УДК 004.05+519.2

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ В СИСТЕМАХ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

Ю. С. Харин[1)], М. В. Мальцев[2)], В. Ю. Палуха[3)]

Учреждение Белорусского государственного университета «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, [1)] kharin@bsu.by, [2)] maltsew@bsu.by, [3)] palukha@bsu.by,

Рассматривается задача оценки качества генераторов случайных и псевдослучайных числовых последовательностей, используемых в системах защиты информации. С помощью вероятностно-статистических методов выявляются отклонения в выходных последовательностях генераторов от равномерно-распределенной случайной последовательности. Для решения данной задачи используются малопараметрические марковские модели и энтропийные характеристики.

Ключевые слова: статистическое тестирование; криптографический генератор; малопараметрическая марковская модель; энтропийный профиль; сложная гипотеза.

Введение

Критически важными элементами систем защиты информации являются генераторы случайных и псевдослучайных числовых последовательностей. Последовательность, вырабатываемая стойким генератором, не должна отличаться по своим свойствам от равномерно-распределенной случайной последовательности (РРСП). Основным методом оценки качества генераторов является статистическое тестирование. Известные наборы (батареи) тестов обладают рядом недостатков и ограничений: они проверяют простую нулевую гипотезу, не фиксируют семейство альтернатив, могут не обнаруживать сравнительно простые зависимости [1]. В связи с этим актуальной является разработка методов и алгоритмов, позволяющих более эффективно выявлять зависимости в выходных последовательностях генераторов. Направлениями, показавшими свою эффективность на практике, являются статистическое тестирование на основе сложных малопараметрических марковских моделей [2] и на основе энтропийных характеристик [3].

1. Статистическое тестирование на основе малопараметрических марковских моделей

Известной малопараметрической моделью является разработанная в Белорусском государственном университете цепь Маркова порядка s с r частичными связями [4]. В настоящей статье представлено обобщение данной модели для векторной цепи Маркова с $m \geq 2$ компонентами. Обозначим: $A = \{0, 1,..., N-1\}$ – множество мощности $|A| = N \geq 2$; $m \in \mathbb{N}$ – размерность состояния цепи Маркова, $J_i = (j_{i_1},..., j_{i_m}) \in A^m, i \in \mathbb{N}$, – m-мерный целочисленный вектор; $J_a^b = (J_a, J_{a+1}..., J_b)$ – упорядоченный набор m-мерных векторов; $\{x_t = (x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}) \in A^m : t \in \mathbb{N}\}$ – однородная векторная цепь Маркова порядка s с пространством состояний A^m с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{J_1^s, J_{s+1}})$:

$$p_{J_1^s, J_{s+1}} = \mathrm{P}\{x_t = J_{s+1} \mid x_{t-1} = J_s,..., x_{t-s} = J_1\},\ J_1, \ldots, J_{s+1} \in A^m,\ t \in \{s+1, s+2,...\}. \qquad (1)$$

Такую цепь Маркова будем обозначать ВЦМ(s) – векторная цепь Маркова порядка s.

Число независимых элементов матрицы P, равное $N^{ms}(N^m-1)$, возрастает экспоненциально при увеличении s, и применение этой модели на практике возможно лишь при небольших значениях параметров. В связи с этим, построена модификация ВЦМ(s), для которой условное распределение вероятностей определяется лишь некоторыми «значимыми» компонентами

предыдущих векторов-состояний. Обозначим: $M_r = \{(k_1,l_1),(k_2,l_2),...,(k_r,l_r)\}$ – множество $1 \le r \le sm$ пар индексов, упорядоченных в лексикографическом порядке, причем $k_1 = 1$. Множество M_r называется шаблоном связей или просто шаблоном. Определим также функцию-селектор $S_{M_r}(J_t,...,J_{t+s-1}) = (j_{t+k_1-1,l_1},...,j_{t+k_r-1,l_r})$, $t \in \mathbb{N}$, которая в соответствии с шаблоном M_r «вырезает» r компонент из множества ms компонент $\{j_{u,l} : t \le u \le t+s-1,\ 1 \le l \le m\}$.

Если вероятности (1) допускают следующее представление:

$$p_{J_1^s,J_{s+1}} = q_{S_{M_r}(J_1,...,J_s),J_{s+1}} = q_{(j_{k_1,l_1},...,j_{k_r,l_r}),J_{s+1}},\ J_1,...,J_{s+1} \in A^m,$$

где $Q = (q_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}})$ – некоторая стохастическая $N^r \times N^m$-матрица, $i_1,\ldots,i_r \in A$, $I_{r+1} \in A^m$, то ВЦМ(s) называется векторной цепью Маркова с r частичными связями и шаблоном связей M_r (ВЦМ(s, r)). Условное распределение вероятностей состояния x_t для ВЦМ(s, r) в момент времени t зависит не от всех ms компонент s прошлых состояний, а только от r избранных компонент, которые определяются шаблоном M_r.

