

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД- 12882/уч.



Теория вероятностей и математическая статистика

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 04 Информатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 04-2021, типового учебного плана №G 31-1-029/пр-тип от 30.06.2021 и учебных планов УВО № G 31-1-031/уч. от 30.06.2021 г., № G 31-1-021/уч. ин. от 23.07.2021 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Т.В. Цеховая – доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

П.М. Лаппо – доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТ:

Н.В. Лапицкая – заведующая кафедрой программного обеспечения информационных систем Учреждения образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”, кандидат технических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории вероятностей и математической статистики (протокол № 12 от 23.05.2023 г.);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой



А.Ю. Харин

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» – изложение основных сведений о построении и анализе математических моделей, учитывающих случайные факторы, а также создание базы для освоения основных понятий и методов современной прикладной математики, используемых при изучении различных дисциплин.

Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» знакомит студентов с основными методами построения и анализа математических моделей случайных явлений.

При изложении материала учебной дисциплины важно показать возможности использования вероятностно-статистического аппарата при решении прикладных задач, возникающих в различных областях науки, техники и экономики. Целесообразно выделить моменты построения математических моделей естественных процессов с целью их последующего изучения методами теории вероятностей и математической статистики, а также обратить внимание на алгоритмические аспекты получаемых результатов.

Задачи учебной дисциплины

– формирование представления о месте и роли теории вероятностей и математической статистики в современном мире;

– теоретическое освоение студентами основных положений дисциплины;

– формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания основ теории вероятностей и математической статистики;

– приобретение практических навыков решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий в их взаимной связи, а также задач, способствующих развитию начальных навыков научного исследования;

– формирование системы основных понятий, используемых для описания важнейших вероятностных моделей и методов, а также раскрытие взаимосвязи этих понятий.

Место учебной дисциплины

В системе подготовки специалиста с высшим образованием для специальности 1-31 03 04 «Информатика» учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» является дисциплиной компонента учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по учебным дисциплинам.

Основой для изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являются дисциплины государственного компонента «Дифференциальное и интегральное исчисление»,

«Функциональные последовательности и ряды, несобственный интеграл», «Ряды и функции комплексного аргумента» модуля «Математический анализ», дисциплины государственного компонента «Основы высшей алгебры». «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» модуля «Геометрия и алгебра», дисциплина государственного компонента «Дискретная математика и математическая логика» модуля «Дискретные структуры и алгоритмы», дисциплины компонента учреждения высшего образования «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения» модуля «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ».

Знания, полученные в учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» используются при изучении дисциплины государственного компонента «Математическое моделирование» модуля «Интеллектуальные системы», дисциплины компонента учреждения высшего образования «Исследование операций» модуля «Математические методы принятия решений», а также используются в ряде учебных дисциплин по выбору.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

СК-5. Применять основные модели теории вероятностей для математического описания и анализа явлений с неопределенностями.

СК-6. Использовать основные методы математической статистики для решения задач оценивания параметров моделей и проверки гипотез по наблюдаемым данным, выполнять вероятностно-статистический анализ случайных процессов, возникающих при решении прикладных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– аксиомы теории вероятностей; понятия случайных величин и их функций распределения; формулы преобразования распределений при функциональных преобразованиях; числовые характеристики случайных величин; понятие характеристической функции; виды сходимости последовательностей случайных величин; основные предельные теоремы;

– методы построения точечных и интервальных оценок; методы проверки гипотез;

– методы построения математических моделей случайных процессов и их исследования;

уметь:

– находить вероятности сложных событий; находить функции распределения случайных величин и распределения функций случайных величин; находить числовые характеристики случайных величин; исследовать сходимость последовательностей случайных величин;

–строить точечные и интервальные оценки неизвестных параметров, исследовать их свойства;

–осуществлять статистическую проверку гипотез; строить уравнения регрессии;

владеть:

–методами нахождения вероятностных характеристик распределений; методами нахождения предельных распределений последовательностей случайных величин;

–методами статистического оценивания параметров;

–методами построения математических моделей случайных процессов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5-м и 6-м семестрах.

Всего на изучение учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отведено:

в очной форме получения высшего образования: 324 часа, из которых 170 аудиторных часов, в том числе лекционных – 102 часа, лабораторных занятий – 60 часов, управляемой самостоятельной работы – 8 часов.

