

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКМ MATHEMATICA ПРИ РАЗЛОЖЕНИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

Г. А. Расолько

*Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, rasolko@bsu.by*

В данной работе на примере разложения сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью показано, как использование СКМ Mathematica позволило перейти от общих формул к сильно упрощенным. Полученные формулы дают возможность построить методом ортогональных многочленов вычислительные схемы приближенного решения как простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью, так и полного.

Ключевые слова: численный анализ; использование многочленов Чебышева; разложение сингулярного интеграла; метод ортогональных многочленов.

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических многочленов, которые в большинстве случаев являются собственными функциями многих интегральных операторов и этим позволяют получить спектральные соотношения для интегралов, входящих в уравнение. Наличие спектрального соотношения позволяет легко построить явное решение интегрального уравнения. Для численного решения некоторых сингулярных интегральных уравнений метод ортогональных многочленов применяется давно. Значительный вклад в его разработку внесли М. А. Golberg, А. В. Джишкариани и Г. Я. Попов. Отметим, что с появлением первых ЭВМ началось широкое внедрение в численный анализ многочленов Чебышева.

Известно, что в СКМ нет ресурсов по вычислению сингулярных интегралов, а также по решению сингулярных интегральных уравнений. Поэтому приходится прибегать не только к разработке вычислительных схем, но и к программированию их в виде стандартных функций.

Характерной особенностью численного решения интегральных уравнений является их дискретизация, т.е. получение тем или иным способом системы линейных алгебраических уравнений. Если требуется получить решение с высокой степенью точности, то целесообразно разыскивать его в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например, многочленов Чебышева.

Для численного решения многих сингулярных интегральных уравнений метод ортогональных многочленов применяется давно. Основной идеей данного метода является использование спектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов. Например, известно, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n=1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{1}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышёва первого и второго рода соответственно.

Формулы (1) дают возможность построить вычислительные схемы приближенного решения как простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1.$$

так и полного

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1.$$

Здесь $k(x,t)$, $f(x)$ – заданные функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая.

Укажем возможность получить подобные представления для интегралов, встречающихся в других уравнениях, а именно, для сингулярных интегралов со степенно-логарифмической особенностью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-t}{1+t} p(t) f(t) \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1,$$

где $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $|\alpha| = |\beta| = 0,5$.

На их основании построены вычислительные схемы приближенного решения как простейшего сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1.$$

так и полного

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + g(x), \quad -1 < x < 1.$$

Здесь $k(x,t)$, $f(x)$, $g(x)$ – заданные функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая.

Чтобы их получить, вначале нужно было вывести разложения сингулярных интегралов со степенно-логарифмической особенностью и ядром Коши в виде комбинации многочленов Чебышева первого и/или второго рода.

После того, как были получены такие разложения (см. [1], стр. 115) удалось их упростить при некоторых значениях α , β , используя возможности СКМ Mathematica Wolfram Research. Приведем некоторые результаты.

Теорема 1. Для $x \in (-1, 1)$ и α, β таких, что $|\alpha| = |\beta| = 0,5$, справедлива формула

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = \\ & = -\pi (1-x)^\alpha (1+x)^\beta U_k(x) + \sum_{j=0}^{k+\alpha+\beta-1} \gamma_j^{(k)} U_j(x), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} & \gamma_j^{(k)} = Q_{k-j-1} + Q_{k+j+1} + 2A_{jk}, \quad j = \overline{0, k+\alpha+\beta-1}, \\ & A_{jk} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} (1-\tau)^\alpha (1+\tau)^\beta U_j(\tau) U_k(\tau) d\tau, \quad 0 \leq j \leq k+\alpha+\beta-1, \end{aligned}$$

$$Q_M = \frac{1}{\sin \alpha \pi} \begin{cases} \sum_{k=0}^J b_k^{(M)} c_{\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]-k}^{(1)}, & M + \alpha + \beta - \text{четное}, \\ 0, & M = -1, \\ \sum_{k=0}^L b_k^{(M)} c_{\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]-k}^{(2)}, & M + \alpha + \beta - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$b_0^{(n-1)} = 2^{n-1}, \quad b_k^{(n-1)} = -\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{4k(n-k)} b_{k-1}^{(n-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$c_p^{(1)} = \sum_{n=0}^p \frac{2\mu_{2n}}{2p-2n+1}, \quad c_p^{(2)} = \sum_{n=0}^p \frac{2\mu_{2n+1}}{2p-2n+1}, \quad p = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k g_j v_{k-j}, \quad g_0 = v_0 = 1, \quad g_{j+1} = g_j \frac{j-\alpha}{j+1}, \quad v_{j+1} = v_j \frac{\beta-j}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$J = \min \left\{ \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+\alpha+\beta}{2} \right\rceil \right\}, \quad L = \min \left\{ \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M-1+\alpha+\beta}{2} \right\rceil \right\}.$$

Запрограммировав в СКМ Mathematica вычисления по формуле (2), удалось получить следующие результаты для разных значений $|\alpha| = |\beta| = 0,5$:

