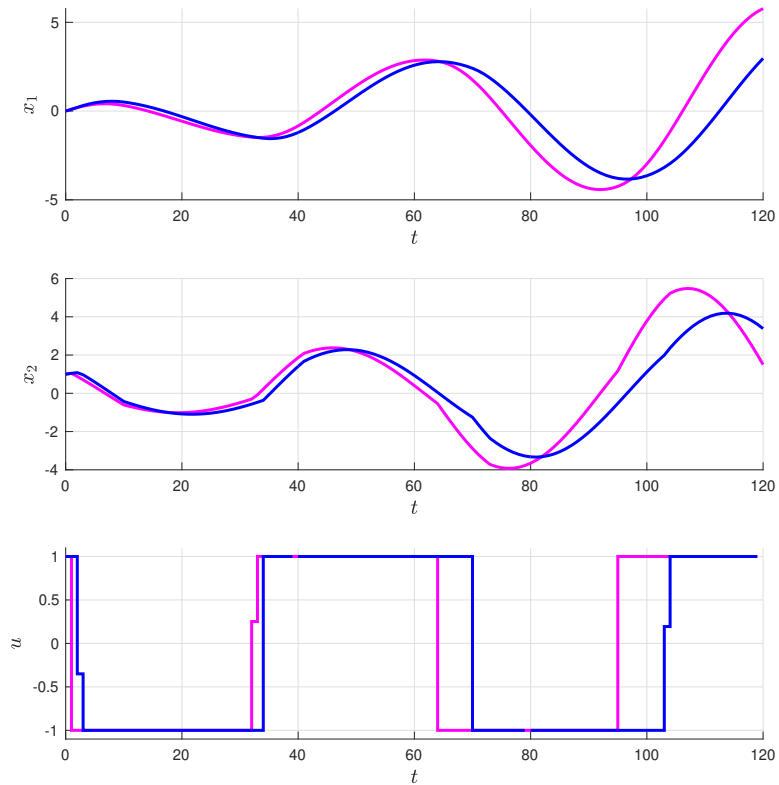


Рис. 4.4: Иллюстрация состояний системы $x(t)$ и управлений $u(t)$ на промежутке времени от 0 до $T = 120$.

По аналогии построим субоптимальную стратегию управления для пяти моментов замыкания:

$$T_1 = 20, T_2 = 40, T_3 = 60, T_4 = 80, T_5 = 100$$

(рисунки 4.5 и 4.6). Выбрав такие моменты замыкания было получено оптимальное значение на стратегии:

$$V_0(x_0) = 3.637073$$

за время 0.0818 с. Время построения аппроксимаций множеств замыкания — 5.8903 с.

Ниже приведена таблица 4.1 зависимости значения критерия качества от выбранного количества моментов замыкания. Здесь N — количество моментов замыкания, $V_0(x_0)$ — соответствующее значение критерия качества.

N	1	2	5	10
$V_0(x_0)$	2.754215	3.385022	3.637073	3.660507

Таблица 4.1: Зависимость значения критерия качества от выбранного количества моментов замыкания.

Из представленной таблицы видно, что увеличение количества моментов замыкания приводит к росту значения критерия качества. Это свидетельствует о том, что использование большего количества моментов замыкания улучшает критерий качества. Не смотря на то, что с каждым последующим увеличением количества моментов замыкания наблюдается прирост в значении критерия качества, темп роста замедляется. Это может свидетельствовать о снижении эффективности дальнейшего увеличения количества моментов замыкания в контексте улучшения критерия качества.

4.3 Выводы

В данной главе осуществлена разработка и оценена эффективность предложенного метода построения оптимальной стратегии.

Предложенные методики значительно упрощают процесс создания оптимальных стратегий по сравнению с ранее использованными алгоритмами, что подтверждено результатами проведенных численных экспериментов. Такие стратегии обеспечивают высокую точность и эффективность управления,

позволяя реагировать на изменения в условиях работы системы в режиме реального времени.

