

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра методов оптимального управления

ЧЕБОТАРЕВСКИЙ

Никита Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СО  
СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ В КЛАССЕ  
ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Дипломная работа

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук  
профессор В.В. Альсевич

Допущена к защите

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления  
канд. физ.-мат. наук, доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2024

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|                                                                                                                                       | С. |
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .                                                                                                             | 7  |
| <b>ГЛАВА 1 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ<br/>ПЕРВОГО ПОРЯДКА</b> . . . . .                                                        | 9  |
| 1.1 Постановка задачи . . . . .                                                                                                       | 9  |
| 1.2 Формула приращения первого порядка критерия качества . . . . .                                                                    | 10 |
| 1.3 Необходимое условие оптимальности . . . . .                                                                                       | 12 |
| <b>ГЛАВА 2 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ<br/>ВТОРОГО ПОРЯДКА</b> . . . . .                                                        | 16 |
| 2.1 Постановка задачи . . . . .                                                                                                       | 16 |
| 2.2 Формула приращения критерия качества . . . . .                                                                                    | 16 |
| 2.3 Оценки . . . . .                                                                                                                  | 22 |
| 2.4 Необходимые условия оптимальности особых управлений . . . . .                                                                     | 23 |
| 2.5 Пример . . . . .                                                                                                                  | 23 |
| <b>ГЛАВА 3 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ<br/>ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ<br/>ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ</b> . . . . . | 26 |
| 3.1 Постановка задачи . . . . .                                                                                                       | 26 |
| 3.2 Формула приращения критерия качества . . . . .                                                                                    | 27 |
| 3.3 Необходимое условие оптимальности первого порядка . . . . .                                                                       | 29 |
| <b>ГЛАВА 4 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ<br/>ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ<br/>ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ</b> . . . . . | 33 |
| 4.1 Постановка задачи . . . . .                                                                                                       | 33 |
| 4.2 Формула приращения критерия качества . . . . .                                                                                    | 33 |
| 4.3 Необходимое условие оптимальности второго порядка . . . . .                                                                       | 39 |
| <b>ГЛАВА 5 НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНО-<br/>СТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ<br/>УПРАВЛЕНИЙ</b> . . . . .                   | 42 |
| 5.1 Постановка задачи . . . . .                                                                                                       | 42 |

|                                                   |                                                                |           |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.2                                               | Формула приращения первого порядка критерия качества . . . . . | 43        |
| 5.3                                               | Дискретный принцип максимума . . . . .                         | 44        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>                       |                                                                | <b>48</b> |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .</b> |                                                                | <b>49</b> |

# РЕФЕРАТ

Дипломная работа 49 с., IX источников.

**Ключевые слова:** ОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ, ПРИРАЩЕНИЕ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА, НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ, КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ, ДИСКРЕТНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ.

**Объект исследования:** Особые управления в классе кусочно-непрерывных функций для обыкновенных систем и систем с постоянным запаздыванием по состоянию. Управляющие воздействия в классе дискретных функций.

**Цель исследования:** Исследование задачи оптимального управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы, получение необходимых условий оптимальности особых управлений.

**Методы исследования:** Исследование литературы, вывод необходимых условий оптимальности особых управлений и вывод их доказательств.

**Полученные результаты и их новизна:** 6 теорем и решённая задача.

**Область возможного практического применения:** Биологические, экономические и технологические области.

Автор работы подтверждает, что приведенный в ней расчетно-аналитический материал правильно и объективно отражает состояние исследуемого процесса, а все заимствованные из литературных и других источников теоретические, методологические и методические положения и концепции сопровождаются ссылками на их авторов.

---

(подпись студента)

# РЭФЕРАТ

Дыпломная праца: 49 с., IX крыніц.

**Ключавыя словы:** АСАБЛІВЫЯ КІРАВАННЯ, ПРЫРАШЧЭННЕ КРЫТЭРЫЮ ЯКАСЦІ, НЕАБХОДНАЯ ЁМОВА АПТЫМАЛЬНАСЦІ, КАВАЛАЧНА-БЕСПЕРАПЫННЫЯ КІРАВАННЯ, ДЫСКРЭТНЫЯ КІРАВАННЯ.

**Аб’ект даследавання:** Асаблівыя кіраванні ў класе кавалачна-бесперапынных функцый для звычайных сістэм і сістэм з пастаянным запазненнем па стане. Кіравальныя ўздзеянні ў класе дыскрэтных функцый.

**Мэта даследавання:** Даследаванне задачы аптымальнага кіравання з функцыяналам, які залежыць ад прамежкавых станаў сістэмы, атрыманне неабходных умоў аптымальнасці асаблівых кіраванняў.

**Метады даследавання:** Даследаванне літаратуры, вывад неабходных умоў аптымальнасці асаблівых кіраванняў і вывад іх доказаў.

**Атрыманыя вынікі і іх навізна:** 6 тэарэм і вырашаная задача.

**Вобласць магчымага практычнага прымянення:** Біялагічныя, эканамічныя і тэхналагічныя вобласці.

Аўтар працы пацвярджае, што прыведзены ў ёй разлікова-аналітычны матэрыял правільна і аб’ектыўна адлюстроўвае стан доследнага працэсу, а ўсе запазычаныя з літаратурных і іншых крыніц тэарэтычныя, метадалагічныя і метадычныя становішча і канцэпцыі суправаджаюцца спасылкамі на іх аўтараў.

---

(подпіс студэнта)

## ANNOTATION

Degree paper: 49 p., IX sources.

**Key words:** SPECIAL CONTROLS, INCREMENT OF QUALITY CRITERION, NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY, PIECE-CONTINUOUS CONTROLS, DISCRETE CONTROLS.

**Object of research:** Special controls in the class of piece-continuous functions for ordinary systems and systems with constant delay-status. Control actions in the class of discrete functions.

**Purpose of research:** Study of the optimal control problem with functional depending on intermediate states of the system, obtaining necessary conditions for the optimality of special controls.

**Research methods:** Literature research, conclusion of necessary conditions of the optimality of special controls and the derivation of their proofs.

**Obtained results and their novelty:** 6 theorems and a solved task.

**Area of possible practical application:** Biological, economic and technological areas.

The author of the work confirms that computational and analytical material presented in it correctly and objectively reproduces the picture of investigated process, and all the theoretical, methodological and methodical positions and concepts borrowed from literary and other sources are given references to their authors.

---

(Student's signature)

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория оптимальности процессов уже достигла высокого уровня развития. Необходимые условия оптимальности являются наиболее разработанным разделом этой теории. В данной теории был получен ряд выдающихся результатов, среди которых особое место занимает принцип максимума Л.С. Понтрягина. Принцип максимума дал толчок бурному развитию теории оптимальных процессов. Первоначально Л.С. Понтрягин выдвинул принцип максимума в качестве гипотезы. Затем этот результат был доказан для линейных систем, оптимальных по быстродействию [6]. Для нелинейных систем первое доказательство было приведено в [7]. Затем следующий шаг был сделан в [8], где принцип максимума распространяется на задачи с фазовыми ограничениями.

Принцип максимума привлекает внимание специалистов из самых разных областей. В связи с этим для него было представлено много разных и интересных доказательств. Например, в [9] описано доказательство, основанное на изучении приращений функционала качества. Также принцип максимума распространяется на различные объекты и задачи.

В качестве примера возьмём задачу терминального управления.

В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий  $u(t)$ , размерности  $r$ , принимающих значения из множества допустимых управлений  $U$ :

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

минимизируется функционал:

$$J(u) = \varphi(x(t_1)), \quad (2)$$

система управления которого имеет вид:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (3)$$

Вектор  $x_0$  и моменты  $t_0$  и  $t_1$  имеют фиксированные значения.  $\varphi(x)$  и  $f(x, u, t)$  непрерывны вместе с  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ .

В данной задаче необходимо найти такое управление  $u^0(t)$  и соответствующую траекторию  $x^0(t)$ , вдоль которой функционал (2) принимает минимальное значение. Управление  $u^0(t)$  и траекторию  $x^0(t)$  в дальнейшем будем называть оптимальными.