Разработан алгоритм идентификации ВЦМ(s, r) по реализации длины n: $X^{(n)} = (x_1,\ldots,x_n)$, $x_1,\ldots,x_n \in A^m$; построен статистический тест для обнаружения отклонений в $X^{(n)}$ от РРСП на основе ВЦМ(s, r) (гипотезе H_0 соответствует РРСП):

$$\text{принимается } \begin{cases} H_0, \text{ если } \rho_n \le \Delta, \\ H_1 = \bar{H}_0, \text{ если } \rho_n > \Delta, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\rho_n = \sum_{i_1,...,i_r \in A} \sum_{I_{r+1} \in A^m} \bar{q}^2_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}} \nu^{M_r}_{s+1}(i_1,...,i_r,I_{r+1}) / q^{(0)}_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}}$; $Q^{(0)} = (q^{(0)}_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}})$ – стохастическая матрица размерности $N^r \times N^m$, все элементы которой равны $1/N^m$; $\bar{q}^2_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}} = \left(q^{(0)}_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}} - \hat{q}_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}}\right)/\sqrt{n-s}$, $\hat{q}_{(i_1,...,i_r),I_{r+1}}$ – оценки максимального правдоподобия вероятностей переходов; $\nu^{M_r}_{s+1}(i_1,...,i_r,I_{r+1})$ – частоты состояний ВЦМ(s, r); $\Delta = G_y^{-1}(1-\alpha)$, G_y – функция стандартного χ^2-распределения с y степенями свободы, $\alpha \in (0,1)$ – уровень значимости.

В компьютерных экспериментах с помощью алгоритма статистического тестирования, основанного на (2), выявлены отклонения от РРСП в генераторе rand стандартной библиотеки языка C – stdlib для реализации размера 10 МБ, тогда как тестирование на основе батареи NIST не выявило отклонения от «чистой случайности» в аналогичной последовательности размера 2 ГБ [5].

2. Статистическое тестирование генераторов на основе оценок энтропии

В качестве тестовых статистик могут выступать статистические оценки функционалов информационной энтропии, вычисленные по наблюдаемой двоичной последовательности. Пусть x – случайная величина из алфавита мощности $N = 2^s$ с дискретным распределением вероятностей $p = \{p_k\}$, $p_k = P\{x = \omega_k\}$, $p_k \ge 0$, $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, $k = = 1, \ldots, N$, и пусть наблюдается случайная последовательность $\{x_t : t = 1,\ldots,n\}$ объёма n из распределения вероятностей $\{p_k\}$. Частотные оценки вероятностей имеют вид

$$\hat{p}_k = \frac{\nu_k}{n}, \quad \nu_k = \sum_{t=1}^{n} I\{x_t = \omega_k\} \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad I\{x_t = \omega_k\} = \begin{cases} 1, x_t = \omega_k; \\ 0, x_t \ne \omega_k. \end{cases}$$

Рассмотрим асимптотику соразмерного увеличения объёма выборки и мощности алфавита:

$$n,\ N \to \infty,\ n/N \to \lambda,\ 0 < \lambda < \infty. \tag{3}$$

В следующей таблице приведены формулы вычисления оценок энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса, для которых в [3] при истинной гипотезе H_0 в асимптотике (3) доказана асимптотическая нормальность, а также параметры асимптотически нормального распределения. Для построения несмещённых оценок функционалов энтропии Реньи и Тсаллиса используется факториальная степень $x^{\underline{2}} = x(x-1)$.

Оценки функционалов энтропии и параметры их распределения

Тип	Оценка	Мат. ожидание	Дисперсия
Шеннон	$\hat{H} = \ln n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} \nu_k \ln \nu_k$	$\mu_H = \ln n - e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!}$	$\sigma_H^2 = \frac{e^{-\lambda}}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k+1)\lambda^k}{k!}\ln^2(k+1) - \frac{e^{-2\lambda}}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!}\right)^2 - \frac{e^{-2\lambda}}{n}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\ln(k+1)\frac{\lambda^k}{k!}(k+1-\lambda)\right)^2$
Реньи	$\hat{H}_2 = 2\ln n - \ln\sum_{k=1}^{N}\nu_k^2$	$\mu_{H,2} = \ln N$	$\sigma_{H,2}^2 = \frac{2}{n\lambda}$
Тсаллис	$\hat{S}_2 = 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N}\nu_k^2$	$\mu_{S,2} = 1 - \frac{1}{N}$	$\sigma_{S,2}^2 = \frac{2}{Nn^2}$