- в 5 семестре отведено всего 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

- в 6 семестре отведено всего 108 часов, в том числе 68 аудиторных часа, из них: лекции – 34 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория вероятностей

Тема 1.1. Основные понятия теории вероятностей

Случайный эксперимент. Понятие о вероятности. Простейшие вероятностные модели. Математическая модель случайного эксперимента. Аксиоматика Колмогорова. Условные вероятности. Независимость событий. Формула Бернулли. Формулы полной вероятности и Байеса. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

Тема 1.2. Случайные величины

Одномерные случайные величины и их функции распределения. Типы распределений случайных величин. Многомерные случайные величины. Понятие копулы. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.

Тема 1.3. Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание простых случайных величин. Математическое ожидание неотрицательных и произвольных случайных величин. Интегралы Лебега-Стилтьеса, Римана-Стилтьеса и формулы для их вычисления. Моменты случайных величин. Условное математическое ожидание относительно событий, случайных величин и сигма-алгебр.

Тема 1.4. Сходимость последовательностей случайных величин

Виды сходимости последовательностей случайных величин и их критерии. Соотношения между видами сходимости.

Тема 1.5. Характеристическая функция

Характеристическая функция и ее свойства. Теорема единственности. Слабая сходимость распределений и теоремы Хелли. Теорема непрерывности для характеристических функций. Производящая функция.

Тема 1.6. Предельные теоремы

Закон больших чисел. Критерий и достаточные условия выполнимости закона больших чисел. Усиленный закон больших чисел. Теоремы Колмогорова об условиях выполнимости усиленного закона больших чисел. Центральная предельная теорема и ее следствия.

Раздел II. Математическая статистика

Тема 2.1. Выборки и точечные оценки

Выборки и выборочные характеристики. Основные понятия теории точечного оценивания. Неравенства информации, Крамера-Рао. Эффективные оценки. Достаточные статистики.

Тема 2.2. Методы построения точечных и интервальных оценок

Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Свойства оценок метода наименьших квадратов в линейном случае. Байесовский метод. Доверительный интервал. Методы построения интервальных оценок.

Тема 2.3. Проверка статистических гипотез

Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения. Дисперсионный анализ. Последовательный анализ Вальда. Критерии согласия. Полиномиальная регрессия.

Раздел III. Случайные процессы

Тема 3.1. Основные понятия теории случайных процессов

Способы задания случайных процессов. Эквивалентные, тождественные и сепарабельные случайные процессы. Основные характеристики случайных процессов. Классификация случайных процессов.

Тема 3.2. Процессы с независимыми приращениями

Вид характеристической функции процесса с независимыми приращениями. Винеровский процесс и его свойства. Пуассоновский процесс и его свойства.

Тема 3.3. Цепи Маркова

Основные понятия теории цепей Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей. Стационарные вероятности для цепей Маркова. Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем. Эргодические цепи Маркова. Дифференциальные уравнения Колмогорова для цепей Маркова с непрерывным временем. Ветвящиеся процессы с непрерывным временем.

Тема 3.4. Процессы с конечными моментами второго порядка

Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость в среднем квадратичном. Стохастические дифференциальные уравнения.

Тема 3.5. Стационарные в широком смысле случайные процессы

Спектральное представление случайного процесса и его ковариационной функции. Спектральное представление вещественного случайного процесса. Линейные преобразования случайных процессов. Фильтрация случайных процессов. Прогнозирование случайных процессов. Интерполяция случайных процессов.

Тема 3.6. Стохастические интегралы Ито

Определение и основные свойства стохастических интегралов Ито.

Тема 3.7. Статистические выводы о случайных процессах

Параметрический и непараметрический анализ временных рядов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	Теория вероятностей	48			20		4	
1.1	Основные понятия теории вероятностей	10			6			
1.1.1	Случайный эксперимент. Понятие о вероятности. Простейшие вероятностные модели. Математическая модель случайного эксперимента. Аксиоматика Колмогорова.	4			2			Устный опрос
1.1.2	Условные вероятности. Независимость событий. Формула Бернулли. Формулы полной вероятности и Байеса. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.	6			4			Контрольная работа №1
1.2	Случайные величины	8			4			
1.2.1	Типы случайных величин. Одномерные случайные величины и их функции распределения.	2			1			Устный опрос
1.2.2	Дискретные и непрерывные случайные величины.	2			1			Устный опрос
1.2.3	Многомерные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Копулы.	2			1			Устный опрос

