

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ

Е. М. Мифодьева

katyatomkovich22@gmail.com;

*Научный руководитель — В. А. Нифагин, кандидат физико-математических наук,
доцент*

В работе рассматривается преобразование Радона – математический метод решения обратной задачи, лежащий в основе компьютерной томографии, предложен пример вычисления и обращения преобразования Радона в задачах интегральной геометрии.

Ключевые слова: обратная задача; восстановление; преобразование Радона; томография.

При анализе различных прикладных проблем, а также в ряде теоретических исследований возникает задача определения неизвестной функции одной или нескольких переменных по семейству интегралов от нее. Примером задачи такого типа является возникающая в компьютерной томографии задача определения функции двух переменных $f(x, y)$ по семейству интегралов $\int_{L(p, \varphi)} f(x, y) dl$, взятых вдоль различных прямых $L(p, \varphi)$ (p и φ параметры, определяющие прямую) в плоскости x, y . [1]

В основе обратных задач интегральной геометрии по восстановлению формы лежит идея о том, что внутреннюю структуру объекта можно представить, если получить двумерное (плоское) изображение поперечного сечения исследуемого объекта.

Метод получения двумерного изображения содержит два этапа. На первом этапе формируются проекционные данные, на втором – по этим данным восстанавливается изображение поперечного сечения.

При исследовании внутренней структуры объекта его просвечивают, например, параллельным пучком хорошо сфокусированных рентгеновских лучей. Просвечивая тело с одного направления, получают одно плоское (двумерное) теневое изображение трехмерного тела. Имея большое количество таких проекционных снимков с различных направлений, можно с достаточной степенью точности восстановить внутреннюю структуру объекта, а точнее – функцию плотности поглощения излучения $f(x, y, z)$. [7]

Восстановление трехмерной функции $f(x, y, z)$ весьма сложно и чаще трехмерный объект представляют в виде набора тонких срезов. Внутри каждого среза плотность f считают функцией двух переменных. Схема

сканирования одного слоя представлена на рис. 1. Направление лучей составляет некоторый угол φ с осью x . Лучи ослабляются веществом, находящимся внутри объекта, пропорционально его плотности.

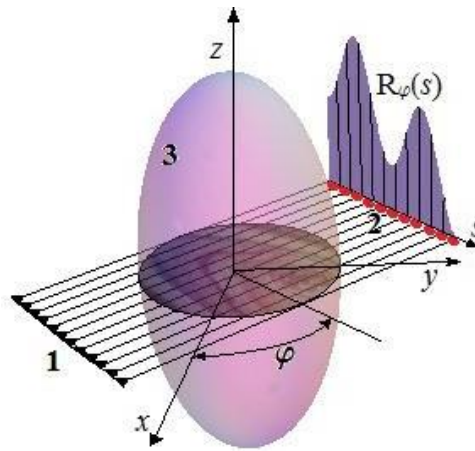


Рис. 1. Зондирование трехмерного объекта: 1 – источники; 2 – детекторы; 3 – объект

С противоположной стороны объекта располагаются детекторы, регистрирующие интенсивность каждого луча, прошедшего через объект. Полученная по ним функция R зависит от одной переменной s (при фиксированном направлении излучения, определяемого углом φ). Для восстановления функции двух переменных применяют зондирование объекта с различных направлений, варьируя угол φ . Поворачивая систему «источники – детекторы», получают множество проекций $R(s, \varphi)$ слоя. Схема сканирования одного такого слоя с различных направлений представлена на рис. 2.

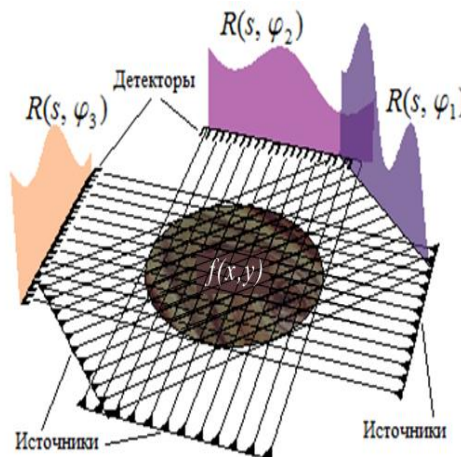


Рис. 2. Схема сканирования одного слоя в различных направлениях

Определив функцию $f(x, y)$ для одного слоя, систему «источники – детекторы» сдвигают в направлении оси z для получения информации о следующем близком слое и т.д. Затем получают трехмерную функцию плотности поглощения $f(x, y, z)$.

ПОЛУЧЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ

Пусть тонкий пучок излучения падает на слой вещества. Можно считать, что поглощение в конкретной точке не зависит от направления излучения.

Физический закон поглощения состоит в том, что приращение интенсивности излучения (поглощение) ΔI пропорционально интенсивности самого излучения I и длине отрезка Δt , пройденного излучением, т.е. в дифференциальной форме

$$1) \frac{dI}{dt} = -\mu I. \quad (1)$$

Рассмотрим прямую L , представляемую уравнением $x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0$, [1] нормаль к которой образует угол φ с осью x , и находящуюся на расстоянии s от начала координат (рис. 3).

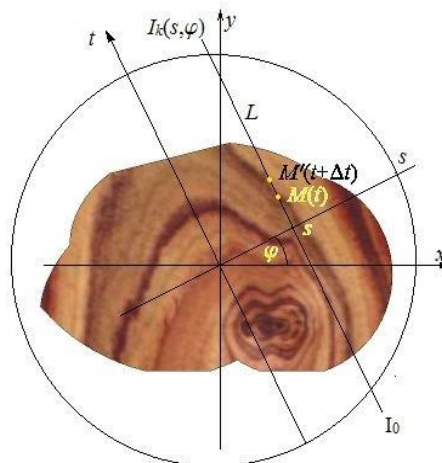


Рис. 3. Преобразование Радона функции двух переменных

Запишем закон поглощения (1) в точке M прямой L . Обозначим через I_0 значение интенсивности излучения на входе в точке t_0 прямой, а через I_k – значение интенсивности на выходе в точке t_k . Тогда из (1) получаем

$$-\ln \frac{I_k}{I_0} = \int_{t_0}^{t_k} \mu dt.$$

Считая известной величину излучения на входе и выходе, и учитывая, что результирующее значение I_k определяется прямой L – мы слева в (2) имеем известную величину $-\ln \frac{I_k}{I_0} = \ln \frac{I_0}{I_k(s, \varphi)} = R(s, \varphi)$.

Параметры t_0 и t_k относятся к удаленным точкам прямой, их можно считать равными. Учитывая, что μ (далее будем использовать f) зависит от точки, т.е. является функцией x и y , из (2) получаем

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dt. \quad (3)$$

Введем систему координат (s, t) (см. рис.3).

Связь между исходной системой координат и повернутой на угол φ системой координат (s, t) определяется соотношениями

$$x = s \cos \varphi - t \sin \varphi, \quad y = s \sin \varphi + t \cos \varphi. \quad (4)$$

Уравнение прямой L в системе координат (s, t) имеет вид $s = \text{Const}$. Подставляя (4) в (3), окончательно получаем:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt \quad (5)$$

Функция $R(s, \varphi)$ считается заданной для направлений $0 \leq \varphi \leq \pi$, поскольку при изменении угла на π просвечивание ведется в обратном направлении.

Правая часть выражения (5) называется преобразованием Радона (ПР) функции $f(x, y)$. [1]

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Задача восстановления функции $f(x, y)$ по семейству интегралов от нее представляет собой задачу обращения преобразования Радона, т.е. будет однозначно решаться следующая задача: задана проекция $R(s, \varphi)$, требуется найти ее радоновский прообраз.

Вспомним определение преобразования Радона функции $f(x, y)$ (5) и выполним преобразование в правой части:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)) dt.$$

Вычислим интеграл от $R(s, \varphi)$ по φ , изменяющемуся от 0 до 2π .

$$\int_0^{2\pi} R[f](s, \varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{s^2 + t^2} \cos(\varphi + \alpha), \sqrt{s^2 + t^2} \sin(\varphi + \alpha)) dt d\varphi.$$

Предполагая, что соответствующие интегралы сходятся, меняем порядок интегрирования. Но внутренний интеграл не зависит от $\alpha = \alpha(s, t)$, поскольку это интеграл в плоскости s, t по окружности радиуса $\sqrt{s^2 + t^2}$ и добавка α к переменной интегрирования φ не влияет на значение интеграла по окружности.

