

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. А. Нифагин¹⁾, О. В. Дубровина²⁾

¹⁾ Белорусский государственный университет
ул. Курчатова, 5, 220054, г. Минск, Беларусь, VladNifagin@bsu.by

²⁾ Белорусский государственный университет
ул. Курчатова, 5, 220054, г. Минск, Беларусь, DoubrovinaOV@bsu.by

Излагаются новые общие подходы в постановке и решении в теории обратных задач математической теории пластичности. Для эффективного использования, полученного решения прямой задачи, необходимо знать параметры среды, значения которых оценить часто затруднительно. Из-за этого на первый план выходят формулировки и методы решения обратных задач. Представлено решение обратной коэффициентной плоской задачи теории трещин для квазистатического случая. Обсуждается методика решения обратной задачи на основе восстановления механических параметров среды с помощью глубокой нейронной сети, которая обучается на данных решения прямой задачи, полученного в работе авторов. Обучение осуществляется путем оптимизации функции потерь по норме разницы между предсказанными и наблюдаемыми значениями параметров при выполнении граничных условий задачи.

Ключевые слова: краевая задача; неголономная пластичность; квазистатическая трещина; теория течения с упрочнением; обратная коэффициентная задача; нейронная сеть.

Решения прямых задач для уравнений механики гиперболического типа уравнений могут иметь разрывы, сингулярные компоненты сложной структуры и т.п. В этом смысле чем устойчивее оператор прямой задачи, тем сложнее его «обращать». С физико-механической точки зрения это можно объяснить тем, что волны, проникая внутрь сканируемого объекта, выносят на поверхность достаточно много информации о его строении и свойствах. Поэтому спектр применяемых методов в обратных задачах для гиперболических уравнений существенно шире. Это метод отображений Неймана-Дирихле, лучевые постановки, методы редукции размерности и нейросетевые подходы [1-4].

В прямой задаче для оценки НДС в окрестности вершины трещины принимаются следующие допущения: материал считается упрочняющимся по степенному закону, несжимаемым и плоскодеформируемым. Декартову систему координат относим к вершине трещины. Оси ξ_i ($i = 1, 2$) расположим таким образом, что ось ξ_1 ориентирована вдоль трещины в направлении ее конца. Будем считать, что состояние вблизи вершины контролируется параметром нагружения K , который будет интерпретироваться в качестве коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей зону пластического деформирования. Единственным независимым параметром задачи с размерностью длины является величина K^2/G^2 , поэтому искомые функции задачи зависят от нагрузки только посредством безразмерных переменных

$$x_i = \xi_i G^2 / K^2 (i = 1, 2), r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \phi = \arctg \frac{x_2}{x_1}.$$

Совмещенная (O, r, ϕ) – подвижная полярная система координат с полюсом в конце трещины, причем $r = \rho/2\ell$ – безразмерный радиус – отношение величины радиус-вектора точки к длине трещины 2ℓ . При страгивании вершина трещины перемещается вместе с сопутствующей системой координат (O, r_1, φ_1) . При этом ориентация площадки, на которой рассматривается изменение напряжений, остается фиксированной и координаты вектора нормали к этой площадке не изменяются при перемещении начала координат вместе с вершиной трещины.

Однако координаты вектора нормали к этой площадке меняются при перемещении полюса O в точку O_1 , т.е. являются функцией длины трещины. Этот факт необходимо учитывать при выборе представлений разложений напряжений и перемещений, когда произвольная функция $f(l, r, \varphi)$ неявно зависит от длины, а ее производная представима

$$\dot{f}(r(l), \varphi(l)) = -\frac{\partial f}{\partial r} \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\sin(\varphi)}{r}.$$

Разрешающие уравнения, включающие уравнения равновесия, соотношения Коши и определяющие соотношения теории течения с упрочнением при условиях несжимаемости материала в полярной системе координат в производных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr,r} + (\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\phi\phi})/r + \dot{\sigma}_{r\phi,\phi}/r &= 0, \quad \dot{\sigma}_{r\phi,r} + 2\dot{\sigma}_{r\phi}/r + \dot{\sigma}_{\phi\phi,\phi}/r = 0, \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{u}_{r,r}, \quad \dot{\varepsilon}_{\phi\phi} = \dot{u}_{\phi,\phi}/r + \dot{u}_r/r, \quad \dot{\varepsilon}_{r\phi} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{\phi,r} + \dot{u}_{r,\phi}/r - \dot{u}_\phi/r), \\ \dot{s}_{ij} = \dot{e}_{ij} - \kappa \dot{\Phi}(\Gamma) e_{ij}, \quad i, j = r, \phi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{u}_i$ – производные напряжений, деформаций и перемещений, $\dot{S}_{ij}, \dot{e}_{ij}$ – производные девиаторов напряжений и деформаций, κ – параметр упрочнения, разделяющий зоны активного нагружения и разгрузки, $\Phi(\Gamma) = \sum_{k \geq 1} B_{2k} \Gamma^{2k}$ – функция интенсивности касательных деформаций, $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$, G, B_{2k} – постоянные материала.