1.2.4	Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.	2			1			Контрольная работа №2
1.3	Числовые характеристики функций случайных величин	10			2		2	Устный опрос
1.3.1	Математическое ожидание дискретных случайных величин. Интеграл Лебега. Интегралы Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса.	2			1			Устный опрос
1.3.2	Математическое ожидание произвольных случайных величин и формулы для его вычисления.	2						
1.3.3	Моменты случайных величин. Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Смешанные моменты и семиинварианты.	2					2	Устный опрос
1.3.4	Неравенства для математических ожиданий.	2						
1.3.5	Условное математическое ожидание относительно дискретных и непрерывных случайных величин.	2			1			Устный опрос
1.4	Сходимость последовательностей случайных величин	8			2		2	
1.4.1	Виды сходимости последовательностей случайных величин. Сходимость с вероятностью единица. Критерий сходимости.	2			2			Устный опрос
1.4.2	Сходимость по вероятности. Сходимость по распределению.	2						
1.4.3	Сходимость в среднем и в среднем квадратичном. Критерии сходимости.	2						

1.4.4	Соотношение между сходимостями. Теорема единственности. Теорема Хелли.	2					2	Устный опрос
1.5	Характеристическая функция	4			2			
1.5.1	Характеристическая функция и ее свойства. Теорема единственности.	2			2			Коллоквиум №1, контрольная работа №3
1.5.2	Слабая сходимость распределений и теоремы Хелли. Теорема непрерывности для характеристических функций.	2						
1.6	Предельные теоремы	8			4			
1.6.1	Закон больших чисел. Критерий и достаточные условия выполнимости закона больших чисел.	2			1			Устный опрос
1.6.2	Усиленный закон больших чисел.	2			1			Устный опрос
1.6.3	Теоремы Колмогорова об условиях выполнимости усиленного закона больших чисел.	2			1			Устный опрос
1.6.4	Центральная предельная теорема и ее следствия.	2			1			Контрольная работа №4
II	Математическая статистика	20			10			
2.1	Выборки и точечные оценки	7			4			
2.1.1	Выборки и выборочные характеристики. Основные понятия теории точечного оценивания.	4						
2.1.2	Неравенства информации и Крамера-Рао. Эффективные оценки.	2			2			Устный опрос
2.1.3	Достаточные статистики. Распределения, обладающие достаточными статистиками.	1			2			Устный опрос
2.2	Методы построения точечных и интервальных	8			2			

	оценок							
2.2.1	Метод моментов. Оценки по методу моментов и их свойства. Метод максимального правдоподобия. Свойства оценок максимального правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Свойства оценок метода наименьших квадратов в линейном случае.	6			1			Контрольная работа №5
2.2.2	Доверительный интервал. Методы построения интервальных оценок. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.	2			1			Устный опрос
2.3	Проверка статистических гипотез	5			4			
2.3.1	Правила проверки гипотез. Основные понятия теории статистической проверки гипотез. Лемма Неймана-Пирсона.	1			1			Устный опрос
2.3.2	Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.	1			1			Устный опрос
2.3.3	Дисперсионный анализ.	1			1			Устный опрос
2.3.4	Последовательный анализ Вальда.	2			1			Устный опрос
3	Случайные процессы	34			30		4	
3.1	Основные понятия теории случайных процессов	8			8			
3.1.1	Способы задания случайных процессов. Эквивалентные, тождественные и сепарабельные случайные процессы.	2			2			Устный опрос
3.1.2	Основные характеристики случайных процессов.	4			4			Контрольная работа б
3.1.3	Классификация случайных процессов.	2			2			Устный опрос