Хотя начальная задача, включающая построение аппроксимаций множеств замыкания, является трудоемкой, она решается один раз и сразу дает оптимальное значение параметра $\alpha^0 = V_0(x_0)$ и субоптимальную начальную программу $\bar{u}_0^0(x_0)$.

Решенные примеры демонстрируют эффективность предложенного подхода и сравнимую трудоемкость вычисления оптимальных стратегий и оптимальной гарантирующей программы (после того, как построены параметры аппроксимаций множеств замыкания).

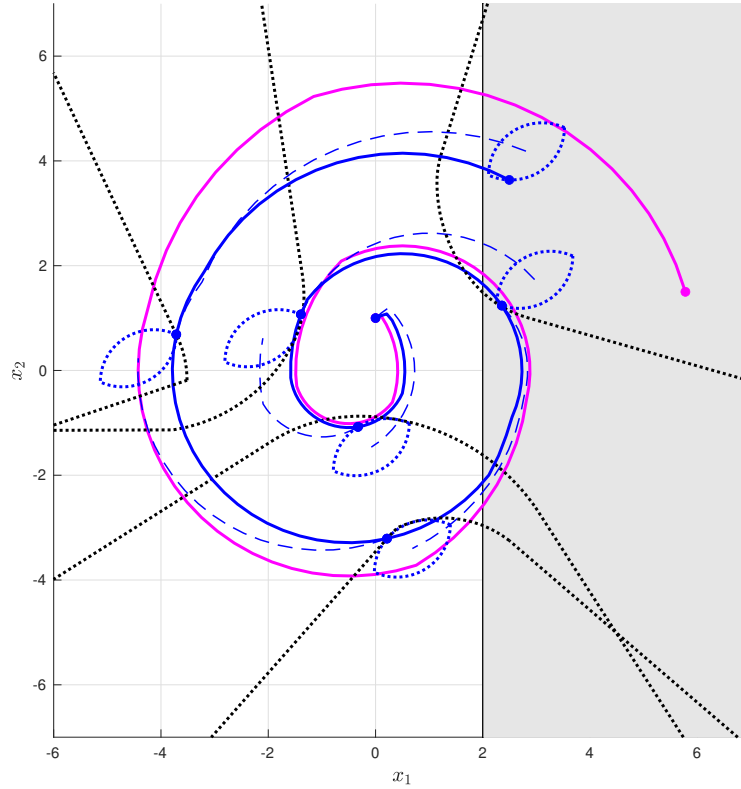


Рис. 4.5: Иллюстрация решения примера под действием оптимальной гарантирующей программы и оптимальной стратегии управления с пятью моментами замыкания $T_1 = 20$, $T_2 = 40$, $T_3 = 60$, $T_4 = 80$ и $T_5 = 100$.