В указанных уравнениях применяются безразмерные отнесенные напряжения $\sigma_{ij} = \frac{1}{G} \sigma^*_{ij}$, $u_i = u^*_i/2l$ – вектор перемещений, отнесенный к длине трещины.

Для несжимаемого материала при плоской деформации выполняются стандартные соотношения между компонентами тензоров и девиаторов напряжений и деформаций.

Нагрузки на кромках трещины равны нулю. Отсюда следуют граничные условия задачи:

$$\dot{\sigma}_{r\phi}|_{\varphi=\pm\pi} = \chi(r), \quad \dot{\sigma}_{\phi\phi}|_{\varphi=\pm\pi} = \psi(r). \quad (2)$$

Таким образом, уравнения (1) с условиями (2) доставляют математическую формулировку прямой краевой задачи о докритическом росте для трещины нормального отрыва при плоской деформации.

Неголономность разрешающих уравнений (1) математической теории пластичности с упрочнением и учет представлений для приращений деформаций и напряжений, отвечающих увеличению параметра K (однопараметрическое активное нагружение)

$$\delta e_{ij} = e_{ij,K} \delta K = e_{ij,r} \cdot \delta r, \quad s_{ij,K} \delta s_{ij} = s_{ij,r} \delta r \quad (3)$$

позволяют искать решение задачи (1), (2), (3) в перемещениях $u_r(r, \varphi); u_\phi(r, \varphi)$.

В обратной задаче требуется определить механические параметры среды $\varepsilon = B \frac{\sigma_s}{G \cdot \gamma_*}$ и $d_* = \frac{d \cdot \sigma_s^2}{K^2}$, где первый параметр выражает т.н. «обратное число нелинейности» диаграммы деформирования и зависит от диаметра пластических зон различного уровня. Коэффициент K имеет смысл коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей малую пластическую зону (тонкая структура) или, в более общем случае, аналогичного коэффициента для сверхтонкой структуры. При этом требуется определить параметры задачи ε и d_* по следу решения прямой задачи (1), (3) и значениям краевых условий (2) на берегах разреза.

Предположим, что у нас есть набор наблюдений $u(r_i, \varphi_j)$ для заданных точек в окрестности вершины трещины, а также заданы граничные условия.

Для решения обратной задачи, то есть восстановления параметров ε и d_* можно использовать методы Deep PDE. Строим глубокую нейронную сеть, которая принимает на вход r_i и φ_j и выдает оценку ε и d_* . Обучение сети может производиться путем минимизации функции потерь, которая измеряет разницу между предсказанными и наблюдаемыми значениями параметров и удовлетворяет граничным условиям.

Нейронная сеть с подкреплением обучалась с помощью данных решения прямой задачи, полученного методом асимптотических разложений [6] на основе программного модуля, созданного инструментами фреймворка PyTorch [7,8].

Пример псевдокода обучения сети выглядит следующим образом (рис. 1):

```
python Copy code  
  
# Генерация обучающих данных  
X_train, y_train = generate_training_data()  
  
# Определение архитектуры нейронной сети  
model = define_model()  
  
# Компиляция модели с выбранной функцией потерь  
model.compile(loss='mse', optimizer='adam')  
  
# Обучение модели  
model.fit(X_train, y_train, epochs=100, batch_size=32)
```

Рис. 1. Пример псевдокода для обучения нейронной сети

Здесь метод `generate_training_data` генерирует обучающие данные, содержащие координаты r и φ и соответствующие им значения смещений $u(r, \varphi)$ для заданных граничных условий. Метод `define_model` определяет архитектуру нейронной сети, которая будет использоваться для оценки механических коэффициентов среды.

Выводы. Из решения обратной задачи для трещины нормального отрыва в окрестности вершины при изотропном неголономном упрочнении заключаем:

1. Для случая кубического упрочнения при сетке $r \in (0.01, 0.99)$, $\varphi \in (-3.12, 3.12)$ с шагом $h_r = 0.01$ и $h_\varphi = 0.05$ соответственно значения диаметра пластической зоны около вершины (тонкая структура) $d \in (0.1137, 0.01384)$ для основных конструкционных материалов (сталь, медные и алюминиевые сплавы).

2. Относительная погрешность при кубическом упрочнении в малой пластической зоне (сверхтонкая структура) имеет на ее границе диапазон параметра $\varepsilon \in (0.06537, 0.006549)$.

3. Величина диаметра пластической зоны возле вершины трещины с поправками для сверхтонкой структуры будет $d' = d/(1 + \varepsilon)^4$, $(d - d')/d = \varepsilon^4$. Причем последние формулы верны лишь при малых значениях параметра $\varepsilon = 0.1$.