3.2	Процессы с независимыми приращениями	4			2		2	
3.2.1.	Вид характеристической функции процесса с независимыми приращениями.	4			2			Контрольная работа 7
3.2.2.	Винеровский процесс и его свойства. Пуассоновский процесс и его свойства.						2	Устный опрос
3.3	Цепи Маркова	6			6			
3.3.1	Основные понятия теории цепей Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей. Стационарные вероятности для цепей Маркова.	2			2			Устный опрос
3.3.2	Классификация состояний цепи Маркова с дискретным временем. Эргодические цепи Маркова.	2			2			Контрольная работа 8
3.3.3	Дифференциальные уравнения Колмогорова для цепей Маркова с непрерывным временем. Ветвящиеся процессы с непрерывным временем.	2			2			Устный опрос
3.4	Процессы с конечными моментами второго порядка	6			4		2	
3.4.1	Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность и дифференцируемость в среднем квадратичном.	4			2		2	Устный опрос
3.4.2	Интегрируемость в среднем квадратичном. Стохастические дифференциальные уравнения.	2			2			Контрольная работа 9
3.5	Стационарные в широком смысле случайные процессы	6			6			
3.5.1	Спектральное представление случайного процесса и его ковариационной функции.	2			2			Устный опрос

3.5.2	Спектральное представление вещественного случайного процесса.	2			2			Контрольная работа 10
3.5.3	Линейные преобразования случайных процессов. Фильтрация случайных процессов. Прогнозирование случайных процессов. Интерполяция случайных процессов.	2			2			Коллоквиум по темам 3.1-3.5
3.6	Стохастические интегралы Ито	2			2			
3.6.1	Определение и основные свойства стохастических интегралов Ито.	2			2			Устный опрос
3.7	Статистические выводы о случайных процессах	2			2			
3.7.1	Параметрический и непараметрический анализ временных рядов.	2			2			Устный опрос

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Боровков, А. А. Теория вероятностей : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика" / А. А. Боровков. - Изд. стер. - Москва : URSS : Либроком, 2023. - 652 с.
2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Б. В. Гнеденко ; [предисл. А. Н. Ширяева] ; МГУ им. М. В. Ломоносова. - Изд. 13-е. - Москва : URSS, 2022. - 448 с.
3. Матальцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студ. уво по физико-математическим спец. / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. - Минск : Вышэйшая школа, 2017. - 591 с.
4. Насыров, Ф. С. Основы теории случайных процессов : учебник для использования в образовательном процессе образовательных организаций, реализующих программы высшего образования по направлениям подготовки бакалавриата "Прикладная математика и информатика" / Ф. С. Насыров. - Старый Оскол : ТНТ, 2022. - 221 с.
5. Григорьев-Голубев, В. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Руководство по решению задач : [учебник для студентов и преподавателей вузов] / В. В. Григорьев-Голубев, Н. В. Васильева, Е. А. Кротов. - 2-е изд. - Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2021. - 304 с. - <https://ibooks.ru/bookshelf/380027/reading>.

Перечень дополнительной литературы

6. Боровков А.А. Математическая статистика. А.А. Боровков. – М.: Наука, 2007. – 772 с.
7. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
8. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
9. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
10. Харин Ю.С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика/ Ю.С. Харин, Н.М. Зуев, Е. Е. Жук – Минск: БГУ, 2011. – 463 с.
11. Харин Ю.С. Теория вероятностей, математическая статистика. Задачи, упражнения, тестовые задания / Ю.С. Харин, Е.Е. Жук, В.И. Лобач, Е.Н. Орлова, А.Ю. Харин – Минск: БГУ, 2010. – 302 с.
12. Харин Ю.С., Орлова Е.Н., Сталевская С.Н. Электронный учебно-методический комплекс по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (<http://cdn.edu.by/ems/tv.zip>).
13. Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. /А.Н. Ширяев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 928 с.

Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edufpmi.bsu.by/course/view.php?id=334>. – Дата доступа: 02.09.2023.
2. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://edufpmi.bsu.by/course/view.php?id=135>. – Дата доступа: 02.09.2023.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

- устные опросы;
- письменные контрольные работы по отдельным темам дисциплины;
- коллоквиумы.

Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» учебным планом предусмотрен **экзамен** в пятом и шестом семестрах.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- устный опрос – 30 %;
- контрольные работы – 20 %;
- коллоквиум – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) - 40% и экзаменационной отметки - 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.3. Числовые характеристики функций случайных величин.
1.3.3. Моменты случайных величин. Дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин. Смешанные моменты и семиинварианты (2 ч.).

