

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

А. А. Брезгунова

brezgunova2001@gmail.com;

*Научный руководитель — М. М. Чуйко, кандидат физико-математических наук,
доцент*

В данной работе реализован метод конечных разностей решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в сложных двумерных областях с использованием криволинейных координат. Исходная область отображается в прямоугольную расчетную область в пространстве обобщенных координат. Краевая задача записывается в криволинейных координатах и аппроксимируется на равномерной сетке в расчетной области.

Ключевые слова: эллиптические уравнения; смешанные производные; задача Дирихле; метод конечных разностей; разностные сетки; аппроксимация; обобщенные криволинейные координаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБОБЩЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим уравнение Пуассона в нерегулярной двумерной области Ω_{xy} с граничными условиями Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (1)$$

$$u(x, y)|_{(x,y) \in \partial\Omega_{xy}} = u_B(x, y). \quad (2)$$

Введем обобщенные криволинейные координаты с помощью преобразований общего вида [1]

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (3)$$

отображающие область Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$.

В пространстве обобщенных координат $(\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}$ задача Дирихле (1) – (2) примет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = |J^{-1}| f(x, y), \quad (4)$$

$$u(\xi, \eta) \Big|_{(\xi, \eta) \in \partial \Omega_{\xi\eta}} = u_B(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad (5)$$

где

$$B_{11} = \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|},$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$|J^{-1}| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Задача (4) – (5) является краевой задачей для эллиптического уравнения со смешанными производными, в которой роль коэффициентов при смешанных производных играют метрические коэффициенты преобразования (3).

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В прямоугольной области $\Omega_{\xi\eta}$ введем разностную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{h_\xi} \times \bar{\omega}_{h_\eta}$ с постоянными шагами h_ξ, h_η .

Построим разностный аналог задачи (4) для эллиптического оператора со смешанными производными на семиточечных шаблонах [2]

$$\Lambda^+ u = |J^{-1}| f(\xi_i, \eta_j), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad (6)$$

$$\Lambda^- u = |J^{-1}| f(\xi_i, \eta_j), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1} \quad (7)$$

и на девятиточечном шаблоне [3]

$$\Lambda^\pm u = |J^{-1}| f(\xi_i, \eta_j), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda^+ u &= (\Lambda_{11} + \Lambda_{12}^+ + \Lambda_{21}^+ + \Lambda_{22}) u = \\ &= (\beta_{11} u_{\bar{\xi}})_{\xi} + \frac{1}{2} [(\beta_{12} u_{\eta})_{\xi} + (\beta_{12} u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}}] + \frac{1}{2} [(\beta_{21} u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21} u_{\bar{\xi}})_{\bar{\eta}}] + (\beta_{22} u_{\bar{\eta}})_{\eta}, \\ \Lambda^- u &= (\Lambda_{11} + \Lambda_{12}^- + \Lambda_{21}^- + \Lambda_{22}) u = \\ &= (\beta_{11} u_{\bar{\xi}})_{\xi} + \frac{1}{2} [(\beta_{12} u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12} u_{\eta})_{\bar{\xi}}] + \frac{1}{2} [(\beta_{21} u_{\bar{\xi}})_{\eta} + (\beta_{21} u_{\xi})_{\bar{\eta}}] + (\beta_{22} u_{\bar{\eta}})_{\eta}, \\ \Lambda^\pm u &= (\Lambda_{11} + \Lambda_{12}^\pm + \Lambda_{21}^\pm + \Lambda_{22}) u = (\beta_{11} u_{\bar{\xi}})_{\xi} + \frac{1}{2} [(\beta_{12}^- u_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{12}^- u_{\eta})_{\bar{\xi}} + (\beta_{12}^+ u_{\eta})_{\xi} + \\ &+ (\beta_{12}^+ u_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}}] + \frac{1}{2} [(\beta_{21}^- u_{\bar{\xi}})_{\eta} + (\beta_{21}^- u_{\xi})_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}^+ u_{\xi})_{\eta} + (\beta_{21}^+ u_{\bar{\xi}})_{\bar{\eta}}] + (\beta_{22} u_{\bar{\eta}})_{\eta}, \\ \beta_{\alpha\gamma}^+ &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha\gamma} + |\beta_{\alpha\gamma}|) \geq 0, \quad \beta_{\alpha\gamma}^- = \frac{1}{2} (\beta_{\alpha\gamma} - |\beta_{\alpha\gamma}|) \leq 0, \quad \alpha, \gamma = 1, 2, \quad \alpha \neq \gamma. \end{aligned}$$

Разностные схемы (6), (7), (8) аппроксимируют (4) со вторым порядком. Краевые условия Дирихле в граничных узлах аппроксимируются точно $u_{ij} = \tilde{u}_B(\xi_i, \eta_j)$.