Пусть $\alpha \in (0,1)$ – уровень значимости, h – статистическая оценка энтропии Шеннона, Реньи или Тсаллиса, μ_h и σ_h^2 – асимптотические математическое ожидание и дисперсия этих оценок при истинной гипотезе H_0. Вычислим h для наблюдаемой последовательности. Решающее правило, основанное на статистике h, имеет вид [3]:

$$\text{принимается } \begin{cases} H_0, & \text{если } t_- < h < t_+; \\ \overline{H_0}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad t_\pm = \mu_h \pm \sigma_h \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{4}$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Вычислим нормированную статистику $\tilde{h} = (h - \mu_h)/\sigma_h$ которая в асимптотике (3) и при истинной гипотезе H_0 имеет стандартное нормальное распределение. Следовательно, двустороннее p-значение для неё равно

$$p - value = 2\left(1 - \Phi\left(\left|\tilde{h}\right|\right)\right). \tag{5}$$

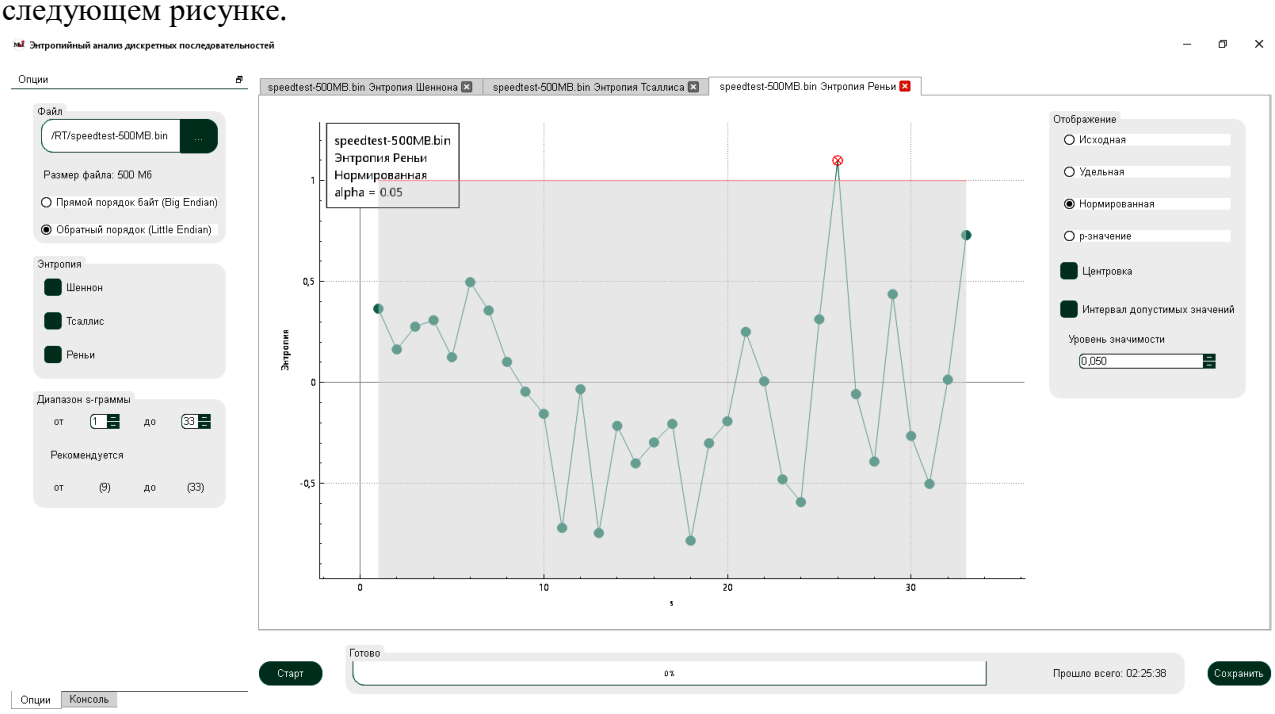
Пусть наблюдается двоичная последовательность $\{y_\tau\}$, $\tau = 1, \ldots, T$. Из непересекающихся фрагментов длины s (s-грамм) $X^{(t)} = (X_j^{(t)}) = (y_{(t-1)s+1}, \ldots, y_{ts}) \in \{0,1\}^s$, $t = 1, \ldots, n = [T/s]$, сформируем новую последовательность $\{x_t\}$ из алфавита мощности $N = 2^s$ по правилу

$x_t = \sum_{j=1}^{s} 2^{j-1} X_j^{(t)} + 1$. На основе критерия (4) вычислим последовательность нормированных отклонений оценки энтропии от математического ожидания в зависимости от s, которую назовём энтропийным профилем:

$$\chi(s) = \frac{\hat{h}(s) - \mu_h(s)}{\sigma_h(s)\Phi^{-1}(1-\alpha/2)} = \frac{\tilde{h}(s)}{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}, \; s = s_-, \ldots, s_+. \qquad (6)$$

Аналогично строятся последовательности p-значений (3).