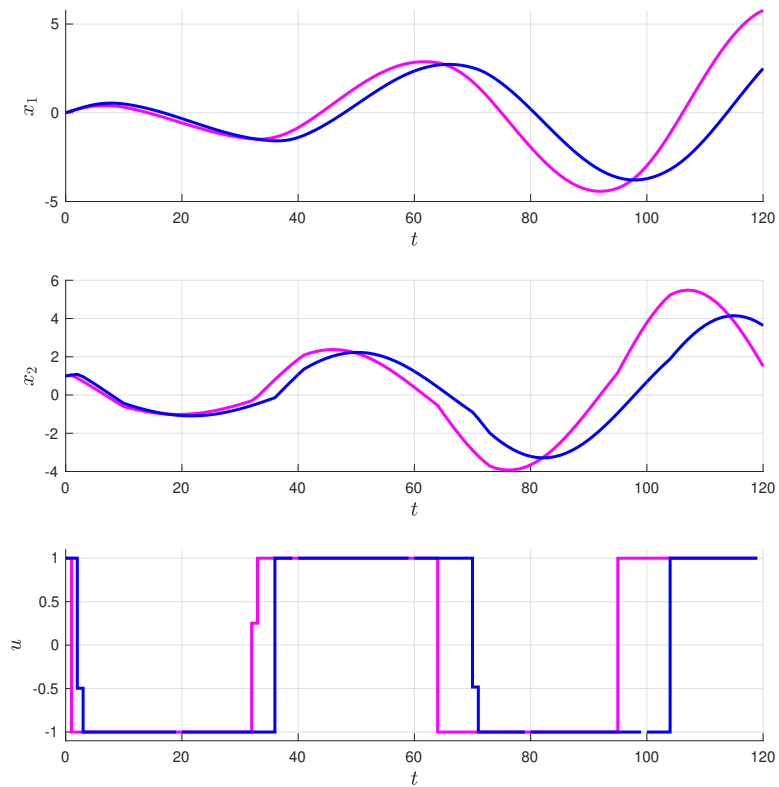


Рис. 4.6: Иллюстрация состояний системы $x(t)$ и управлений $u(t)$ на промежутке времени от 0 до $T = 120$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках дипломной работы в главе 1 исследована задача управления о переводе траекторий системы с гарантией, т.е. независимо от реализовавшегося возмущения, на заданное терминальное множество и минимизации гарантированного значения линейного терминального критерия качества. Решена задача построения оптимальной гарантирующей программы. Следует отметить, что оптимальная гарантирующая программа планируется до начала процесса управления и по его ходу не корректируется. При ее формировании не используется информация и возможности поступления измерений состояний системы в будущем. И поэтому часто ее не удастся построить из-за невозможности гарантировать выполнение ограничений. Например, динамическое программирование учитывает все возможные реализации будущих состояний, но построение стратегии динамического программирования затруднительно, за исключением систем небольшой размерности и коротких промежутков управления.

Далее в главе 2 определена оптимальная стратегия управления в предположении, что в один момент времени в будущем система будет замкнута, т.е. будет известно ее состояние, а управляющее воздействие в этот момент может быть скорректировано. Получены формулировки соответствующих задач оптимизации, решение которых позволило определить оптимальную стратегию. Таким образом, оптимальная стратегия управления состоит из оптимальной начальной программы (определенной на Δ_0 до момента замыкания) и совокупности оптимальных гарантирующих программ, определенных на Δ_1 для всех возможных состояний в момент замыкания. В этой же главе также рассмотрены вопросы аппроксимации множества замыкания и свойства функции $f(\alpha)$, которые являются ключевыми понятиями при построении оптимальной стратегии управления в терминальной задаче.

В главе 3 рассматривается случай многократно замыкаемых стратегий. Для построения многократно замыкаемой стратегии вводятся специальные множества замыкания, построены их аппроксимация и решена задача линейного программирования, из которой находится субоптимальная начальная программа. Проведено сравнение построения оптимального гарантированного управления и оптимальной стратегии управления несколькими моментами замыкания. В отличие от известных работ в этой главе использованы идеи работы [5] для сведения рассматриваемой задачи к одной задаче линейного программирования, которая позволяет одновременно вычислять оптималь-

ное управление и оптимальный параметр.

В главе 4 проведены численные эксперименты с одним и несколькими моментами замыкания. Примеры показали, что использование оптимальной стратегии с моментами замыкания часто позволяют добиться значительного улучшения гарантированного значения критерия качества по сравнению с тем, которое даст применение оптимальной гарантирующей программы.

В качестве будущих исследований отметим задачу отыскания оптимальных моментов замыкания, построение оптимальных замыкаемых обратных связей по выходу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Borrelli, F. Constrained optimal control for hybrid systems / Borrelli F. // Berlin – Heidelberg: Springer, 2003 – P. 206
2. Dmitruk, N.M. A method for constructing an optimal control strategy in a linear terminal problem / Dmitruk N.M., Kastsiukevich D.A. // J. the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2021. – No.2. – P. 38-50.
3. Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
4. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.:Иностранная литература, 1960. – 400 с.
5. Дмитрук, Н.М. Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2018. – Т. 58, №5. – С. 664–681.
6. Дмитрук, Н.М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т. 28, №3. – С. 66–82.
7. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата / Н. Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 520 с.
8. Куржанский, А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский – М.: Наука, 1977. – 392 с.