Примерный перечень заданий:

1. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках с координатами $(0, 0)$, $(0, 1)$ и $(2, 0)$. Найти коэффициент корреляции между X и Y .
2. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет равномерное распределение в круге радиуса 1 с центром в начале координат. Найти ковариацию между X и Y .
3. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальные распределения с параметрами 0 и 1. Найти семиинвариант второго порядка для случайной величины $Z = 2X + 3Y + 1$.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 1.4. Сходимость последовательностей случайных величин.

1.4.4. Соотношение между сходимостями. Теорема единственности. Теорема Хелли (2 ч.).

Примерный перечень заданий:

1. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega=[0,1]$, \mathcal{F} - сигма-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, P - мера Лебега, задана последовательность случайных величин вида

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} n^3 & \text{для } \omega \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right], \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Сходится ли $\xi_n(\omega)$ по вероятности?

2. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega=[0,1]$, \mathcal{F} - сигма-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, P - мера Лебега, задана последовательность случайных величин вида

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \sin n, & \text{для } \omega \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Сходится ли $\xi_n(\omega)$ почти наверное?

3. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega=[0,1]$, \mathcal{F} - сигма-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, P - мера Лебега, задана последовательность случайных величин вида

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \sin n, & \text{для } \omega \in \left[0, \frac{1}{n^2}\right] \\ 3, & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Сходится ли $\xi_n(\omega)$ в среднем порядка 3?

4. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega=[0,1]$, \mathcal{F} - сигма-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0,1]$, P - мера Лебега, задана последовательность случайных величин вида

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{для } \omega \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1, & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Сходится ли $\xi_n(\omega)$ по распределению?
Форма контроля – устный опрос.

Тема 3.2. Процессы с независимыми приращениями. 3.2.2.
Винеровский процесс и его свойства. Пуассоновский процесс и его свойства (2 ч.).

Примерный перечень заданий:

1. Показать, что приращения винеровского процесса (процесса броуновского движения) на непересекающихся промежутках времени независимы. Найти распределение произвольного приращения.

2. Пусть $\omega(t)$, $t \geq 0$, – процесс броуновского движения. Положим

$$X(t) = \begin{cases} \omega(t), t \leq T, \\ 2\omega(T) - \omega(t), t > T. \end{cases}$$

Доказать, что $X(t)$ является винеровским процессом.

3. Пусть $\omega(t)$, $t \geq 0$, – винеровский процесс, выходящий из нуля. Положим $\xi(t) = \exp(-t) \omega(e^{2t})$, $t \in \mathbb{R}$. Найдите ковариационную функцию $\xi(t)$.

4. Показать, что винеровский случайный процесс является марковским.

5. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию процесса Пуассона.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 3.4. Процессы с конечными моментами второго порядка. 3.4.1.
Ковариационная функция случайного процесса и ее свойства. Непрерывность и дифференцируемость в среднем квадратичном (2 ч.).

Примерный перечень заданий:

1. Найти ковариационную функцию процесса $\xi(t) = X \cos(t + Y)$, где X , Y – независимы, X имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, а Y имеет равномерное распределение на $[-\pi, \pi]$.

2. Являются ли функции:

a) $R(t, s) = \exp(|t - s|)$, $t, s \in \mathbb{R}$;

b) $R(t, s) = \exp(i\omega(t - s))$, $t, s \in \mathbb{R}$;

c) $R(t, s) = \cos(t - s)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

ковариационными функциями некоторых случайных процессов.

3. Докажите, что пуассоновский случайный процесс является СК-непрерывным.

4. Пусть центрированная случайная функция $\xi(t)$ имеет ковариационную функцию $R(t, s) = 2 \exp(-a(t - s)^2)$, $a > 0$. Вычислить дисперсию $D\xi'(t)$ ее среднеквадратической производной $\xi'(t)$.

5. Случайный процесс $X(t) = \phi(t)Y$, где случайная величина Y такая, что $EY = 0$, $EY^2 = \sigma^2 < \infty$, а функция $\phi(t)$ – непрерывная и дифференцируемая. Доказать, что процесс $X(t)$ является непрерывным и дифференцируемым в среднеквадратическом смысле, найти его производную.

