УДК 519.64

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. Игнатенко

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь, ignatenkomv@bsu.by

Рассматривается проблема приближенного вычисления интегралов от функциональных матриц: вопросы построения и исследования квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций, которые являлись бы обобщениями соответствующих квадратурных правил (типа Гаусса) в случае скалярных функций. Получены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго и произвольного порядка. Рассмотрен частный случай квадратурных правил, когда в качестве веса выступает диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного квадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Представленные результаты основаны на применении отдельных известных фактов теории интерполирования и приближенного интегрирования скалярных функций.

Ключевые слова: интерполяционная квадратурная формула; алгебраическая степень точности; квадратуры типа Гаусса; матричнозначная функция; матричный алгебраический многочлен.

Введение

Исследования в области матричного анализа вызывают интерес с точки зрения развития его теории и приложений. Квадратурные правила для вычисления интегралов от функций находят широкое применение при построении приближенных методов решения различных классов задач (например, решение интегральных уравнений). Одним из обобщений задачи приближенного интегрирования функций является задача аппроксимации матричных интегралов. Основные вопросы, которые здесь возникают, – это разрешимость самой задачи, построение формул приближенного интегрирования матричнозначных функций, изучение их погрешностей, сходимости к точному значению матричного интеграла и другие. Как и в скалярном случае, важным классом квадратурных формул для интегралов от функциональных матриц являются правила наивысшей алгебраической степени точности.

Цель работы состоит в построении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для приближенного вычисления матричных интегралов, которые являлись бы обобщением соответствующих гауссовских квадратурных правил, известных для скалярного случая. Построены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго и произвольного порядка. Рассмотрен частный случай квадратурных правил, когда в качестве веса выступает диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного квадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Полученные результаты базируются на применении известных фактов теории приближенного интегрирования скалярных функций, понятия ортогональных матричных полиномов и обобщают класс квадратурных правил типа Гаусса, известных для скалярного случая

Квадратуры гауссова типа в случае диагональной весовой матрицы

Рассмотрим построение квадратурных формул вида

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k), \tag{1}$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k F(x_k), \tag{2}$$

где весовая функция $p(x) = diag[p_1(x), p_2(x), ..., p_m(x)]$ и ее элементы $ð_i(\tilde{o})$ удовлетворяют условиям $ð_i(\tilde{o}) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

Заметим, что в левой части правила (1) произведение $p(x)F(x)$ – матрица с элементами $ð_i(x) f_{ij}(x)$, а в левой части равенства (2) произведение $F(x)p(x)$ – матрица с элементами $ð_j(x) f_{ij}(x)$, поэтому

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x) f_{ij}(x)dx\right], \quad \int_a^b F(x)p(x)dx = \left[\int_a^b p_j(x) f_{ij}(x)dx\right].$$

Через $Ð_{n\nu}(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени n, ортогональный относительно веса $p_\nu(x)$ на отрезке $[a,b]$ ко всем алгебраическим многочленам низшей степени, т.е. $\int_a^b p_\nu(x) P_{n\nu}(x) x^i dx = 0$ для значений $i = 0, 1, ..., n-1$ и $\nu = 1, 2, ..., ò$.

Корни многочлена $P_{n\nu}(x)$ различны, и мы будем обозначать их через $x_k^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Для скалярных функций $f(x)$ квадратурная формула вида

$$\int_a^b p_\nu(x) f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(\nu)} f(x_k^{(\nu)}), \tag{3}$$

где квадратурные коэффициенты

$$A_k^{(\nu)} = \int_a^b p_\nu(x) \frac{\omega_{n\nu}(x)}{(x - x_k^{(\nu)})\omega'_{n\nu}(x_k^{(\nu)})} dx, \quad \omega_{n\nu}(x) = (x - x_1^{(\nu)})(x - x_2^{(\nu)})...(x - x_n^{(\nu)}),$$

будет точна, если $f(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше $2n-1$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x) f_{ij}(x)dx\right] \approx \left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(i)} f_{ij}(x_k^{(i)})\right], \tag{4}$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(j)} f_{ij}(x_k^{(j)})\right]. \tag{5}$$

Заметим, что в развёрнутом виде матрица $\left[\sum_{k=1}^{n} A_k^{(i)} f_{ij}(x_k^{(i)})\right]$ в правой части приближенного равенства (4) имеет вид≈

