

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ТЕОРИИ ИЗГИБА БАЛОК ТИМОШЕНКО

В. И. Корзюк^{1,2)}, Я. В. Рудько¹⁾

¹⁾ Институт математики НАН Беларуси,

ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

²⁾ Белорусский государственный университет,

пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Для нелинейного строго гиперболического биволнового уравнения, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси задаются условия Дирихле и Вентцеля. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. С помощью метода продолжения по параметру и априорных оценок проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи устанавливаются условия, при выполнении которых её классическое решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных данных.

Ключевые слова: нелинейное биволновое уравнение; смешанная задача; классическое решение; метод характеристик; априорные оценки; метод продолжения по параметру; балка Тимошенко.

Постановка задачи

В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается нелинейное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t, x) = \mathcal{F}[u](t, x) := f\left(t, x, u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t, x), \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}(t, x), \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(t, x), \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x)\right), \quad (1)$$

где f – функция, заданная на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^{10}$, и a и b – заданные положительные действительные числа, такие что $0 < a < b$. К уравнению (1) присоединяются начальные

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \partial_t u(0, x) = \varphi_1(x), \partial_t^2 u(0, x) = \varphi_2(x), \partial_t^3 u(0, x) = \varphi_3(x), x \in [0, \infty), \quad (2)$$

и граничные

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \partial_x^2 u(t, 0) = \mu_1(t), t \in [0, \infty), \quad (3)$$

условия, где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mu_0$ и μ_1 – функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$.

Уравнения вида (1) используются при моделировании балок Тимошенко [1] (в этом случае однородные граничные условия $u(t, 0) = \partial_x^2 u(t, 0) = 0$ соответствуют свободно опертой балке), при исследовании физических полей [2, 3], в теории управления [4].

Симметричный анализ уравнения (1) был проведен В. И. Фушичем и др. в работах [2, 3].

Задача Коши (1), (2) была рассмотрена нами в работе [5] в случае

$$\mathcal{F}[u](t, x) := g(t, x, u(t, x)),$$

где было доказано существование и единственность глобального классического решения, если функция g удовлетворяет условию $|g(t, x, u) - g(t, x, z)| \leq k(t, x)|u - z|$, где k – измеримая функция, квадрат которой локально суммируем. В той же работе было показано, что задача допускает взрывное решение в случае полиномиальных нелинейностей.

В работе [6] было доказано существование единственного ограниченного глобального слабого непрерывного решения задачи Коши для уравнения (1) с потенциальным оператором $\mathcal{M}$, задающим нелинейность по формуле

$$\mathcal{F}[u](t, x) = \mathcal{M} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \right] (t, x),$$

где $a < c < b$, при достаточно малых начальных данных и некоторых ограничениях на потенциал оператора $\mathcal{M}$. В той же работе установлены существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1), если нелинейность f не зависит от производных третьего порядка и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Эти результаты были обобщены в работе [7] на случай

$$\mathcal{F}[u](t, x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) + \mathcal{M} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \right] (t, x).$$

В линейном случае

$$\mathcal{F}[u] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

формальное решение задачи (1) – (3) при однородных условиях Коши

$$\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv 0$$

было выписано в работе [1], используя метод отражений, преобразование Лапласа и фундаментальные решения. Теоремы существования и единственности классических решений для линейных начальных и смешанных задач для уравнений вида (1) были установлены в работах [8–10].

Построение решения

Интегрирование уравнения (1) с условиями (2) – (3) проводится следующим образом:

1. По схеме, изложенной в работе [11], выводятся необходимые условия согласования начальных и граничных данных, а также правой части.

2. Методом характеристик выписывается формальное решение линейной задачи (1) – (3) при $\mathcal{F}[u](t, x) = 0$.

3. Методом Дюамеля формально строится решение линейной задачи (1) – (3) при $\mathcal{F}[u](t, x) = f(t, x)$.

4. Устанавливается, что полученное ранее решение линейной задачи (1) – (3) при $\mathcal{F}[u](t, x) = f(t, x)$ является в самом деле классическим; доказывается его единственность.

5. Используя подход из книги [12], ранее примененный нами в работах [13, 14], решение уравнения (1) с условиями (2) и (3) сводится к решению некоторых эквивалентных интегро-дифференциальных уравнений. На этом этапе существенно используются ранее полученные нами результаты для линейного случая.

6. С помощью метода продолжения по параметру [15, 16] доказываются существование и единственность решений, непрерывно зависящих от начальных и граничных данных, интегро-дифференциальных уравнений, полученных на предыдущем шаге.

