ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

М. В. Чайковский¹⁾, О. А. Архипенко²⁾

¹⁾ Белорусский государственный технологический университет,
ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Беларусь, tchaikovski@belstu.by

²⁾ Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, arhipenko@bsu.by

Рассматривается один алгоритм численного решения задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка сведением его к интегральному уравнению Вольтерра второго рода и последующему его численному решению.

Ключевые слова: задача Коши; интегро-дифференциальное уравнение; уравнение Вольтерра; итерационный метод; погрешность.

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} x'(\tau) + q(\tau)x(\tau) = \int_0^{\tau} k_1(\tau-t)x(t)dt + \int_0^{\tau} k_2(\tau-t)x'(t)dt + f(\tau), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(\tau)$ есть искомая функция, $x'(\tau)$ – ее производная, $q(\tau)$, $f(\tau)$ – заданные функции, $k_v(\tau-s)$ ($v=1, 2$) – известные ядра интегрального оператора. Предполагается существование и единственность решения данной задачи Коши, а также наличие необходимой гладкости функций, входящих в уравнение (1), обеспечивающей возможность проводимых в дальнейшем преобразований.

Интегро-дифференциальные уравнения такого вида возникают при решении некоторых практических задач. Точный метод решения такого рода задач с постоянными коэффициентами в дифференциальном операторе уравнения (1), то есть $q(\tau) = q = const$, возможен с помощью применения аппарата преобразования Лапласа. В случае, если в дифференциальном операторе коэффициенты не являются постоянными величинами, то возникнут трудности нахождения как прямого, так и обратного преобразования Лапласа. Кроме того, часть функций или все функции, входящие в уравнение, могут быть получены из эксперимента (заданы таблично).

Большинство приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений сводит исходное уравнение к дифференциальному и численному решению последнего. В предлагаемом методе строится алгоритм численного решения задачи Коши (1) сведением её к интегральному уравнению Вольтерра и последующему его приближенному решению.

Используя формулу Ньютона-Лейбница, искомая функция выражается через свою производную следующим образом

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} x'(t)dt \quad (2)$$

Подставим в (1) вместо $x(\tau)$ правую часть равенства (2)

$$x'(\tau) + q(\tau)[x_0 + \int_0^\tau x'(t)dt] = \int_0^\tau k_1(\tau-t)[x_0 + \int_0^t x'(s)ds]dt + \int_0^\tau k_2(\tau-s)x'(s)ds + f(\tau).$$

Сделав замену порядка интегрирования в получающемся двойном интеграле

$$\int_0^\tau k_1(\tau-t) \left[\int_0^t x'(s)ds \right] dt = \int_0^\tau \left[\int_s^\tau k_1(\tau-t)dt \right] x'(s)ds$$

и обозначив $x'(\tau) = y(\tau)$ придем к интегральному уравнению

$$y(\tau) = \int_0^\tau R(\tau, s)y(s)ds + \Phi(\tau), \quad (3)$$

где

$$\Phi(\tau) = -x_0q(\tau) + f(\tau) + x_0 \int_0^\tau k_1(\tau-t)dt,$$

а ядро полученного интегрального уравнения Вольтерра имеет вид

$$R(\tau, s) = \int_s^\tau k_1(\tau-t)dt - q(\tau) + k_2(\tau-s).$$

Будем искать приближенные значения решения $y_j = y(\tau_j)$ интегрального уравнения в равноотстоящих точках $\tau_j = jh$, ($h = \text{const}$) некоторого отрезка $[0, T]$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots < \tau_N = T$. Применим алгоритм последовательного повышения порядка точности, идея которого изложена статье [1]. Предварительно отметим, что значение $y(0) = \Phi(0) = -x_0q(0) + f(0)$. Если применить к интегралу в (3) формулу левых прямоугольников

$$\int_0^\tau R(\tau, s)y(s)ds \approx \tau R(\tau, 0)y(0),$$

то нулевое приближение к решению (в точке $0 \leq \tau \leq h$) равно

$$y^{(0)}(\tau) = \tau R(\tau, 0)y(0) + \Phi(\tau),$$

то есть может быть вычислено по имеющимся данным. Точность его не очень велика, но оно позволяет найти значение в точке τ используя, например, квадратурную формулу трапеции. Тогда первое приближение решения интегрального уравнения

$$y^{(1)}(\tau) = \frac{h}{2} \left[R(\tau, 0)y(0) + R(\tau, \tau)y^{(0)}(\tau) \right] + \Phi(\tau).$$