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}(x_k^{(1)}) & A_k^{(1)} f_{12}(x_k^{(1)}) & \dots & A_k^{(1)} f_{1m}(x_k^{(1)}) \\ A_k^{(2)} f_{21}(x_k^{(2)}) & A_k^{(2)} f_{22}(x_k^{(2)}) & \dots & A_k^{(2)} f_{2m}(x_k^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k^{(m)} f_{m1}(x_k^{(m)}) & A_k^{(m)} f_{m2}(x_k^{(m)}) & \dots & A_k^{(m)} f_{mm}(x_k^{(m)}) \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Через $\grave{A}_k$ обозначим диагональную матрицу с элементами $A_k^{(1)}, A_k^{(2)} ..., A_k^{(m)}$, а через $\tilde{F}(x_k)$ – матрицу, полученную подстановкой корня $x_k^{(i)}$ в i-ю строку матрицы $F(x)$ вместо аргумента x. Тогда матрицу (6) запишем в виде $\sum_{k=1}^{n} A_k \tilde{F}(x_k)$ и получим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \tilde{F}(x_k), \qquad (7)$$

которая точна для полиномиальных матриц $F(x)$ степени не выше $2n-1$. Этим же свойством обладает квадратурная формула $\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \tilde{F}(x_k)A_k$ для вычисления интеграла в левой части приближенного равенства (5).

Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности другой структуры

Ограничимся случаем функциональных матриц второго порядка

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}.$$

Для ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ алгебраических многочленов $\text{Đ}_{n1}(x)$ и $\text{Đ}_{n2}(x)$ степени n к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно выполняются равенства

$$\int_a^b p_1(x)P_{n1}(x)x^i dx = \int_a^b p_2(x)P_{n2}(x)x^i dx = 0 \quad \left(i = 0,1,...,n-1\right).$$

Будем считать, что они ортонормированные, т.е.

$$\int_a^b p_1(x)P_{n1}^2(x)x^i dx = \int_a^b p_2(x)P_{n2}^2(x)x^i dx = 1.$$

Положим $P_n(x) = \begin{bmatrix} P_{n1}(x) & 0 \\ 0 & P_{n2}(x) \end{bmatrix}$. Тогда $\int_a^b p(x)P_n(x)Q_{n-1}(x)dx = 0,$ где $Q_{n-1}(x)$ – произвольная матрица вида $Q_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}$, $q_{ij}(x)$ $(i, j = 1,2)$ – алгебраические многочлены степени не выше $\text{ï} -1$.

В этом случае формула (7) в поэлементной записи имеет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \int_a^b \begin{bmatrix} p_1(x)f_{11}(x) & p_1(x)f_{12}(x) \\ p_2(x)f_{21}(x) & p_2(x)f_{22}(x) \end{bmatrix} dx \approx \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}(x_k^{(1)}) & A_k^{(1)} f_{12}(x_k^{(1)}) \\ A_k^{(2)} f_{21}(x_k^{(2)}) & A_k^{(2)} f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) \\ f_{21}(x_k^{(1)}) & f_{22}(x_k^{(1)}) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(2)}) & f_{12}(x_k^{(2)}) \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} E_1 F(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} E_2 F(x_k^{(2)}),$$

где $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Введя обозначения $A_{k1} = A_k^{(1)} E_1 = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = A_k^{(2)} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, придем к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left[A_{k1} F(x_k^{(1)}) + A_{k2} F(x_k^{(2)}) \right]. \qquad (8)$$

Аналогично формуле (8) для интеграла (2) имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left[F(x_k^{(1)}) A_{k1} + F(x_k^{(2)}) A_{k2} \right].$$

Обобщим результаты по построению квадратурных формул с диагональными весовыми матрицами второго порядка на случай общего интеграла

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx,$$

где $p(x)$ – как и ранее, диагональная матрица с элементами $p_1(x)$ и $p_2(x)$, ее элементы $ð_i\left(õ\right)$ удовлетворяют условиям $ð_i\left(õ\right) \geq 0$, $x \in [a,b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ $(i = 1, 2)$, а $F\left(x\right)$ и $G\left(x\right)$ – произвольные полиномиальные матрицы второго порядка:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx = \sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} \left[\int_a^b f_{is}(x) p_{st}(x) g_{tj}(x) dx \right],$$

при этом элементы $ð_{12}(x) = ð_{21}(x) = 0,$ а функции $ð_{11}(x) = ð_1(x),$ $ð_{22}(x) = ð_2(x)$. Поэтому

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx = I_1 + I_2,$$

где интегралы I_1 и I_2 определены следующими правилами:

$$I_1 = \int_a^b p_1(x)\begin{bmatrix} f_{11}(x)g_{11}(x) & f_{11}(x)g_{12}(x) \\ f_{21}(x)g_{11}(x) & f_{21}(x)g_{12}(x) \end{bmatrix}dx,$$

$$I_2 = \int_a^b p_2(x)\begin{bmatrix} f_{12}(x)g_{21}(x) & f_{12}(x)g_{22}(x) \\ f_{22}(x)g_{21}(x) & f_{22}(x)g_{22}(x) \end{bmatrix}dx. \tag{9}$$

Заметим, что в равенствах (9) подынтегральные множители $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – скалярные функции, и, следовательно, для вычисления интегралов I_1 и I_2 можно воспользоваться соответствующими квадратурными формулами наивысшей степени точности.