6. Показать, что случайный процесс $\xi(t, \omega) = \alpha(\omega)\cos\phi t + \beta(\omega)\sin\phi t$, $t \in T = [0, \infty)$, где $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ – независимые случайные величины, $E\alpha(\omega) = m_\alpha$, $E\beta(\omega) = m_\beta$, $D\alpha(\omega) = \sigma_\alpha^2$, $D\beta(\omega) = \sigma_\beta^2$, а $\phi \in \mathbb{R}$ – известная постоянная, является непрерывным в СК-смысле на T .

7. Показать, что винеровский процесс нигде не дифференцируем в СК-смысле.

Форма контроля – устный опрос.

Примерный перечень тем для коллоквиумов

1) Коллоквиум №1 по темам:

- Основные понятия теории вероятностей
- Формулы Байеса и полной вероятности
- Независимость событий
- Числовые характеристики случайных величин
- Виды сходимости последовательностей случайных величин
- Характеристические функции

2) Коллоквиум №2 по темам:

- Основные понятия теории случайных процессов
- Процессы с независимыми приращениями
- Цепи Маркова
- Процессы с конечными моментами второго порядка
- Стационарные в широком смысле случайные процессы

Примерный перечень вопросов к коллоквиуму №1

1. Аксиоматика Колмогорова. Эквивалентность аксиом.
2. Независимость событий. Независимость в совокупности и попарная независимость.
3. Функция распределения одномерной случайной величины и ее свойства.
4. Типы распределений одномерных случайных величин. Примеры.
5. Многомерные случайные величины. Свойства функций распределения.
6. Свойства плотности многомерных случайных величин.
7. Понятие о копулах. Их виды.
8. Независимость сигма-алгебр и случайных величин.
9. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
10. Математическое ожидание простых случайных величин и его свойства.
11. Определение математического ожидания произвольных случайных величин.
12. Свойства математического ожидания произвольных случайных величин.
13. Лемма Фату и теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

14. Неравенства для математических ожиданий (для модуля, Чебышева, Йенсена, Ляпунова).
15. Неравенства Гельдера и Минковского.
16. Интегралы Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса.
17. Теорема о замене переменных под знаком интеграла Лебега.
18. Понятие о многомерном интеграле Римана-Стилтьеса.
19. Моменты случайных величин. Дисперсия и ее свойства.
20. Коэффициент корреляции и его свойства.
21. Условное математическое ожидание относительно события и дискретной случайной величины. Тождество Вальда.
22. Условное математическое ожидание относительно случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Основное соотношение.
23. Условное математическое ожидание (общий случай) и его свойства.
24. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Сходимость с вероятностью 1. Необходимое и достаточное условие.
25. Соотношение между видами сходимости.

Примерный перечень вопросов к коллоквиуму №2

1. Случайные процессы и их основные характеристики.
2. Способы задания случайных процессов. Конечномерные распределения случайных процессов. Эквивалентные, тождественные и сепарабельные случайные процессы.
3. Моментные характеристики действительных случайных процессов.
4. Ковариационная функция действительного случайного процесса. Ее свойства. Критерий.
5. Моментные характеристики комплексных случайных процессов. Свойства ковариационной функции комплексного случайного процесса. Критерий.
6. Примеры случайных процессов. Гауссовский случайный процесс.
7. Процессы броуновского движения. Простейшие свойства. Вид плотности распределения. Ковариационная функция процесса броуновского движения.
8. Свойства процесса броуновского движения. Броуновский мост.
9. Процессы Пуассона, процессы Коши. Свойства. Ковариационная функция процесса Пуассона.
10. Процессы Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
11. Диффузионные процессы.
12. Случайные процессы с некоррелированными, ортогональными и независимыми приращениями. Однородные случайные процессы. Примеры. Случайные процессы со стационарными приращениями.
13. Стационарные в узком смысле случайные процессы.
14. Стационарные в широком смысле случайные процессы.

15. Спектральные характеристики случайных процессов с непрерывным и дискретным временем.
16. Спектральные характеристики стационарных случайных последовательностей. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции.
17. Спектральные характеристики стационарных случайных процессов с непрерывным временем. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции. Ширина спектра.
18. Каноническое разложение случайных функций. Спектральное разложение стационарных случайных функций.
19. Элементы стохастического анализа. Сходимости случайных функций. Критерии.
20. Непрерывность случайных функций. Критерии.
21. Дифференцирование случайных функций. Критерии.
22. Интегрирование случайных функций. Критерий.
23. Интегрирование случайных функций с весом. Критерий.
24. Операторы. Действие линейного оператора на случайный процесс. Примеры операторов.
25. Дифференциальные уравнения со случайной правой частью.
26. Эргодические по отношению к математическому ожиданию и дисперсии случайные процессы.