**Теорема (Принцип максимума).** Оптимальное управление  $u^0(t), t \in T$  и соответствующая данному управлению оптимальная траектория  $x^0(t)$  в задаче (1) - (3) удовлетворяют условию максимума:

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{v \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), v(t), t), \quad (4)$$

где  $H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \psi'(t)f(x(t), u(t), t)$  - гамильтониан системы (3),  $\psi^0(t), t_0 \leq t \leq t_1$  -  $n$ -вектор, являющийся решением сопряжённой системы:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad (6)$$

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \psi'(t)f(x(t), u(t), t). \quad (7)$$

Идея применения принципа максимума заключается в следующем. Из условия максимума (4) при произвольных  $x, \psi, t$  исключаются параметры управления. Результат подставляется в системы (3) и (5). В результате имеем систему из  $2n$  дифференциальных уравнений с граничными условиями (3), (6). Предположим, что оптимальное управление существует. Тогда среди решений полученной системы найдётся оптимальная траектория. Данная процедура реализуема, если в (4) максимум в правой части достигается в единственной точке. Однако, возможен случай, когда максимум в (4) достигается в нескольких точках или же  $H(x^0(t), \psi^0(t), u(t), t)$  совсем не зависит от  $u$ . Такие случаи называются особыми, а управления - особыми.

В данной дипломной работе рассматриваются особые управления в классах кусочно-непрерывных и дискретных функций, на примере задачи оптимального управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы.



# ГЛАВА 1

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 1.1 Постановка задачи

Пусть система управления описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T = [t_0; t_1], \quad (1.1)$$

где  $x$  -  $n$ -мерный вектор состояния системы,  $u$  -  $r$ -мерный вектор управления;  $t$  - время;  $x^0, t_0, t_1$  фиксированы.

Среди кусочно-непрерывных функций  $u(t)$ , принимающих значения из заданного множества  $U$ :

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (1.2)$$

требуется найти такую, чтобы вдоль соответствующей траектории системы (1.1) функционал

$$J(u) = \varphi(x(\tau_1), \dots, x(\tau_k)) \quad (1.3)$$

принимал минимальное значение. Здесь

$$t_0 < \tau_1 \dots < \tau_k = t_1.$$

Предположим, что вектор-функция  $f$  непрерывна по своим аргументам вместе с  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Обозначим  $y_i = x(\tau_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Будем предполагать, что  $\varphi(y)$  непрерывна вместе с  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

Как обычно, управление  $u^0(t)$  и соответствующую траекторию  $x^0(t)$  системы (1.1), доставляющие минимум функционалу (1.3), будем называть оптимальными в задаче (1.1) - (1.3).

## 1.2 Формула приращения первого порядка критерия качества

Рассмотрим два управления  $u^0(t)$  и  $\tilde{u}(t) \in U$ .  $x^0(t)$  и  $\tilde{x}(t)$  - траектории, соответствующие данным управлениям. Обозначим:

$$\Delta x(t) = \tilde{x}(t) - x^0(t), \quad (1.4)$$

$$\Delta y_i(t) = \tilde{x}(\tau_i) - x^0(\tau_i), i = \overline{1, k}, \quad (1.5)$$

$$y = (y_1, \dots, y_k), \quad (1.6)$$

$$\Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_k). \quad (1.7)$$

Тогда приращение функционала (1.3) на соответствующих траекториях системы (1.1) принимает следующий вид:

$$\Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(y_1^0 + \Delta y_1, y_2^0 + \Delta y_2, \dots, y_k^0 + \Delta y_k) -$$

$$-\varphi(y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + o_1(||\Delta y||).$$

Введём функцию  $\psi(t)$ , которая в момент времени  $\tau_k$  определяется следующим образом:

$$\psi(\tau_k) = -\frac{\partial \varphi(y^0)}{\partial y_k}.$$

Отсюда получим следующее:

$$\Delta J(u^0) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i - \psi'(\tau_k) \Delta y_k + o_1(||\Delta y||). \quad (1.8)$$

Пусть

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_{k-1}} = \psi(\tau_{k-1}) - \psi(\tau_{k-1} - 0),$$

тогда из (1.8) получим:

$$\Delta J(u^0) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + \psi'(\tau_{k-1}) \Delta x(\tau_{k-1}) - \psi'(\tau_{k-1} - 0) \Delta x(\tau_{k-1}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\psi'(\tau_k)\Delta x(\tau_k) + o_1(||\Delta y||) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i - \\
& -\psi'(\tau_{k-1}-0)\Delta x(\tau_{k-1}) - \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (\dot{\psi}'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)\Delta \dot{x}(t))dt + o_1(||\Delta y||).
\end{aligned}$$

Аналогично, полагая

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} = \psi(\tau_i) - \psi(\tau_i - 0), i = \overline{1, k-2},$$

также учитывая, что

$$\psi'(\tau_i)\Delta x(\tau_i) - \psi'(\tau_{i-1})\Delta x(\tau_{i-1}) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\dot{\psi}'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)\Delta \dot{x}(t))dt,$$

в результате получим, что

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)\Delta \dot{x}(t))dt + o_1(||\Delta y||). \quad (1.9)$$

Теперь рассмотрим приращение траектории. Оно имеет вид:

$$\Delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) - f(x^0(t), u^0(t), t), \quad (1.10)$$

при этом справедливо разложение

$$f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) = f(x^0(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial f(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o_2(||\Delta x||). \quad (1.11)$$

Обозначим

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \psi'(t)f(x(t), u(t), t), \quad (1.12)$$

$$\Delta_{\tilde{u}}f(x(t), u(t), t) = f(x(t), \tilde{u}(t), t) - f(x(t), u(t), t). \quad (1.13)$$

Учитывая (1.11), (1.12), (1.13), подставим (1.10) в (1.9) и получим

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}'(t)\Delta x(t) + \psi'(t)(f(x^0(t), \tilde{u}(t), t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o_2(\|\Delta x\|) - f(x^0(t), u^0(t), t)) dt + \\
& + o_1(\|\Delta y\|) = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt + o_1(\|\Delta y(t)\|).
\end{aligned}$$

Также положим, что

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x}, \quad (1.14)$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^0) &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t) dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|) dt + o_1(\|\Delta y(t)\|). \quad (1.15)
\end{aligned}$$

### 1.3 Необходимое условие оптимальности

**Теорема 1.** Для оптимальности управления  $u^o(t)$ ,  $t \in T$ , в задаче (1.1) - (1.3) необходимо, чтобы вдоль данного управления и соответствующих ему решений  $x^o(t)$ ,  $\psi^o(t)$ ,  $t \in T$ , исходной и сопряжённой системы выполнялось условие максимума:

$$H(x^o(t), \psi^o(t), u^o(t), t) = \max_{u \in U} H(x^o(t), \psi^o(t), u(t), t), \quad (1.16)$$

где  $\psi^o(t)$  - решение системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x^o(t), \psi(t), u^o(t), t)}{\partial x}, \quad t \in T, \quad (1.17)$$

с граничным условием

$$\psi^0(t_1) = -\frac{\partial \varphi(y^0)}{\partial y_k}, t \in T. \quad (1.18)$$

В точках  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, k-1}$ , функция  $\psi^0(t)$  терпит разрывы, скачки которых определяются равенствами:

$$\psi^0(\tau_i - 0) - \psi^0(\tau_i + 0) = -\frac{\partial \varphi(y^0)}{\partial y_i} \quad (1.19)$$

**Доказательство.** Предположим, что для любого достаточно малого  $\varepsilon$  существует  $\theta = \theta(\varepsilon) \in T$  и  $v = v(\varepsilon)$ , при которых выполняется неравенство

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) < H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), v, \theta),$$

или это можно записать так

$$\Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) > 0. \quad (1.20)$$

Теперь рассмотрим специальное приращение управления

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon) \\ v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \theta \in T. \end{cases}$$

Подставим данное приращение в формулу критерия качества (1.15)

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta v \varepsilon} J(u^0) = & - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) dt - \int_{\theta}^{t_1} o_2(\|\Delta x^0(t)\|) dt - \\ & - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x^0(t) dt + o_1(\|\Delta y(t)\|). \end{aligned}$$

Покажем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  величина  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t)\|$  имеет порядок  $\varepsilon$  при  $t \in [t_0, \theta]$ . Оценим  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t)\|$  на  $[\theta, \theta + \varepsilon]$ . Учитывая, что  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(\theta)\| = 0$ , имеем:

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t) = \int_{\theta}^t (f(\tilde{x}(\tau), v(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)\| &= \int_{\theta}^t \|f(\tilde{x}(\tau), v(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), v(\tau), \tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{\theta}^t \|f(x^0(\tau), v(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)\| d\tau \leq L \int_{\theta}^t \|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\tau)\| d\tau + \\
&+ \int_{\theta}^t \|\Delta_v f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)\| d\tau \leq \int_{\theta}^t \|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\tau)\| d\tau + G_1(t - \theta).
\end{aligned}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)\| &= \omega(t), \\
\omega(t) &\leq c + L \int_{\theta}^t \omega(\tau) d\tau, \quad c = G_1(t - \theta), \\
\omega(t) &\leq c + L \int_{\theta}^t (c + L \int_{\theta}^{\tau} \omega(\beta) d\beta) d\tau = c + L(t - \theta) + c \frac{L^2(t - \theta)^2}{2} + \\
&+ cL^3 \int_{\theta}^t (t - \tau) \int_0^{\beta} \omega(\beta) d\beta d\tau + \dots + c \frac{L^M(t - \theta)^M}{M!} = ce^{L(t-\theta)}.
\end{aligned}$$

Откуда получаем, что

$$\|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)\| \leq G\varepsilon e^{L\varepsilon} = O_1(\varepsilon).$$

Пусть  $t \in [\theta + \varepsilon, t_1]$ . Тогда из последнего неравенства получим:

$$\|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\theta + \varepsilon)\| \leq O_1(\varepsilon).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)\| &\leq O_1(\varepsilon) + \int_{\theta+\varepsilon}^t \|f(\tilde{x}(\tau), u^0(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)\| d\tau \leq \\
&\leq O_1(\varepsilon) + L_3 \int_{\theta+\varepsilon}^t \|\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\tau)\| d\tau.
\end{aligned}$$

Аналогично получим

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| \leq O_1(\varepsilon)e^{L_3(t-\theta-\varepsilon)} = O_2(\varepsilon).$$

При специальном приращении, определяемом (1.20), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_{\theta v\varepsilon} x^0(t) dt = \\ & = \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \varepsilon + o_3(\varepsilon), \\ & \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_{\theta v\varepsilon} x^0(t) dt = \\ & = \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_{\theta v\varepsilon} x^0(\theta) \varepsilon + o_4(\varepsilon) = o_5(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом остаточный член в формуле (1.15) имеет порядок  $o(\varepsilon)$ . Формула приращения критерия качества имеет вид:

$$\Delta_{\theta v\varepsilon} J(u^0) = -\varepsilon \Delta_v H(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o(\varepsilon).$$

При достаточно малых  $\varepsilon$  мы получаем, что  $\Delta_{\theta v\varepsilon} J(u^0) < 0$ , что противоречит оптимальности управления  $u^0$ .

*Теорема доказана.*

# ГЛАВА 2

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу (1.1) - (1.3) в классе особых оптимальных управлений. Управление  $u^0(t)$  называется особым, если существуют подмножества  $\omega(t) \subseteq U, \text{mes} \omega > 0$  и  $V(t) \subseteq U, t \in \omega$ , состоящие из более чем одного элемента, что для любого  $v \in V(t), t \in \omega$  выполняется тождество:

$$\Delta_v H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \equiv 0, \quad (2.1)$$

в дальнейшем будем считать, что  $\omega = T, V(t) = U$ .

Предположим, что вектор-функция  $f$  непрерывна по своим аргументам вместе с  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Обозначим  $y_i = x(\tau_i), i = \overline{1, k}$ . Будем предполагать, что  $\varphi(y)$  непрерывна вместе с  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ .

### 2.2 Формула приращения критерия качества

Помимо управления  $u^0(t)$  рассмотрим ещё одно кусочно-непрерывное управление  $\tilde{u}(t)$ , удовлетворяющее (1.2). Тогда приращение функционала (1.3) на соответствующих траекториях системы (1.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = J(\tilde{u}) - J(u^0) &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_j + o(\|\Delta y\|^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$



Функции  $H(x(t), \psi(t), u(t), t)$  и  $\psi(t)$  определим так же как и в предыдущей главе. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t)) dt. \quad (2.3)$$

Также справедливо разложение:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= f(x^0(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial f'(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 f(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) + o(\|\Delta x\|^2) - f(x^0(t), u^0(t), t). \end{aligned}$$

Теперь подставим это всё в (2.3) и получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i &= - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} H(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x\|^2) dt. \end{aligned}$$

Также учтём (1.14) и в результате получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x\|^2) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Линейное приближение по  $x$  системы (1.1) представим в виде:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) = & \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o(||\Delta x(t)||),\end{aligned}$$

решение данной системы представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta x(t) = & F(t, \tau_0) \Delta x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t F(t, \tau) (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial x} \Delta x(\tau) + o(||\Delta x(\tau)||)) d\tau,\end{aligned}$$

где  $F(\tau_j, t)$  является решением уравнения:

$$\frac{\partial F(\tau_j, t)}{\partial t} = A(t) F(\tau_j, t),$$

и

$$F(\tau_j, \tau_j) = E, A(t) = \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x}.$$

Теперь введём в рассмотрение матричные функции  $Q_{ij}^0(t)$ , имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned}Q_{ij}^0(t) = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} F(\tau_j, t) + F'(\tau_j, t) \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \right), \\ & i = \overline{1, k-1}, j = \overline{i+1, k}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Тогда третью сумму в (2.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_j = & \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} (F(\tau_j, \tau_i) \Delta x(\tau_i) + \\ & + \int_{\tau_i}^{\tau_j} F(\tau_j, t) (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o(||\Delta x(t)||)) dt.\end{aligned}$$

Откуда в результате получим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_j &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i Q_{ij}^0(\tau_i) \Delta y_i - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i * \\
&\quad * \int_{\tau_i}^{\tau_j} Q_{ij}^0(t) (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \\
&\quad + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o(\|\Delta x(t)\|)) dt. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Введём ещё одну матричную функцию  $\Psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , для которой предположим следующее

$$\Psi^0(t_1) = -\frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_k^2}, \tag{2.7}$$

тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y'_i \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i Q_{ij}^0(\tau_i) \Delta y_i = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \Delta y'_i \left( \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} - \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(\tau_i) \right) \Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta y'_k \Psi^0(t_1) \Delta y_k.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_{k-1}^2} - Q_{ij}^0(\tau_k) = \Psi^0(\tau_{k-1}) - \Psi^0(\tau_{k-1} - 0),$$

тогда получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y'_i \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i Q_{ij}^0(\tau_i) \Delta y_i = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-2} \Delta y'_i \left( \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} - \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(\tau_i) \right) \Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta y'_{k-1} \Psi^0(\tau_{k-1} - 0) \Delta y_{k-1} - \\
&\quad - \int_{\tau_{k-1}}^{t_1} \frac{d}{dt} \Delta x'(t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt.
\end{aligned}$$

Аналогично полагая, что

$$\frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} - \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(\tau_j) = \Psi^0(\tau_i) - \Psi^0(\tau_i - 0), i = \overline{1, k-1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' Q_{ij}^0(\tau_i) \Delta y_i = \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\Delta \dot{x}'(t) \Psi^0(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \dot{\Psi}^0(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \Psi^0(t) \Delta \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Справедливо разложение:

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + o(||\Delta x(t)||). \quad (2.9)$$

Учитывая (2.2), (2.4), (2.6), (2.8), (2.9) получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \Delta y_i (\Psi^0(\tau_i + 0) - \Psi^0(\tau_i - 0) - \\ & - \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} + \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(\tau_j)) \Delta y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta x'(t) (\dot{\Psi}^0(t) + \frac{\partial f'(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) + \\ & + \Psi^0(t) \frac{\partial f(x^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2}) \Delta x(t) dt - \\ & - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i \int_{\tau_i}^{\tau_j} Q_{ij}^0(t) * (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \end{aligned}$$

$$+o(||\Delta x(t)||)dt - \int_{t_0}^{t_1} o'(||\Delta x(t)||)\Psi^0(t)\Delta x(t)dt + o(||\Delta y^2||). \quad (2.10)$$