$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{2}$
$k=0$	$\{2\}$
$k=1$	$\{0, 2\}$
$k=2$	$\{-\frac{4}{3}, 0, 2\}$
$k=3$	$\{0, -\frac{4}{3}, 0, 2\}$
$k=4$	$\{-\frac{4}{15}, 0, -\frac{4}{3}, 0, 2\}$
$k=5$	$\{0, -\frac{4}{15}, 0, -\frac{4}{3}, 0, 2\}$
$k=6$	$\{-\frac{4}{35}, 0, -\frac{4}{15}, 0, -\frac{4}{3}, 0, 2\}$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} & \beta &= -\frac{1}{2} \\ k=1 & \{ \} \\ k=2 & \{-8\} \\ k=3 & \{0, -8\} \\ k=4 & \left\{-\frac{32}{3}, 0, -8\right\} \\ k=5 & \left\{0, -\frac{32}{3}, 0, -8\right\} \\ k=6 & \left\{-\frac{184}{15}, 0, -\frac{32}{3}, 0, -8\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} & \beta &= -\frac{1}{2} \\ k=1 & \{4\} \\ k=2 & \{-8, 4\} \\ k=3 & \left\{\frac{28}{3}, -8, 4\right\} \\ k=4 & \left\{-\frac{32}{3}, \frac{28}{3}, -8, 4\right\} \\ k=5 & \left\{\frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, \frac{28}{3}, -8, 4\right\} \\ k=6 & \left\{-\frac{184}{15}, \frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, \frac{28}{3}, -8, 4\right\} \\ k=7 & \left\{\frac{1348}{105}, -\frac{184}{15}, \frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, \frac{28}{3}, -8, 4\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2} & \beta &= \frac{1}{2} \\ k=1 & \{-4\} \\ k=2 & \{-8, -4\} \\ k=3 & \left\{-\frac{28}{3}, -8, -4\right\} \\ k=4 & \left\{-\frac{32}{3}, -\frac{28}{3}, -8, -4\right\} \\ k=5 & \left\{-\frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, -\frac{28}{3}, -8, -4\right\} \\ k=6 & \left\{-\frac{184}{15}, -\frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, -\frac{28}{3}, -8, -4\right\} \\ k=7 & \left\{-\frac{1348}{105}, -\frac{184}{15}, -\frac{172}{15}, -\frac{32}{3}, -\frac{28}{3}, -8, -4\right\} \end{aligned}$$

После получения данных серий коэффициентов начался этап осмысления. Удалось увидеть следующие закономерности, а именно:

Теорема 2. Для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{U_k(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} U_k(x) - 8 \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \sum_{m=0}^j \frac{1}{2m+1} U_{k-2-2j}(x), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{U_k(t) dt}{t-x} = -\pi \sqrt{1-x^2} U_k(x) + 2U_k(x) - 4 \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{4j^2-1} U_{k-2j}(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_k(x) - 4U_{k-1}(x) - \\ &- \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{8}{2m+1} U_{k-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U_k(x) + 4U_{k-1}(x) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{-8}{2m+1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(\sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Подобно предыдущему получены и следующие разложения, а вообще их всех 16.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{T_k(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) - 8 \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \sum_{m=0}^j \frac{1}{2m+1} T_{k-2-2j}(x), \quad (7)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{T_k(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) - 4 \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \frac{1}{2j+1} U_{k-2-2j}(x), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{T_k(t) dt}{t-x} = -\pi \sqrt{1-x^2} T_k(x) + 2T_k(x) - 4 \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{4j^2-1} T_{k-2j}(x), \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{T_k(t) dt}{t-x} = -\pi \sqrt{1-x^2} T_k(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \beta_j^{(k)} U_{k-2j}(x), \quad (10)$$

$$\beta_0^{(0)} = 2, \quad \beta_0^{(1)} = 1, \quad \beta_0^{(k)} = 1, \quad \beta_1^{(k)} = -\frac{5}{3}, \quad \beta_j^{(k)} = \frac{8}{(2j-3)(4j^2-1)}, \quad j = 2, \left[\frac{k}{2}\right], \quad k \geq 2.$$

где $\sum_{j=0}^m \rho_j T_{m-j} \equiv \rho_0 T_m + \rho_1 T_{m-1} + \dots + \rho_{m-1} T_1 + \frac{1}{2} \rho_m T_0.$

Утверждения (3) – (10) доказываются методом математической индукции.

Подчеркнем, что на их основании строятся эффективные вычислительные схемы приближенного решения СИУ [1]. А это всё благодаря возможностям СКМ Mathematica проводить символьные вычисления и отображать результат в нужном формате!

Полученные разложения использовались при построении вычислительных схем для сингулярного интегрального уравнения с двукратными ядрами Коши

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_{D^2} \frac{\varphi(t, \tau)}{(t-x)(\tau-y)} dt d\tau = f(x, y) \ln \frac{1-x}{1+x} \ln \frac{1-y}{1+y}, \quad (x, y) \in D^2,$$

где $D^2 = (-1,1) \times (-1,1)$, f – заданная непрерывная по Гельдеру функции в $\overline{D}$, φ – искомая функция. Уравнение применяется в аэроупругости.

Полную версию данного доклада можно найти в [1]. Эти упрощения не только существенно сокращает время по их вычислению, но и визуализирует результаты.

Библиографические ссылки

1. Расолько, Г.А. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс]. Минск: БГУ, 2015. 262 с. URL: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/118113>