Рекомендуемая тематика контрольных работ

- 1) Контрольная работа №1 Простейшие вероятностные модели. Основные формулы вычисления вероятностей событий.
- 2) Контрольная работа №2. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
- 3) Контрольная работа №3. Числовые характеристики случайных величин и характеристические функции.
- 4) Контрольная работа №4. Предельные теоремы..
- 5) Контрольная работа №5. Методы построения точечных и интервальных оценок параметров распределений.
- 6) Контрольная работа №6. Основные характеристики случайных процессов.
- 7) Контрольная работа №7. Процессы с независимыми приращениями
- 8) Контрольная работа №8. Цепи Маркова
- 9) Контрольная работа №9. Процессы с конечными моментами второго порядка
- 10) Контрольная работа №10. Стационарные в широком смысле случайные процессы

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются:

- 1) **практико-ориентированный подход**, который предполагает:
 - освоение содержания образования через решения практических задач;
 - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
 - ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
 - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.
- 2) **методы и приемы развития критического мышления**, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и промежуточной аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену (5 семестр)

1. Аксиоматика Колмогорова. Эквивалентность аксиом.
2. Независимость событий. Независимость в совокупности и попарная независимость.
3. Функция распределения одномерной случайной величины и ее свойства.
4. Типы распределений одномерных случайных величин. Примеры.
5. Многомерные случайные величины. Свойства функций распределения.
6. Свойства плотности многомерных случайных величин.
7. Понятие о копулах. Их виды.
8. Независимость сигма-алгебр и случайных величин.

9. Функциональные преобразования случайных величин. Формула преобразования плотностей.
10. Математическое ожидание простых случайных величин и его свойства.
11. Определение математического ожидания произвольных случайных величин.
12. Свойства математического ожидания произвольных случайных величин.
13. Лемма Фату и теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
14. Неравенства для математических ожиданий (для модуля, Чебышева, Йенсена, Ляпунова).
15. Неравенства Гельдера и Минковского.
16. Интегралы Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса.
17. Теорема о замене переменных под знаком интеграла Лебега.
18. Понятие о многомерном интеграле Римана-Стилтьеса.
19. Моменты случайных величин. Дисперсия и ее свойства.
20. Коэффициент корреляции и его свойства.
21. Условное математическое ожидание относительно события и дискретной случайной величины. Тождество Вальда.
22. Условное математическое ожидание относительно случайной величины с абсолютно непрерывным распределением. Основное соотношение.
23. Условное математическое ожидание (общий случай) и его свойства.
24. Виды сходимости последовательностей случайных величин. Сходимость с вероятностью 1. Необходимое и достаточное условие.
25. Соотношение между видами сходимости.
26. Лемма Бореля-Кантелли.
27. Закон больших чисел. Необходимое и достаточное условие. Теоремы Чебышева и Маркова.
28. Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ). Неравенство Гаека-Реньи.
29. Достаточное условие УЗБЧ 1 теорема Колмогорова.
30. Необходимое и достаточное условие УЗБЧ. Вторая теорема Колмогорова.
31. Характеристические функции и их свойства.
32. Формула обращения.
33. Лемма о слабой сходимости и 1 теорема Хелли.
34. Вторая теорема Хелли.
35. Теорема непрерывности.
36. Центральная предельная теорема (ЦПТ).
37. Следствия центральной предельной теоремы. Теорема Муавра-Лапласа, теорема Леви-Линдберга.
38. Теорема Пуассона
39. Основные понятия статистического оценивания параметров. Несмещенность, состоятельность, матрица вариации.
40. Выборочные функции распределения, моменты, характеристические функции и их свойства.
41. Информационная матрица Фишера и ее свойства. Условия регулярности.
42. Неравенство информации.