Поэтому возьмем $\alpha = 0$.

$$\int_0^{2\pi} R(s, \varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{s^2 + t^2} \cos \varphi, \sqrt{s^2 + t^2} \sin \varphi) d\varphi dt. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь произвольную не осесимметричную функцию $f(x, y)$. Усредним ее по окружностям с центром в точке $(0, 0)$.

Получим функцию $F(r)$, зависящую только от расстояния $r = \sqrt{s^2 + t^2}$ – радиуса окружности

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta. \quad (7)$$

При этом $F(0) = f(0, 0)$. Применим ПР к функции $F(r)$. Имеем

$$R[F](s) = R\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta\right](s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R[f](s, \theta) d\theta \quad (8)$$

Правая часть (8) представляет среднее интегральное по θ по прямым, находящимся на расстоянии s от рассматриваемой точки.

Так как известна формула обращения осесимметричного ПР, то для $R[F](s)$

$$F(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \quad (9)$$

В частности,

$$F(0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{R'_s[F](s)}{s} ds. \quad (10)$$

Поскольку ПР осесимметричной функции $R[F](s)$ четно по s , то $R'_s[F](s)$ – нечетно, а $R'_s[F](s)/s$ – четно по s . Учитывая (8) и то, что $F(0) = f(0, 0)$ из (10) имеем

$$f(0,0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[F](s,\theta)}{s} ds d\theta. \quad (11)$$

Значение функции $f(x, y)$ в произвольной точке $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ может быть получено из (11). Для этого достаточно рассмотреть функцию $f_1(x, y) = f(x + x_0, y + y_0) = f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$.

Применяя (11) к функции f_1 , а также используя формулу сдвига, получаем

$$R[f_1](s, \varphi) = R[f(x, y)](s + x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi, \varphi) = R[f](s + (n, \mathbf{x}_0)),$$

обозначая $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ и заменяя x_0, y_0 на x, y приходим к

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} ds d\varphi. \quad (12)$$

Меняя обратно порядок интегрирования, имеем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_0^{2\pi} \frac{R'_s[f](s, \varphi)}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi. \quad (13)$$

ПРИМЕР

Вычислим преобразование Радона полусферы

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases},$$

где $a = 1$.

Поскольку функция осесимметричная, то достаточно вычислить интеграл по любой прямой, находящейся на расстоянии s от начала координат, например, по $x = s$, параллельной оси y . При $|s| < 1$, имеем

$$R(s) = \int_{-\sqrt{a^2-s^2}}^{\sqrt{a^2-s^2}} \sqrt{a^2 - y^2 - s^2} dy = 2 \int_0^{\sqrt{a^2-s^2}} \sqrt{a^2 - y^2 - s^2} dy = \frac{\pi}{2} (a^2 - s^2).$$

В результате, т.к. $a = 1$, имеем

$$R(s) = \begin{cases} \frac{\pi(1-s^2)}{2}, & \text{если } |s| < 1 \\ 0, & \text{если } |s| \geq 1 \end{cases}. \quad (14)$$

График функции $f(x, y)$ представлен на рис. 4, график $R(s)$ преобразования Радона – на рис. 5.