Таким образом, по данной схеме, на последнем шаге мы получаем решения некоторых интегро-дифференциальных уравнений, которые оказываются решением смешанной задачи (1) – (3). При этом данный подход оказывается конструктивным, поскольку он позволяет искать решение задачи (1) – (3) приближенно, используя метод последовательных приближений.

Классическое решение

Основной результат доклада сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть выполняются условия гладкости

$$\begin{aligned} \varphi_0 \in C^4([0, \infty)), \varphi_1 \in C^3([0, \infty)), \varphi_2 \in C^2([0, \infty)), \varphi_3 \in C^1([0, \infty)), \\ f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^{10}), \mu_0 \in C^4([0, \infty)), \mu_1 \in C^2([0, \infty)), \end{aligned}$$

и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x, \mathbf{u}_1) - f(t, x, \mathbf{u}_2)| \leq L(t, x) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_1,$$

где L – функция класса $C(\bar{Q})$. Тогда смешанная задача (1) – (3) имеет в классе $C^4(\bar{Q})$ единственное решение u тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{aligned} \mu_0(0) &= \varphi_0(0), D\mu_0(0) = \varphi_1(0), D^2\mu_0(0) = \varphi_2(0), D^3\mu_0(0) = \varphi_3(0), \\ \mu_1(0) &= D^2\varphi_0(0), D\mu_1(0) = D^2\varphi_1(0), D^2\mu_1(0) = D^2\varphi_2(0), \\ D^4\mu_0(0) &= 2(a^2 + b^2) D^2\varphi_2(0) - a^2b^2 D^4\varphi_2(x) + f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \\ &\varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0), \varphi_3(0), D\varphi_2(0), D^2\varphi_1(0), D^3\varphi_0(0)). \end{aligned}$$

Это решение непрерывно зависит от начальных и граничных данных и может быть найдено методом последовательных приближений.

Заключение

В статье получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых для нелинейного биволнового уравнения существует единственное классическое решение смешанной задачи с условиями Дирихле и Вентцеля в четверти плоскости. Установлена зависимость гладкости решения от гладкости начальных функций. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости.

Библиографические ссылки

1. Ortner N., Wagner P. Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the Simply Supported Semi-infinite Timoshenko Beam // Journal of Elasticity. 1996. V. 42. P. 217-241.
2. Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. Symmetry and Some Exact Solutions of Non-Linear Polywave Equations // Europhysics Letters. 1995. V. 31, № 2. P. 75-79.
3. Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. Symmetry reduction and some exact solutions of nonlinear biwave equations // Reports on Mathematical Physics. 1996. V. 37, № 2. P. 267-281.
4. Arosio A. On the Nonlinear Timoshenko-Kirchhoff Beam Equation // Chinese Annals of Mathematics. 1999. V. 20. P. 495-506.
5. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение задачи Коши для полулинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных // Известия высших учебных заведений. Математика. 2024. № 3. С. 50-63.
6. Panizzi S. Abstract Nonlinear Timoshenko Beam Equation // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1991. V. 86. P. 193-205.
7. Arosio A., Panizzi S. Global Bounded Weak Solutions for an Abstract Nonlinear Timoshenko Beam Equation with Four Propagation Speeds // Funkcialaj Ekvacioj. 1993. V. 36. P. 109-121.
8. Корзюк В.И., Винь Н.В. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2016. № 1. С. 69-79.
9. Корзюк В.И., Винь Н.В. Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. 2017. № 1. С. 38-52.
10. Korzyuk V.I., Vinh N.V. Mixed Problem with an Integral Condition for the One-Dimensional Biwave Equation // Differential Equations. 2018. V. 54, № 6. P. 799-810.
11. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant // Differential Equations. 2023. V. 59, № 8. P. 1075-1089.
12. Evans L.C. Partial Differential Equations. Providence: Am. Math. Soc., 2016.
13. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical Solution of the Initial-Value Problem for a One-Dimensional Quasilinear Wave Equation // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. 2023. V. 67, № 1. P.14-19.

14. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Mixed Problem with a Directional Derivative for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 22-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 300-летию РАН (Саратов, 28-31 января 2024 г.). Саратов: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 2024. С. 124-127.
15. Треногин В.А. Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 4. С. 455-457.
16. Trenogin V.A. Invertibility of Nonlinear Operators and Parameter Continuation Method // Spectral and Scattering Theory. Boston: Springer, 1998. P. 189-197.