Разработанный в НИИ ППМИ программный комплекс «ЭАДП» реализует критерий (4). В начале работы необходимо выбрать файл с последовательностью, порядок Big Endian или Little Endian, диапазон s и функционалы энтропии. Вычисляемые значения добавляются на экран в режиме реального времени. Имеется возможность изменять уровень значимости α без пересчёта оценок энтропии и переключаться на различные режимы отображения: непосредственно оценки энтропии $\hat{h}$, нормированные значения (6), p-значения (5). Помимо вывода самих значений в консоль, программа отображает графики зависимостей этих величин от длины фрагмента s. Главное окно программного комплекса с результатами работы представлено на следующем рисунке.



Программный комплекс «ЭАДП»

Введём в рассмотрение сложную нулевую гипотезу $H_0^{(\varepsilon)}$, согласно которой для распределения вероятностей $\{p_k\}$ справедливо

$$p_k = \frac{1}{N} + \varepsilon_k, -\frac{1}{N} \le \varepsilon_k \le \frac{N-1}{N}, \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{N}\right), k = 1, \ldots, N, \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k = 0, \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k^2 = \varepsilon^2, 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_+. \qquad (7)$$

Сложная нулевая гипотеза (7) означает, что допустимы незначительные отклонения от дискретной равномерности.

В [6] показано, что оценка энтропии Тсаллиса при справедливости гипотезы (7), где $\varepsilon_+ \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, в асимптотике (3) имеет асимптотически нормальное распределение, при этом для параметров распределения справедливы оценки

$$\mu_{S,2}^{(\varepsilon)} = \mu_{S,2} - \varepsilon^2 \ge \mu_{S,2}^{(\varepsilon_+)} = \mu_{S,2} - \varepsilon_+^2,$$
$$\sigma_{S,2}^{2(\varepsilon)} < \sigma_{S,2}^{2(\varepsilon_+)} = \sigma_{S,2}^2 + \frac{2}{n^2}(2\lambda+1)\varepsilon_+^2 + \frac{4\varepsilon_+^3}{n}(1-\varepsilon_+). \quad (8)$$

Решающее правило для проверки сложной нулевой гипотезы (7) имеет вид [6]

$$\text{принимается} \begin{cases} H_*^{(\varepsilon)}, \text{ если } \Delta_- < \hat{S}_2 < \Delta_+, \\ \overline{H_*^{(\varepsilon)}}, \text{ иначе,} \end{cases} \quad (9)$$
$$\Delta_- = \mu_{S,2}^{(\varepsilon_+)} - \sigma_{S,2}^{(\varepsilon_+)}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \quad \Delta_+ = \mu_{S,2} + \sigma_{S,2}^{(\varepsilon_+)}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \quad \varepsilon_+ \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Библиографические ссылки

1. Зубков А. М. Серов А. А. Проверка пакета статистических критериев NIST на специальных псевдослучайных последовательностях // Математические вопросы криптографии, 2019, том 10, выпуск 2. С. 89-96.

2. Kharin Yu.S. Parsimonious models of high-order Markov chains for evaluation of cryptographic generators // Математические вопросы криптографии, том 7, выпуск 2. С. 131-142.

3. Палуха В.Ю. Статистические тесты на основе оценок энтропии для проверки гипотез о равномерном распределении случайной последовательности // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2017. № 1. С. 79-88.

4. Харин Ю. С. Цепи Маркова с r-частичными связями и их статистическое оценивание // Доклады НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 40-44.

5. Харин Ю. С., Мальцев М. В. Применение специальных марковских моделей для оценки качества криптографических генераторов // Комплексная защита информации: материалы XXV научно-практической конференции, Россия, 15-17 сентября 2020 года. С. 224-228.

6. Палуха В. Ю., Харин Ю. С. Статистическое тестирование криптографических генераторов на основе сложной нулевой гипотезы // Теоретическая и прикладная криптография: материалы II Международной научной конференции, Минск, 19-20 октября 2023 г. / Белорусский государственный университет; редколлегия: Ю. С. Харин (гл. ред.) [и др.]. Минск: БГУ, 2023. С. 185-193.