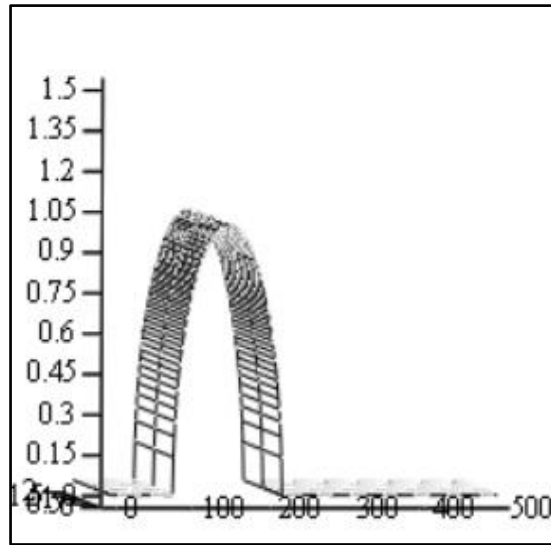


Рис. 4. График функции $f(x, y)$

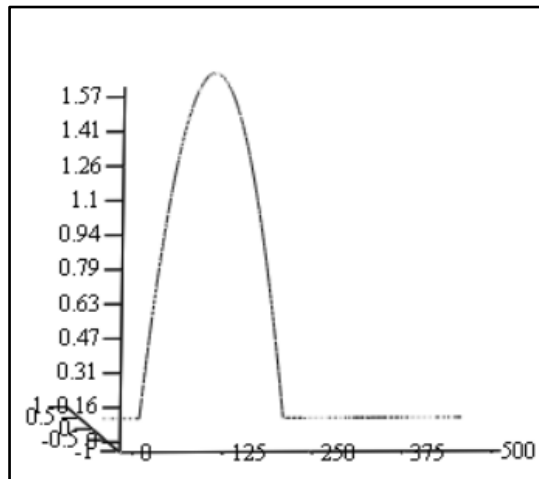


Рис. 5. График преобразования Радона $R(s)$

Решая обратную задачу, найдем радоновский прообраз $f(x, y)$ полученной функции $R(s)$ (14). Тогда

$$\frac{d}{ds} R = \begin{cases} -\pi s, & \text{если } |s| < 1 \\ 0, & \text{если } |s| \geq 1 \end{cases}.$$

Из (12) получаем

$$f(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{-\pi s}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} ds d\varphi =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} s ds \int_0^{2\pi} \frac{1}{s - x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s-x \cos \varphi - y \sin \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(s/r - x/r \cos \varphi - y/r \sin \varphi)} d\varphi = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s-r \cos(\varphi-\alpha)} d\varphi.$$

Справа стоит интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна длине периода. Сдвиг на α не влияет на значение интеграла.

Поэтому

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s-r \cos \varphi} d\varphi.$$

При $|s| > r$ знаменатель подынтегральной функции не обращается в нуль.

При $|s| < r$ знаменатель на отрезке интегрирования обращается в нуль в двух точках.

Сдвигаем отрезок интегрирования на от $-\pi$ до π , оставив неизменной его длину. Получаем

$$I_0 = \begin{cases} 0, & |s| < r \\ \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} \text{sign}(s), & |s| > r \end{cases} = \text{sign}(s) \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r),$$

где $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Подставляем вычисленный внутренний интеграл имеем

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} I_0(s) s ds = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \text{sign}(s) s \frac{2\pi}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{|s|}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(|s| - r) ds = \int_0^{+1} \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) ds.$$

При $r \geq 1$ последний интеграл равен нулю, а при $r < 1$

$$\int_0^{+1} \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} H(s - r) ds = \int_r^{+1} \frac{s}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \int_r^{+1} d\sqrt{s^2 - r^2} = \\ = \sqrt{s^2 - r^2} \Big|_{s=r}^1 = \sqrt{1 - r^2}.$$

Итак

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - r^2}, & r < 1, \\ 0, & r \geq 1 \end{cases}$$

что соответствует исходной функции $f(x, y)$.

Библиографические ссылки

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач: Учеб. пособие. М.: Издательство МГУ, 1994 г. С. 178–202.
2. *Троицкий И. Н.* Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989 г.
3. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. М.: Мир, 1983 г.
4. *Троицкий И. Н.* Компьютерная томография. М.: Знание, 1988 г.
5. *Левин Г. Г., Вишняков Г. Н.* Оптическая томография. М.: Радио и связь, 1989 г.
6. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990 г.
7. *Доля П. Г.* Введение в математические методы компьютерной томографии: Издательство Харьковский Национальный Университет механико-математический факультет, 2015 г.