4. Указанные значения параметров свидетельствуют о совпадении главных (сингулярных) асимптотических разложений около вершины при монотонном нагружении (тонкая структура) для теории течения и деформационной теории, в случае правильных частей разложений (второй и последующие члены рядов) это не имеет места.

5. Используя указанное решение, получают дальнейшие оценки для материалов с низкой физической нелинейностью ε и d , что свидетельствует об эффективности метода асимптотических разложений для анализа не только сверхтонкой, но и промежуточной структур упругопластических решений. В частности, соответствующие оценки погрешностей могут быть получены при использовании прямых численных методов.

6. Полученное решение обратной задачи хорошо коррелирует с известными асимптотическими и численными решениями прямых задач.

7. Диапазоны изменения параметров обратной задачи представлены на рис. 2.

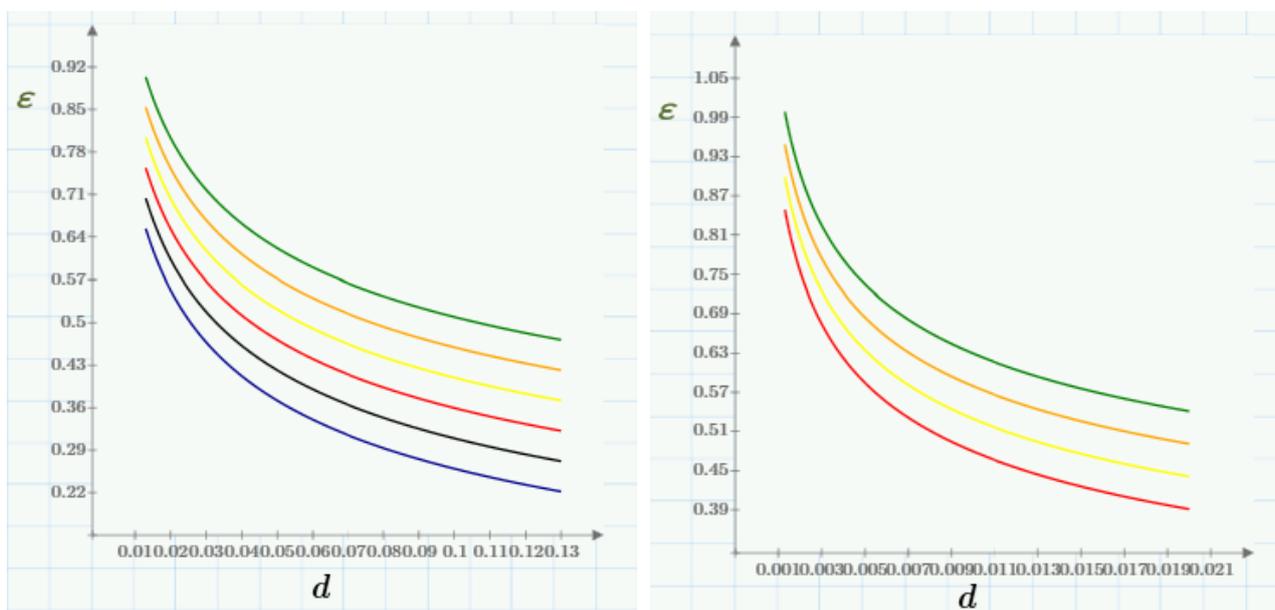


Рис. 2. Решение обратной коэффициентной задачи в окрестности вершины (слева – тонкая структура, справа – сверхтонкая структура)

Библиографические ссылки

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.; Наука, 1988. 288 с.
2. Бакушинский А. Б., Гончарский А. В. Некорректные задачи, М.: МГУ, 1989. 199 с.
3. Бухгейм А. Л. Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988. 184 с.
4. Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 3. С. 343-345.
5. Нифагин В.А. Обратные задачи многомерной интегральной геометрии // Трансформация механико-математического и ИТ-образования в условиях цифровизации = Transformation of the mechanical-mathematical and IT-education in the context of digitalization : материалы междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 65-летию мех.-мат. фак., Респ. Беларусь, Минск, 26-27 апр. 2023 г. В 2 ч. Ч. 2 / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Н. В. Бровка (гл. ред.) [и др.]. Минск : БГУ, 2023. С. 211-218.
6. Нифагин В. А., Бубич М. А. Метод асимптотических разложений в теории упругопластических трещин // Вести НАН РБ. Сер. физ.-мат. наук. 2011. № 4. С. 60-66.
7. DeepXDE: A Deep Learning Library for Solving Differential Equations // Lu L. [et al.] // SIAM Review. 2021. 63:1. pp. 208-228. 14.09.2005. URL: <https://epubs.siam.org/doi/epdf/10.1137/19M1274067> (date of access: 27.03.2024).
8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // J. of Comp. Physics. 2019. V. 378. pp. 686-707.