Функцию  $\Psi^0(t)$  определим в качестве решения системы:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & -\frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi - \\ & -\Psi \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2}, t \in T, \end{aligned} \quad (2.11)$$

с граничным условием (2.7), а скачки этой функции в точках  $\tau_i$   $i = \overline{1, k-1}$ , определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Psi^0(\tau_i - 0) - \Psi^0(\tau_i + 0) = & \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^k \left( \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} F(\tau_j, \tau_i) + \right. \\ & \left. + F'(\tau_j, \tau_i) \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \right), i = \overline{1, k-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда с учётом (2.1), (2.11), (2.12) приращение (2.10) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), u^0(t), t)(\Psi^0(t)) \right) \Delta x(t) dt + \eta, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \eta = & \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4, \eta_1 = o(||\Delta y||^2), \\ \eta_2 = & - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' \int_{\tau_i}^{\tau_j} (Q_{ij}^0(t) \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ & + Q_{ij}^0(t) \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + Q_{ij}^0(t) o(||\Delta x(t)||) dt, \\ \eta_3 = & - \int_{t_0}^{t_1} o'(||\Delta x(t)||) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt, \\ \eta_4 = & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Delta_{\tilde{u}} \left( \frac{\partial f'(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) + \Psi^0(t) \frac{\partial f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2})\Delta x(t)dt.$$

## 2.3 Оценки

Возьмём управление  $\tilde{u}(t)$  в виде:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon[ \\ u^0(t), & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon[, t \in T, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $\theta \in [t_0; t_1]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $v \in U$ . Так же как и в разделе (1.3), можно показать, что на приращении управления  $\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u^0(t)$ , определяемом управлением (2.14), выполняется оценка

$$\|\Delta x(t)\| \leq K\varepsilon, K > 0, t \in T, \quad (2.15)$$

также аналогично из (1.3) следует, что  $\eta_1 = o(\varepsilon^2)$ ,  $\eta_3 = o(\varepsilon^2)$ ,  $\eta_4 = o(\varepsilon^2)$ . Оценим  $\eta_2$ . Рассмотрим  $i$ -е слагаемое для  $\eta_2$ :

$$\Delta y_i' \int_{\tau_i}^{\tau_j} (Q_{ij}^0(t) \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t) + Q_{ij}^0(t) + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + Q_{ij}^0(t) o(\|\Delta x(t)\|)) dt. \quad (2.16)$$

Пусть в (2.14)  $\theta < \tau_i$ . Тогда первые два слагаемых в (2.16) равны нулю. Третье слагаемое в (2.16), согласно (2.15), имеет порядок малости  $o(\varepsilon^2)$ . Если  $\theta \geq \tau_i$ , тогда  $\Delta y_i = 0$ , и тогда сумма (2.16) равна нулю. Следовательно, будем иметь  $\eta_2 = o(\varepsilon^2)$ . В результате получаем  $\eta = o(\varepsilon^2)$ . Разлагая правую часть равенства (2.13) по степеням  $\varepsilon$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & -\frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + \right. \\ & \left. + \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \Psi^0(\theta) \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \right) + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

## 2.4 Необходимые условия оптимальности особых управлений

Для оптимальности управления  $u^0(t)$  справедливо неравенство  $J(v) - J(u^0) \geq 0$  для любых  $v \in U$ . Поэтому, согласно (2.17), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + \\ & + \Delta_v f'(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \Psi^0(\theta) \Delta_v f(x^0(\theta), u^0(\theta), \theta) \leq 0. \end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо при любых  $\theta \in [t_0, t_1]$ ,  $v \in U$ , то отсюда следует утверждение.

**Теорема 2.** Для оптимальности особого управления  $u^o(t)$  и соответствующей траектории  $x^o(t)$  в задаче (1.1) - (1.3) необходимо чтобы выполнялось условие:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^o(t), t) + \\ & + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \leq 0, \end{aligned}$$

где  $u \in U$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\psi^0(t)$  - решение системы (1.17), с граничным условием (1.18) и скачками (1.19).  $\Psi^0(t)$  - решение системы (2.11) с граничным условием (2.7) и скачками (2.12).

## 2.5 Пример

Рассмотрим следующую задачу в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \end{cases} \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \leq 1, \quad t \in T = [0; 3],$$

с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы

$$\varphi(x) = x_1(1) + x_1(2) + x_2(3).$$

Найдём гамильтониан системы, используя формулу (1.12) получим:

$$H(x, \psi, u, t) = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2.$$

Используя формулы (1.17) и (1.18) получим следующую сопряжённую систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \psi_1(3) = 0, \\ \psi_2(3) = -1. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим управление  $u(t) \equiv 0, t \in T$ . Тогда исходная система управления примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2, \end{cases}$$

из неё следует что  $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, t \in T$ . В свою очередь сопряжённая система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 2\psi_2 x_1, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(3) = -1, \psi_2(2-0) = \psi_2(2+0) - (-1), \psi_2(1-0) = \psi_2(1+0) - (-1).$$

$$\text{По итогу имеем } \psi_1(t) \equiv 0, \psi_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in (2, 3], \\ 0, & t \in [1, 2], \\ 1, & t \in [0, 1), \end{cases} \quad \text{откуда можем заме-}$$

тить, что на промежутке  $t \in (2, 3]$  гамильтониан не зависит от управления, следовательно,  $u(t) = 0$  - особое управление на этом отрезке.

Рассмотрим уравнение (2.11), которое также имеет название уравнение матричных импульсов. Его слагаемые принимают следующие значения:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f'}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

откуда получим систему

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_{11} & \dot{\Psi}_{12} \\ \dot{\Psi}_{21} & \dot{\Psi}_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & -2x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1(\psi_{21} + \psi_{12}) & 2x_1\psi_{22} \\ 2x_1\psi_{22} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$



$$= \begin{pmatrix} 2x_1(\psi_{21} + \psi_{12}) - 2 & 2x_1\psi_{22} \\ 2x_1\psi_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

с граничным условием:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11}(3) & \Psi_{12}(3) \\ \Psi_{21}(3) & \Psi_{22}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $x_1(t) \equiv 0$  при  $u(t) \equiv 0$ , то получим, что  $\Psi_{11}(t) = -2(t - 3)$ ,  $\Psi_{ij}(t) \equiv 0$ ,  $i, j \neq 1$ , также  $\Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) = v, 0$ .

Проверим, выполняется ли следующее условие:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) + \\ & + \Delta_v f'(x^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta_v f(x^0(t), u^0(t), t) \leq 0, \end{aligned}$$

после подстановки необходимых слагаемых получим следующее неравенство:

$$-2(t - 3)v^2 \leq 0, \quad v \in [-1; 1], \quad t \in [0; 3],$$

откуда видно что данное неравенство не выполняется при данных значениях  $v$  и  $t$ . Следовательно, управление  $u(t) \equiv 0$  не является оптимальным.

# ГЛАВА 3

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

### 3.1 Постановка задачи

Пусть система управления описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad t \in T = [t_0; t_1], \quad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0],$$

где  $x$ - $n$ -мерный вектор состояния системы,  $u$ - $r$ -мерный вектор управления,  $t$ -время,  $t_0, t_1, x_0, h$  - фиксированы.

Среди кусочно-непрерывных функций  $u(t)$ , принимающих значения из заданного множества  $U$ :

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (3.2)$$

требуется найти такую, чтобы вдоль соответствующей траектории системы (3.1) функционал

$$J(u) = \varphi(x(\tau_1), \dots, x(\tau_k)) \quad (3.3)$$

принимал минимальное значение. Здесь

$$t_0 < \tau_1 \dots < \tau_k = t_1.$$

Предположим, что вектор-функция  $f$  непрерывна по своим аргументам вместе с  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Обозначим  $y_i = x(\tau_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Будем предполагать, что  $\varphi(y)$  непрерывна вместе с  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

Как обычно, управление  $u^0(t)$  и соответствующую траекторию  $x^0(t)$  системы (3.1), доставляющие минимум функционалу (3.3), будем называть оптимальными в задаче (3.1) - (3.3).