43. Неравенство Крамера-Рао. Критерий эффективности оценки.
44. Метод максимального правдоподобия. Его сущность. Пример.
45. Сильная состоятельность оценки максимального правдоподобия.
46. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия.
47. Метод моментов.
48. Метод наименьших квадратов. Вид оценки в линейной модели.
49. Метод наименьших квадратов. Оценка дисперсии ошибок.
50. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.
51. Методы построения доверительных интервалов.
52. Доверительные интервалы для параметра математического ожидания в случае выборки из нормального распределения (дисперсия известна).
53. Доверительный интервал для параметра математического ожидания в случае выборки из нормального распределения (дисперсия неизвестна.).
54. Понятие о процедуре проверки гипотез. Вероятности ошибок 1-го и второго рода. Мощность критерия.
55. Лемма Неймана-Пирсона.
56. Последовательный анализ Вальда.
57. Дисперсионном анализ.

(6 семестр)

1. Случайные процессы и их основные характеристики.
2. Способы задания случайных процессов. Конечномерные распределения случайных процессов. Эквивалентные, тождественные и сепарабельные случайные процессы.
3. Моментные характеристики действительных случайных процессов.
4. Ковариационная функция действительного случайного процесса. Ее свойства. Критерий.
5. Моментные характеристики комплексных случайных процессов. Свойства ковариационной функции комплексного случайного процесса. Критерий.
6. Примеры случайных процессов. Гауссовский случайный процесс.
7. Процессы броуновского движения. Простейшие свойства. Вид плотности распределения. Ковариационная функция процесса броуновского движения.
8. Свойства процесса броуновского движения. Броуновский мост.
9. Процессы Пуассона, процессы Коши. Свойства. Ковариационная функция процесса Пуассона.
10. Процессы Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
11. Диффузионные процессы.
12. Случайные процессы с некоррелированными, ортогональными и независимыми приращениями. Однородные случайные процессы. Примеры. Случайные процессы со стационарными приращениями.
13. Стационарные в узком смысле случайные процессы.

14. Стационарные в широком смысле случайные процессы.
15. Спектральные характеристики случайных процессов с непрерывным и дискретным временем.
16. Спектральные характеристики стационарных случайных последовательностей. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции.
17. Спектральные характеристики стационарных случайных процессов с непрерывным временем. Свойства спектральной плотности. Спектральное представление ковариационной функции. Ширина спектра.
18. Каноническое разложение случайных функций. Спектральное разложение стационарных случайных функций.
19. Элементы стохастического анализа. Сходимости случайных функций. Критерии.
20. Непрерывность случайных функций. Критерии.
21. Дифференцирование случайных функций. Критерии.
22. Интегрирование случайных функций. Критерий.
23. Интегрирование случайных функций с весом. Критерий.
24. Операторы. Действие линейного оператора на случайный процесс. Примеры операторов.
25. Дифференциальные уравнения со случайной правой частью.
26. Эргодические по отношению к математическому ожиданию и дисперсии случайные процессы.
27. Стохастические интегралы от неслучайных функций. Свойства.
28. Спектральное представление (в виде стохастического интеграла) стационарных случайных процессов с дискретным и непрерывным временем.
29. Стационарное линейное преобразование стационарных случайных процессов с дискретным и непрерывным временем в частотной области.
30. Стационарное линейное преобразование стационарных случайных последовательностей во временной области (фильтры).
31. Линейное прогнозирование стационарных случайных последовательностей.
32. Сингулярные и регулярные последовательности. Разложение Вольда. Критерии регулярности стационарной случайной последовательности.
33. Линейное прогнозирование стационарных случайных процессов с непрерывным временем.
34. Модели авторегрессии (АР), скользящего среднего (СС), модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС).
35. Стохастический интеграл Ито от ступенчатой неупреждающей функции.
36. Стохастический интеграл Ито от случайной неупреждающей функции. Стохастический θ -интеграл.
37. Цепи Маркова с дискретным временем. Основные понятия. Однородные цепи Маркова. Формула Маркова. Классификация состояний однородной цепи Маркова.

38. Возвратность. Критерий возвратности. Некоторые свойства невозвратных и возвратных состояний. О существовании предельных и стационарных распределений.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ¹
1. Математическое моделирование	Кафедра математического моделирования и анализа данных	Предложений нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023г.)
2. Исследование операций	Кафедра информационных систем управления	Предложений нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ____ / ____ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры теории вероятностей и математической статистики (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, звание)

(подпись)

(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

(ученая степень, звание)

(подпись)

(И.О.Фамилия)