Аппроксимация (6) является монотонной и используется в случае знакоположительных, (7) – знакоотрицательных, а (8) – знакопеременных коэффициентов при смешанных производных.

Для решения полученных систем семи и девятиточечных разностных уравнений использован модифицированный сильно неявный метод MSIM [4].

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Проверка алгоритма проводилась на точном решении

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_2}\right),$$

где L_1 и L_2 – размер области Ω_{xy} по x и y . Правая часть и краевые условия определялись из вида точного решения.

Начальное приближение решения во всех узлах задавалось нулевым. Критерием окончания итерационного процесса в MSIM является выполнение условия

$$\left|u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m\right| < \varepsilon_1 \left|u_{ij}^m\right| + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-7},$$

где m – номер итерации.

На рис. 1 приведены физическая Ω_{xy} и расчетная $\Omega_{\xi\eta}$ области с введенной разностной сеткой 32×32 , а на рис. 2 – численное решение.

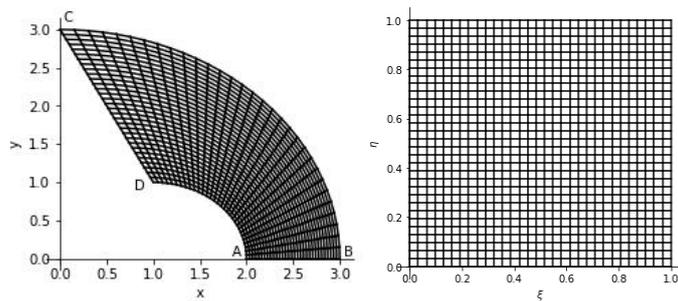


Рис. 1. Разностная сетка 32×32 в физической области Ω_{xy} и расчетной области

$\Omega_{\xi\eta}$

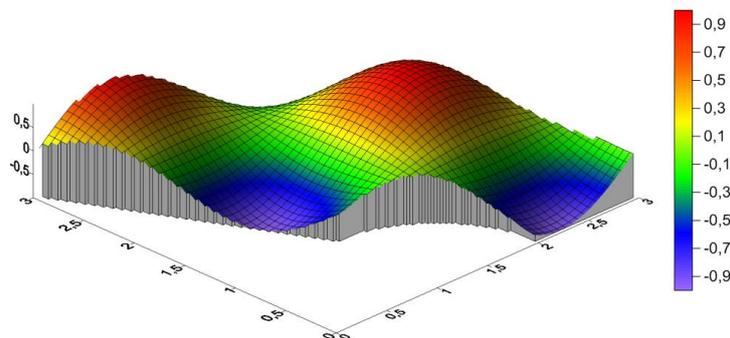


Рис.2. Численное решение на сетке 32×32 в области Ω_{xy}

В таблице представлены количество узлов разностной сетки, значение погрешности разностного решения и количество итераций.

Погрешность численного решения и количество итераций в физической области

$N \times N$	$\max u_{ij} - u_{ex}(x_{ij}, y_{ij}) , \text{ it}$					
	Разностная схема 1		Разностная схема 2		Разностная схема 3	
16×16	0.030414	37	0.008692	42	0.008692	42
32×32	0.007687	129	0.001989	149	0.001989	149
64×64	0.001898	456	0.000486	531	0.000486	531
128×128	0.000458	1608	0.000131	1870	0.000131	1870

Данные, приведенные в таблице, подтверждают второй порядок аппроксимации задачи Дирихле для уравнения Пуассона в нерегулярной области. Исследовалось влияние монотонности и шагов используемых разностных схем на число итераций метода MSIM.

Библиографические ссылки

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. М.: Мир, 1991. 799 с.
2. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. М: Физматлит, 1997. 552 с.
3. Rybak, I. V. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives // Math. Model. Anal. 2004. Vol. 9, № 2. P. 169 – 178.
4. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems // Numerical Heat Transfer. 1981. Vol. 4, №. 1. P. 1 – 19.