Для последовательного повышения порядка точности можно повторить эту процедуру, но использовать при этом уже имеющееся первое приближение решения интегрального уравнения:

$$y^{(2)}(\tau) = \frac{h}{2} \left[R(\tau, 0)y(0) + R(\tau, \tau)y^{(1)}(\tau) \right] + \Phi(\tau). \quad (4)$$

Если достаточно вычислительных ресурсов, то можно проводить эту итерационную процедуру до того момента, пока $\|y^{(i+1)}(\tau) - y^{(i)}(\tau)\| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления. Здесь неравенство рассматривается по любой допустимой норме в заданных условия задачи.

Если гладкость используемых функций достаточна, то можно применить и квадратурные формулы более высокого порядка точности, например, Симпсона.

Если вместо τ в формулу (4) подставить $\tau = h$, то получим приближение решения интегрального уравнения в точке $\tau_1 = h$

$$y^{(2)}(h) = \frac{h}{2} \left[R(h, 0)y(0) + R(h, h)y^{(1)}(h) \right] + \Phi(h), \quad (5)$$

то есть найдем приближенное решение уравнения (3) в точке $\tau_1 = 1 \cdot h$. Продолжая итерационную процедуру (5) по формуле

$$y^{(i)}(h) = \frac{h}{2} \left[R(h, 0)y(0) + R(h, h)y^{(i-1)}(h) \right] + \Phi(h), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

до выполнения условия $\left| y^{(i+1)}(h) - y^{(i)}(h) \right| \leq \varepsilon$, принимаем, что

$$y_1 = y(h) \approx y^{(i)}(h)$$

и переходим к процедуре вычисления приближенного решения на следующем шаге. Используя свойство аддитивности определенного интеграла для $h \leq \tau \leq 2h$

$$y(\tau) = \int_0^{\tau_1} R(\tau, s)y(s)ds + \int_{\tau_1}^{\tau} R(\tau, s)y(s)ds + \Phi(\tau) \quad (6)$$

и вышеприведенный алгоритм к этому уравнению, на втором шаге получим итерационный процесс

$$y^{(i)}(2h) = \frac{h}{2} \left[R(2h, 0)y(0) + R(2h, h)y_1 \right] + \frac{h}{2} \left[R(2h, h)y_1 + R(2h, 2h)y^{(i-1)}(2h) \right] + 2\Phi(2h), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

для нахождения $y_2 = y(2h) \approx y^{(i)}(2h)$. И так далее, что позволит найти все приближенные решения уравнения (3) $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$. Когда получен массив значений производных искомого решения, можно найти приближенные значения $x_k \approx x(\tau_k)$ ($\tau_k = k \cdot h$, $k = \overline{1, N}$) решения задачи Коши (1) в заданных точках

$$x(\tau_k) = x_0 + \int_0^{\tau_k} x'(t)dt = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} x'(t)dt \approx x_0 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{k-1} [y_j + y_{j+1}],$$

что и требовалось. Реализуя данный алгоритм, целесообразно анализировать свойства ядер интегрального оператора задачи (1). Например, в случае их быстрого стремления к нулю (то есть ноль начиная с некоторого шага, что характерно для реальных задач после выхода процесса на стационарный режим) нужно учитывать данный факт в программной реализации. Этот подход, в частности, был реализован в [2] при численном решении задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения аэроупругости.

Библиографические ссылки

1. Янович Л. А. Об одном численном методе четвертого порядка для решения системы линейных интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28, № 4. – С. 293–296.
2. Денисенко Н. В., Ложечник Ф. Д., Чайковский М. В. Об одном алгоритме численного решения интегро-дифференциальных уравнений аэроупругости, учитывающем особенности ядер интегрального оператора // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 4. – С. 3–10.