## 3.2 Формула приращения критерия качества

Используем те же обозначения (1.4) - (1.7), что и для систем без запаздывания. Тогда приращение критерия качества (3.3) на соответствующих траекториях системы (3.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) &= J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(y_1^0 + \Delta y_1, y_2^0 + \Delta y_2, \dots, y_k^0 + \Delta y_k) - \\ &- \varphi(y_1^0, y_2^0, \dots, y_k^0) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + o_1(||\Delta y||).\end{aligned}$$

Используя те же обозначения и проводя те же действия, что и в пункте (1.2) главы (1) получим следующее приращение критерия качества:

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t)) dt + o_1(||\Delta y||). \quad (3.4)$$

Приращение траектории имеет вид:

$$\Delta \dot{x}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-h), \tilde{u}(t), t) - (x^0(t), x^0(t-h), u^0(t), t).$$

Введём следующие обозначения:

$$z^0(t) = x^0(t-h),$$

$$\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t-h),$$

$$H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t) = \psi'(t) f(x(t), z(t), u(t), t), \quad (3.5)$$

$$\Delta_{\tilde{u}} f(x(t), z(t), u(t), t) = f(x(t), z(t), \tilde{u}(t), t) - f(x(t), z(t), u(t), t). \quad (3.6)$$

Также справедливо разложение:

$$\begin{aligned}f(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t), \tilde{u}(t), t) &= f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t) + \\ &+ \frac{\partial f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\ &+ \frac{\partial f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z} \Delta x(t-h) + o_2(||\Delta x(t)|| + ||\Delta x(t-h)||).\end{aligned}$$

Подставим в выражение (3.4)

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t) + \\ & + \frac{\partial f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z} \Delta x(t-h) + \\ & + o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h)\|) - f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)) dt + o_1(\|\Delta y\|).\end{aligned}$$

Учитывая обозначения (3.5) - (3.6), получим

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), z^0(t), \psi(t), u^0(t), t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z} \Delta x(t-h) dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h)\|) dt + \\ & + o_1(\|\Delta y\|) = - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), z^0(t), \psi(t), u^0(t), t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1-h} \frac{\partial H'(x^0(\tau), z^0(\tau), \psi(\tau), \tilde{u}(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau=t+h} \Delta x(\tau) d\tau - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(t-h)\|) dt + o_1(\|\Delta y\|).\end{aligned}$$

Положим, что

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial H(x(\tau), z(\tau), \psi(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau=t+h},$$

где,  $t \in [t_0, t_1 - h)$ ,

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_1 - h, t_1].$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x^0(t), z^0(t), \psi(t), u^0(t), t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1-h} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(\tau), z^0(\tau), \psi(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau=t+h} \Delta x(\tau) d\tau - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_2(||\Delta x(t)|| + ||\Delta x(t-h)||) dt + o_1(||\Delta y||). \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.3 Необходимое условие оптимальности первого порядка

**Теорема 3.** Для оптимальности управления  $u^0(t), t \in T$ , в задаче (3.1) - (3.3) необходимо, чтобы вдоль данного управления и соответствующих ему решений  $x^0(t), \psi^0(t), t \in T$ , исходной и сопряжённой системы выполнялось условие максимума:

$$H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u(t), t), \quad (3.8)$$

где  $\psi^0(t)$  - решение системы:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial H(x(\tau), z(\tau), \psi(\tau), u(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau=t+h},$$

где,  $t \in [t_0, t_1 - h)$ ,

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_1 - h, t_1], \quad (3.9)$$

с граничным условием

$$\psi^0(t_1) = -\frac{\partial \varphi(y^0)}{\partial y_k}, \quad t \in T. \quad (3.10)$$

В точках  $\tau_i, i = \overline{1, k-1}$ , функция  $\psi^0(t)$  терпит разрывы, скачки которых определяются равенствами:

$$\psi^0(\tau_i - 0) - \psi^0(\tau_i + 0) = -\frac{\partial \varphi(y^0)}{\partial y_i}. \quad (3.11)$$

**Доказательство.** Предположим, что для любого достаточно малого  $\varepsilon$  существует  $\theta = \theta(\varepsilon) \in T$  и  $v = v(\varepsilon)$ , при которых выполняется неравенство:

$$\Delta_v H(x^0(\theta), z^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) > 0.$$

Теперь рассмотрим специальное приращение управления

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon) \\ v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \theta \in T. \end{cases} \quad (3.12)$$

Подставим приращение в формулу критерия качества (3.7):

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta v \varepsilon} J(u^0) = & - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \Delta_v H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) dt - \\ & - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x^0(t) dt - \\ & - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon - h} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\tau), z^0(\tau), \psi^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau = t + h} \Delta x^0(\tau) d\tau - \\ & - \int_{\theta}^{t_1} o_2(\|\Delta x^0(t)\| + \|\Delta x^0(t - h)\|) dt + o_1(\|\Delta y\|). \end{aligned}$$

Покажем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  величина  $||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)||$  имеет порядок  $\varepsilon$  при  $t \in [t_0; \theta]$ . Оценим  $||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)||$  на  $[\theta; \theta + \varepsilon]$ . Учитывая, что  $||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\theta)|| = 0$ , имеем:

$$\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t) = \int_{\theta}^t (f(\tilde{x}(\tau), \tilde{z}(\tau), v(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau)) d\tau.$$

Проводя те же действия, что и при доказательстве теоремы 1 получим:

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| = L \int_{\theta}^t ||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\tau)|| d\tau + G_1 h.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} ||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| &= \omega(t), \\ G_1 h &= c, \\ \omega(t) &\leq c + L \int_{\theta}^t \omega(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Откуда имеем, что

$$\omega(t) = ce^{L(t-\theta)}, \quad t \in [\theta; \theta + \varepsilon],$$

тогда

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| = G\varepsilon e^{L\varepsilon} = 0_1(\varepsilon).$$

Пусть  $t \in (\theta + \varepsilon; t_1]$ , тогда получим

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| \leq 0_1(\varepsilon),$$

откуда имеем:

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| \leq 0_1(\varepsilon) + L_3 \int_{\theta+\varepsilon}^t ||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(\tau)|| d\tau.$$

Аналогично получим

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| \leq 0_1(\varepsilon)e^{L_3(t-\theta-\varepsilon)} = 0_2(\varepsilon),$$

тогда

$$||\Delta_{\theta v\varepsilon}x^0(t)|| \leq \beta\varepsilon, \quad \beta = Ge^{t_1-t_0}, t \in T.$$

При специальном приращении, определяемом (3.12), имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t) dt = \\
& = \Delta_v H(x^0(\theta), z^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o_3(\varepsilon), \\
& \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t) dt = \\
& = \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\theta), z^0(\theta), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta)}{\partial x} \Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(\theta) \varepsilon + o_4(\varepsilon) = o_5(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon$  достаточно мало, то

$$\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon-h} \frac{\partial \Delta_v H'(x^0(\tau), z^0(\tau), \psi^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial z} \Big|_{\tau=t+h} \Delta x^0(\tau) d\tau = 0.$$

Таким образом остаточный член в формуле (3.7) имеет порядок  $o(\varepsilon)$ . Тогда приращение функционала примет вид:

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} J(u^0) = -\Delta_v H(x^0(\theta), x^0(\theta - h), \psi^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o(\varepsilon),$$

т.е. при достаточно малых  $\varepsilon$  получим, что  $\Delta_{\theta v \varepsilon} J(u) < 0$ , что противоречит оптимальности управления  $u^0$ .

*Теорема доказана.*



# ГЛАВА 4

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

### 4.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу (3.1) - (3.3) в классе особых оптимальных управлений. Управление  $u^0(t)$  называется особым, если существуют подмножества  $\omega(t) \subseteq U, \text{mes} \omega > 0$  и  $V(t) \subseteq U, t \in \omega$ , состоящие из более чем одного элемента, что для любого  $v \in V(t), t \in \omega$  выполняется тождество:

$$\Delta_u H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) \equiv 0, \quad (4.1)$$

в дальнейшем будем считать, что  $\omega = T, V(t) = U$ .