Через $F_1(x)$ обозначим матрицу, стоящую под знаком интеграла I_1, а через $F_2(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_2 в формулах (9). Если $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ $(k=1,2,...,n)$ – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n, ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то следующая квадратурная формула будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n-1$:

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}F_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}F_2(x_k^{(2)}), \tag{10}$$

где коэффициенты $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ такие, как в формуле (3) при $\nu=1$ и $\nu=2$.

Далее перепишем формулу (8) в несколько ином виде. Для этого $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ обозначим через $\tilde{o}_k$ и $\tilde{o}_{n+k}$ $(k=1,2,...,n)$, а матрицы $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – через Λ_k и Λ_{n+k} $(k=1,2,...,n)$, соответственно. Тогда формула (8) примет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} \Lambda_k F(x_k).$$

Запишем формулу (10) также в другом виде. Для этого воспользуемся равенством

$$F(x)p(x)G(x) = F(x)\begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}G(x) + F(x)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}G(x) =$$

$$= p_1(x)F(x)G_1(x) + p_2(x)F(x)G_2(x),$$

где $G_1(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}$. Здесь $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – скалярные веса, поэтому искомая формула наивысшей степени точности будет иметь вид

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)}F(x_k^{(1)})G_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)}F(x_k^{(2)})G_2(x_k^{(2)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F(x_k^{(1)})A_{k1}G(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^{n} F(x_k^{(2)})A_{k2}G(x_k^{(2)}).$$

Пусть матрица $\Lambda_k = A_{k1}$, а $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ для $k = 1, 2, ..., n$. Напомним, что $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, где $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – квадратурные коэффициенты формулы (3), для произвольного натурального числа ï и значений $\nu = 1$, $\nu = 2$.

Последовательность корней $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)})$ будем обозначать $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{2n})$. Тогда формулу (10) можно записать в виде

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} F(x_k)\Lambda_k G(x_k). \tag{11}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p(x)$ *– диагональная матрица с элементами* ð$_i$(õ), *удовлетворяющими условиям* ð$_i$(õ) ≥ 0, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ $(i = 1, 2)$. *Если* õ$_k$ *и* x_{n+k} $(k = 1, 2, ..., n)$ *– корни алгебраических многочленов* $P_{n1}(x)$ *и* $P_{n2}(x)$ *степени* n, *ортогональных относительно весов* $p_1(x)$ *и* $p_2(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, тогда формула* (11), *в которой квадратурные коэффициенты* Λ_k *задаются равенствами* $\Lambda_k = A_{k1}$, $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ $(k = 1, 2, ..., n)$, *имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равную* $2n - 1$.

О сходимости квадратурных процессов типа Гаусса

Обозначим через

$$r_n = \int_a^b F(x)p(x)G(x)dx - \sum_{k=1}^{2n} F(x_k)\Lambda_k G(x_k)$$

матрицу погрешности квадратурной формулы (11).

С учетом известного [1] для скалярного случая факта, согласно которому квадратурная сумма в формулах типа Гаусса сходится к точному значению интеграла при условии, что интегрируемая функция непрерывна, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если матрицы* $F(x)$ *и* $G(x)$ *непрерывны на* $[a, b]$, *то погрешность* r_n *сходится к нулевой матрице при* ï $\to \infty$.

Заключение

В заключение отметим, что квадратуры наивысшей алгебраической степени точности другой структуры для матричнозначных функций с матричной весовой функцией, отличной от диагональной, построены в работе [2]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложены в монографии [3], в которой в том числе исследуются вопросы интерполирования для матричнозначных и операторнозначных функций.

Библиографические ссылки

1. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

2. Sinap A., Walter Van Assche. Polynomial interpolation and gaussian quadrature for matrix-valued functions // Linear algebra and its applications, 1994. Vol. 207. P. 71-114.

3. Янович Л.А., Игнатенко М.В. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц. Минск: Беларус. навука, 2020. 476 с.