Пусть  $f$  и  $\varphi$  - дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

### 4.2 Формула приращения критерия качества

Наряду с управлением  $u^0(t)$  рассмотрим другое кусочно-непрерывное управление  $\tilde{u}(t)$ , удовлетворяющее (3.2). Тогда приращение функционала (3.3) на соответствующих траекториях системы (3.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) &= J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_k^0 + \Delta y_k) - \varphi(y_1^0, \dots, y_k^0) = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_j + o(\|\Delta y\|^2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Определения функций  $H(x(t), z(t), \psi(t), u(t), t)$  и  $\psi(t)$  оставим такими же, как и в предыдущей главе. Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}'(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t)) dt + o_1(||\Delta y||). \quad (4.3)$$

При этом справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) = & \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\ & + \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta z'(t) \frac{\partial^2 f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z^2} \Delta z(t) + \\ & + \Delta x'(t) \frac{\partial^2 f(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \Delta z(t) + o(||(\Delta x'(t), \Delta z'(t))'||). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя выражение (4.4) в (4.3), также учтём (3.9) и тот факт, что управление  $u^0(t)$  - особое на всём промежутке управления, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i = & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1-h} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t+h), z^0(t+h), \psi^0(t+h), u^0(t+h), t+h)}{\partial z} \Delta x(t+h) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} \Delta x(t) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta z'(t) \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z^2} \Delta z(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \Delta z(t) dt - \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} o(||(\Delta x'(t), \Delta z'(t))'||) dt.$$

Линейное приближение по  $x$  и  $z$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) = & \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + \\ & + \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + o(||(\Delta x(t)', \Delta z(t))'||). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Его решение представимо в виде:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = & F(t, \tau_0) \Delta x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^t F(t, \tau) (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial x} \Delta x(\tau) + \\ & + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial z} \Delta z(\tau) + o(||(\Delta x(t)', \Delta z(t))'||)) d\tau, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $F(t, \tau)$  - решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = & -F(t, \tau) \frac{\partial f(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau)}{\partial x} - \\ & - F(t, \tau + h) \frac{\partial f(x^0(\tau + h), z^0(\tau + h), u^0(\tau + h), \tau + h)}{\partial z}, \quad t \in T, \end{aligned}$$

$$F(t, t - 0) = E, \quad F(t, \tau) = 0, \quad \tau > t.$$

Воспользуемся функциями  $Q_{ij}(t)$ , которые определяются выражением (2.5). Тогда третья сумма справа в (4.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i \partial y_j} \Delta y_j = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y'_i Q_{ij}^0(t) \Delta y_i - \\ & - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(t) \int_{t_0}^{\tau_j} (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + \\
& + o(\|(\Delta x(t)', \Delta z(t)')'\|) dt.
\end{aligned}$$

Рассмотрим ещё одну матричную функцию  $\Psi^0(t), t \in T$ , для которой положим

$$\Psi^0(t_1) = -\frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_k^2}, \quad (4.9)$$

проделывая те же действия что и в пункте (2.2) главы (2) получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \Delta y_i' \frac{\partial^2 \varphi(y^0)}{\partial y_i^2} \Delta y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \Delta y_i' Q_{ij}^0(\tau_i) \Delta y_j = \\
& -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \Delta x'(t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt = \\
& = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\Delta \dot{x}'(t) \Psi^0(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \dot{\Psi}^0(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \Psi^0(t) \Delta \dot{x}(t)) dt.
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Также справедливо следующее разложение:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x}(t) &= \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\
& + \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + o(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta z(t)\|).
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая выражения (4.2), (4.5), (4.8), (4.10), (4.11), приращение функционала примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^0) &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) dt - \\
& - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta z'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) \Delta x(t) dt - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) + \dot{\Psi}^0(t) + \right. \\
& \quad + \Psi^0(t) \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} + \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t+h), z^0(t+h), \psi^0(t+h), \tilde{u}(t+h), t+h)}{\partial z^2} \right) \Delta x(t) dt - \\
& - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(t) \int_{t_0}^{\tau_j} (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \\
& \quad + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + \\
& \quad + o(||(\Delta x(t)', \Delta z(t)')'||)) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} o(||\Delta x(t)|| + ||\Delta z(t)||) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt + o(||\Delta x', \Delta z'||) + o(||\Delta y||^2).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Определим  $\Psi^0(t)$  как решение системы:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi}(t) = & - \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} - \\
& - \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x^2} - \\
& - \frac{\partial^2 H(x^0(t+h), z^0(t+h), \psi^0(t+h), u^0(t+h), t+h)}{\partial z^2}, \\
\Psi(t) \equiv & 0, \quad t > t_1,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

тогда выражение (4.12) примет вид:

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\eta_1 = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Psi^0(t) + \dot{\Psi}^0(t) + \right. \\
& + \Psi^0(t) \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x^2} + \\
& \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t+h), z^0(t+h), \psi^0(t+h), \tilde{u}(t+h), t+h)}{\partial z^2} \right) \Delta x(t) dt, \\
\eta_2 = & - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k Q_{ij}^0(t) \int_{t_0}^{\tau_j} (\Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) + \\
& + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) + \\
& + \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) + o(\|(\Delta x(t)', \Delta z(t)')'\|)) dt, \\
\eta_3 = & - \int_{t_0}^{t_1} o(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta z(t)\|) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt + \\
& + o(\|\Delta x', \Delta z'\|) + o(\|\Delta y\|^2), \\
\eta_4 = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) \Delta x(t) dt.
\end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл, используя (4.6) и (4.7), получим:

$$\eta_4 = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \Delta x(t) dt = \\
& = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) \int_{t_0}^{t_1-h} F(t_1 - h, \tau) \Delta_{\tilde{u}} f(\tau) d\tau dt + \eta_5.
\end{aligned}$$

В результате приращение функционала имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) \int_{t_0}^{t_1-h} F(t_1 - h, \tau) \Delta_{\tilde{u}} f(\tau) d\tau dt + \eta,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_5.$$

### 4.3 Необходимое условие оптимальности второго порядка

**Теорема 4.** Для оптимальности особого управления  $u^0(t)$  и траектории  $x^0(t)$  в задаче (3.1), (1.2)-(1.3) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_v \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) +$$

$$+\Delta_v f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta_v f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \leq 0,$$

где  $u \in U$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\psi^0(t)$  - решение системы (3.9), с граничным условием (3.10) и скачками (3.11).  $\Psi^0(t)$  - решение системы (4.13) с граничным условием (4.9).

**Доказательство.** Предположим, что для любого достаточно малого  $\varepsilon$  существует  $\theta = \theta(\varepsilon) \in T$  и  $v = v(\varepsilon)$ , при которых выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} & \Delta_v \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta_v f(t) + \\ & + \Delta_v f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \Psi^0(t) \Delta_v f(t) > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Теперь рассмотрим специальное приращение управления

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon) \\ v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \theta \in T. \end{cases} \quad (4.16)$$

Покажем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  величина  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t)\|$  имеет порядок  $\varepsilon$  при  $t \in [t_0; \theta]$ . Оценим  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t)\|$  на  $[\theta; \theta + \varepsilon]$ . Учитывая, что  $\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(\theta)\| = 0$ , имеем:

$$\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t) = \int_{\theta}^t (f(\tilde{x}(\tau), \tilde{z}(\tau), v(\tau), \tau) - f(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau)) d\tau.$$

Проводя те же действия, что и при доказательстве теоремы 3 получим следующее:

$$\|\Delta_{\theta v \varepsilon} x^0(t)\| \leq \beta \varepsilon, \quad \beta = G e^{t_1 - t_0}, t \in T. \quad (4.17)$$

Четвёртое слагаемое в (4.14) на приращении (4.16) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) \int_{t_0}^{t_1 - h} F(t_1 - h, \tau) \Delta_{\tilde{u}} f(\tau) d\tau dt = \\ & \int_{\theta}^{t_1} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \Big) \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} F(t_1 - h, \tau) \Delta_{\tilde{u}} f(\tau) d\tau dt = \\
& = \int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v f(x^0(\tau), z^0(\tau), u^0(\tau), \tau) d\tau \int_{\theta}^{t_1} \Delta x'(t) \left( \frac{\partial f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Psi^0(t) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 H(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), \tilde{u}(t), t)}{\partial x \partial z} \right) F(t - h, \tau) dt.
\end{aligned}$$

$\Delta x(t)$  удовлетворяет системе (4.6) с начальным условием:

$$\Delta x(\theta + \varepsilon) = \varepsilon \Delta_v f(x^0(\theta), z^0(\theta), u^0(\theta), \theta) + o(\theta),$$

при этом

$$\begin{aligned}
& \Delta_{\tilde{u}} f(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t) \equiv 0, \\
& \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} \Delta x(t) \equiv 0, \\
& \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}} f'(x^0(t), z^0(t), u^0(t), t)}{\partial z} \Delta z(t) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Тогда при всех  $t > \theta + \varepsilon$  решение будет иметь вид:

$$\Delta x(t) = \varepsilon F(t, \theta) \Delta_v f(\theta) + o(\varepsilon).$$

Учитывая (4.17) на специальном приращении (4.16) получим следующее приращение функционала:

$$\begin{aligned}
\Delta J(u^0) &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \left( \Delta_v \frac{\partial H'(x^0(t), z^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + \Delta_v f'(\theta) \Psi^0(\theta) \right) \Delta_v f(\theta) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

При достаточно малых  $\varepsilon$  получим, что  $\Delta J(u^0) \leq 0$ , что противоречит нашему предположению (4.15).

*Теорема доказана.*

# ГЛАВА 5

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

### 5.1 Постановка задачи

В классе дискретных управляющих воздействий рассмотрим функционал, зависящий от промежуточных состояний системы:

$$J(u) = \varphi(x(\tau_1), \dots, x(\tau_k)), \quad (5.1)$$

система управления описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (5.2)$$

где  $x$  -  $n$ -мерный вектор состояния системы,  $u$  -  $r$ -мерный вектор управления;  $t$  - время;  $x_0, t_0, t_1$  фиксированы.

Функции  $\varphi(y), f(x, u), \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$  непрерывны по  $x$ , где  $y_i = x(\tau_i), i = \overline{1, k}$ .

Среди дискретных управлений  $u(t)$ , принимающих значения из заданного множества  $U$ :

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (5.3)$$

требуется найти такое, чтобы вдоль соответствующей траектории системы (5.2) функционал (5.1) принимал минимальное значение. Здесь

$$t_0 < \tau_1 \dots < \tau_k = t_1.$$

Управление  $u(t) \in U, t \in T$ , называется дискретным, если

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h], \quad \tau \in T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_1 - h\},$$

$$h = \frac{t_1 - t_0}{N}, \quad (5.4)$$

где  $N$  - заданное натуральное число.

Управление  $u(t), t \in T$ , называется допустимым, если оно дискретно и удовлетворяет условию (5.3).

Как обычно, допустимое управление  $u^0(t)$  и соответствующую ему траек-

торию  $x^0(t)$  системы (5.2), доставляющие минимум функционалу (5.1), будем называть оптимальными в задаче (5.1) - (5.3).

## 5.2 Формула приращения первого порядка критерия качества

Используя аналогичные обозначения (1.4) - (1.7), что и для систем в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий. Приращение критерия качества (5.1) примет вид:

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) &= J(\tilde{u}) - J(u^0) = \varphi(y_1^0 + \Delta y_1, \dots, y_k^0 + \Delta y_k) - \varphi(y_1^0, \dots, y_k^0) = \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(y^0)}{\partial y_i} \Delta y_i + o_1(||\Delta y||).\end{aligned}$$

Как и ранее, введём функцию  $\psi(t), t \in T$ , которая является решением уравнения:

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x}, t \in T, \quad (5.5)$$

которая в момент времени  $\tau_k$  принимает значение

$$\psi(\tau_k) = -\frac{\partial \varphi(x(\tau_k))}{\partial x}. \quad (5.6)$$

В точках  $\tau_i, i = \overline{1, k-1}$ , функция  $\psi(t)$  терпит разрывы, скачки которых определяются равенствами (1.19). Также отметим, что  $H(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(t)f(x(t), u(t))$ .

Повторяя аналогичные действия, что и в главах (1) и (3), получим:

$$\Delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\psi}(t) \Delta x(t) + \psi'(t) \Delta \dot{x}(t)) dt + o_1(||\Delta y||).$$

Используя формулы формулы (1.10) - (1.13) в классе дискретных управлений, получим следующее приращение критерия качества:

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}(t)} H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \Delta_{\tilde{u}(t)} H'(x^0(t), \psi(t), u^0(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt -\end{aligned}$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} o_2(||\Delta x(t)||)dt + o_1(||\Delta y(t)||). \quad (5.7)$$

### 5.3 Дискретный принцип максимума

**Теорема 5 (принцип квазимаксимум).** Для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое достаточно малое число  $h_* > 0$ , что для каждого  $0 < h < h_*$  оптимальная программа  $u^0(t), t \in T$ , задачи (5.1) - (5.3) вместе с соответствующими решениями  $x^0(t), \psi^0(t), t \in T$ , систем (5.2) и (5.5), (5.6) удовлетворяет условию  $\varepsilon$ -максимума

$$H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), 0 < \varepsilon(t) \leq \varepsilon, t \in T_h. \quad (5.8)$$

*Доказательство.* Пойдём от противного. Пусть существует такое число  $\varepsilon_* > 0$ , что для каждого достаточно малого  $h > 0$  найдётся такой момент  $\theta = \theta(h) \in T_h$  и вектор  $v = v(h) \in U$ , при которых выполняется неравенство

$$H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) < H(x^0(\theta), \psi(\theta), v) - \varepsilon_*,$$

также это можно представить в виде:

$$\Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) > \varepsilon_*.$$

Воспользуемся следующей вариацией

$$\Delta_{\theta v} u^0(t) = \begin{cases} v - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + h[ \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + h[, \theta \in T_h. \end{cases} \quad (5.9)$$

Откуда получим:

$$\Delta x(t) \equiv 0, t \in [0, \theta];$$

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), v) - f(x^0(t), u^0(t)), t \in [\theta, \theta + h[, \Delta x(\theta) = 0.$$

В силу интегральной непрерывности решений дифференциальных уравнений для достаточно малых  $h > 0$  имеем:

$$||\Delta x(t)|| \leq K_1 h, t \in [\theta, \theta + h[, \Delta x(\theta) = 0,$$

к тому же  $K_1$  не зависит от  $h$ . На отрезке  $[\theta + h, t_1]$  приращение траектории

удовлетворяет уравнению

$$\Delta \dot{x}(t) = f(x(t), u^0(t)) - f(x^0(t), u^0(t)), t \in [\theta + h, t_1], \|\Delta x(\theta + h)\| \leq K_1 h.$$

Так как решения дифференциальных уравнений непрерывны по начальным данным, то для всех достаточно малых  $h > 0$  выполняется неравенство

$$\|\Delta x(t)\| \leq K_2 h, t \in [\theta + h, t_1], K_2.$$

Следовательно, при достаточно малых  $h > 0$  имеем оценку  $\|\Delta x(t)\| \leq Kh, t \in T, K = \max(K_1, K_2) > 0$ . Тогда в формуле приращения (5.7) остаточный член равен  $\eta = o(h)$ , а сама формула приращения примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) &= - \int_{\theta}^{\theta+h} \Delta_v H(x^0(t), \psi(t), u^0(t)) dt + o(\eta) = \\ &= -h \Delta_v H(x^0(\theta), \psi(\theta), u^0(\theta)) + o_1(h) < -h\varepsilon_* + o_1(h). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Из (5.10) при достаточно малых  $h > 0$  получим  $\Delta J(u^0) < 0$ , что противоречит оптимальности управления  $u^0(t), t \in T$ .

Теорема доказана.

**Теорема 6 (дискретный принцип максимума).** Пусть в задаче (5.1)-(5.3) множество  $U$  — выпуклый компакт, функция  $f(x, u), x \in X, u \in U$ , имеет вид

$$f(x, u) = f_0(x) + B(x)u, \quad (5.11)$$

где  $f_0(x) \in R^n, B(x) \in R^{n \times r}, x \in X$ , — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда оптимальная программа  $u^0(t), t \in T$ , вместе с соответствующими решениями  $x^0(t), \psi(t), t \in T$ , систем (5.2), (5.11) и (5.5), (5.6) удовлетворяют условию максимума

$$\int_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s), u^0(t)) ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H(x^0(s), \psi(s), u) ds, t \in T_h. \quad (5.12)$$

*Доказательство.* Условие (5.12) в силу вида функции  $f(x, u), x \in X, u \in U$ , имеет вид

$$\left( \int_t^{t+h} \psi'(s) B(x^0(s)) ds \right) u^0(t) = \max_{u \in U} \left( \int_t^{t+h} \psi'(s) B(x^0(s)) ds \right) u, t \in T_h.$$

Пойдём от противного, пусть существует такой момент  $\theta \in T_h$  и вектор

$v \in U$ , которые удовлетворяют неравенству

$$\left(\int_{\theta}^{\theta+h} \psi'(s)B(x^0(s))ds\right)(v - u^0(\theta)) = \alpha > 0. \quad (5.13)$$

Построим вектор

$$v(\varepsilon) = u^0(\theta) + \varepsilon(v - u^0(\theta)). \quad (5.14)$$

Так как  $U$  является выпуклым множеством, то  $v(\varepsilon) \in U$  для любого  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Проварьируем программу  $u^0(t), t \in T$ , с помощью вариации (5.9). Проанализируем приращение траектории. Откуда получим:

$$\Delta x(t) \equiv 0, t \in [0, \theta];$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= f(x(t), v(\varepsilon)) - f(x^0(t), u^0(\theta)) = \\ &= f_0(x(t)) - f_0(x^0(t)) + B(x(t))v(\varepsilon) - B(x^0(t))u^0(\theta), t \in [\theta, \theta + h], \\ \Delta x(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \int_{\theta}^t B(x^0(s))(v(\varepsilon) - u^0(\theta))ds + \int_{\theta}^t (B(x(s)) - B(x^0(s)))v(\varepsilon)ds + \\ &+ \int_{\theta}^t (f_0(x(s)) - f_0(x^0(s)))ds. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Так как  $f_0(x), B(x), x \in X$ , - непрерывно дифференцируемые, следовательно, они удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned} \|f_0(x(s)) - f_0(x^0(s))\| &\leq L_1 \|\Delta x(s)\|, \\ \|B(x(s)) - B(x^0(s))\| &\leq L_2 \|\Delta x(s)\|, \\ s &\in [\theta, \theta + h], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где  $L_1, L_2$  - константы Липшица, которые в силу ограниченности траектории можно выбрать не зависящими от  $\varepsilon$ . Из (5.15) с учётом (5.14), (5.16) получим

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| &\leq \varepsilon \int_{\theta}^t \|B(x^0(s))(v - u^0(\theta))\|ds + L_1 \int_{\theta}^t \|\Delta x(s)\|ds + \\ &+ L_2 \int_{\theta}^t \|\Delta x(s)\|ds \cdot \|v(\varepsilon)\| \leq \varepsilon \left( \int_{\theta}^{\theta+h} \|B(x^0(s))\|ds \right) \cdot \|v - u^0(\theta)\| + \end{aligned}$$

$$+L \int_{\theta}^t \|\Delta x(s)\| ds,$$

где  $L = L_1 + L_2 \sup_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \|v(\varepsilon)\|$ . Пусть

$$c = \left( \int_{\theta}^{\theta+h} \|B(x^0(s))\| ds \right) \cdot \|v - u^0(\theta)\|.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| &\leq \varepsilon c + L \int_{\theta}^t \|\Delta x(s)\| ds \leq \varepsilon c + L \int_{\theta}^t (\varepsilon c + L \int_{\theta}^s \|\Delta x(\tau)\| d\tau) ds = \\ &= \varepsilon c + L\varepsilon c(t - \theta) + \varepsilon c \frac{L^2(t - \theta)^2}{2} + L^3 \int_{\theta}^t (t - s) \int_{\theta}^s \|\Delta x(\tau)\| d\tau ds \leq \dots \leq \\ &\leq \varepsilon c \left( 1 + \frac{L(t - \theta)}{1!} + \frac{L^2(t - \theta)^2}{2!} + \dots + \frac{L^k(t - \theta)^k}{k!} + \dots \right) = \varepsilon c e^{L(t - \theta)}. \end{aligned}$$

В результате для всех  $t \in [\theta, \theta + h]$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$  имеем

$$\|\Delta x(t)\| \leq K(v)\varepsilon,$$

где  $K(v) = K_1(v)e^{Lh}$ ,

$$K_1(v) = h \sup_{s \in [\theta, \theta+h]} \|B(x^0(s))\| \|v - u^0(\theta)\|.$$

Пусть  $t \in [\theta + h, t_1]$ . Тогда получим

$$\Delta \dot{x}(t) = f_0(x(t)) - f_0(x^0(t)) + (B(x(t)) - B(x^0(t)))u^0(t), \|\Delta x(\theta + h)\| \leq K\varepsilon.$$

Исходя из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных для всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  получим, что  $\|\Delta x(t)\| \leq \bar{K}\varepsilon, t \in [\theta + h, t_1], \bar{K} > 0$ .

В результате формула приращения примет вид:

$$\Delta J(u^0) = \varepsilon \left( \int_{\theta}^{\theta+h} \psi'(s) B(x^0(s)) ds \right) (v - u^0(\theta)) + o_1(\varepsilon) = -\varepsilon \alpha + o_1(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, в силу (5.13) для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  следует неравенство  $\Delta J(u^0) < 0$ , что противоречит условию оптимальности управления  $u^0(t), t \in T$ .

*Теорема доказана.*

## Заключение

В данной дипломной работе была проведена исследовательская работа, связанная с задачей оптимального управления с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы. Данная задача была рассмотрена в классе кусочно-непрерывных и дискретных управляющих воздействий, а также для обыкновенных систем и систем с постоянным запаздыванием по состоянию. В ходе дипломной работы были выведены и доказаны необходимые условия оптимальности особых управлений. Был доказан дискретный принцип максимума и квазимаксимума. Часть полученных результатов была опубликована в [10].

Особое внимание было уделено формуле приращения критерия качества, которая использовалась для вывода условий оптимальности и доказательств теорем. Данная формула рассматривалась для различных систем управлений и для различных классов управлений, что помогло найти общие черты, а также отличия в необходимых условиях оптимальности особых управлений.

Кроме того, был рассмотрен конкретный пример для обыкновенной системы управления в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий. В данном примере применяются формулы и неравенства, выведенные и доказанные в ходе дипломной работы.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. 3 изд. – М: Физматлит, 1983.
2. Альсевич, В.В. Особые управления для задач с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы / В.В Альсевич, О.В. Францкевич. - Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. н. 1983. №3. С. 33–37.
3. Альсевич, В.В. Оптимизация динамических систем с запаздываниями. / В.В. Альсевич. - Минск: БГУ, 2000.
4. Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов [и др.]. - Минск: Издательство «Четыре четверти», 2011.-472с.
5. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. - М., "Наука" 1973.
6. Гамкрелидзе, Р.В. К теории оптимальных процессов в линейных системах / Р.В. Гамкрелидзе. - Докл. АН СССР, т.116, №1, 1957.
7. Болтянский, В.Г. Принцип максимума в теории оптимальных процессов / В.Г. Болтянский. - Докл. АН СССР, т.119, №6, 1958.
8. Гамкрелидзе, Р.В. Оптимальные по быстрдействию процессы при ограниченных фазовых координатах / Р.В. Гамкрелидзе. Докл. - АН СССР, т.125, №3, 1959.
9. Розоноэр, Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем / Л.И. Розоноэр, І-Ш. Автоматика и телемеханика, т.20, №10-12, 1959.
10. Альсевич, В.В. Особые программы в задаче оптимального управления со специальным функционалом. / В.В. Альсевич, Н.И. Чеботаревский. - Физика и математика. Физические основы создания новых материалов и технологий: материалы 88-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 29 января – 16 февраля 2024 г. [Электронный ресурс] / Белорус. гос. технол. ун-т ; отв. за изд. И. В. Войтов. – Минск: БГТУ, 2024.