

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ-ПОЛОСЫ С ВЫСОКОКОНТРАСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ МАТЕРИАЛА

Nguen Le

*dinhnguyen081017@gmail.com;*

*Научный руководитель — Г. И. Михасёв, доктор физико-математических наук, профессор*

Рассматривается изотропная трехслойная полоса с высококонтрастными упругими свойствами. Исходя из двухмерной теории упругости выведены уравнения, описывающие изгиб и динамику полосы-балки, а также уравнения типа Тимошенко-Рейсснера, описывающие длинноволновую динамику трехслойной балки-полосы под действием объемных сил.

**Ключевые слова:** трехслойная балка-полоса; высококонтрастные свойства; сдвиги; колебания; уравнение типа Тимошенко-Рейсснера.

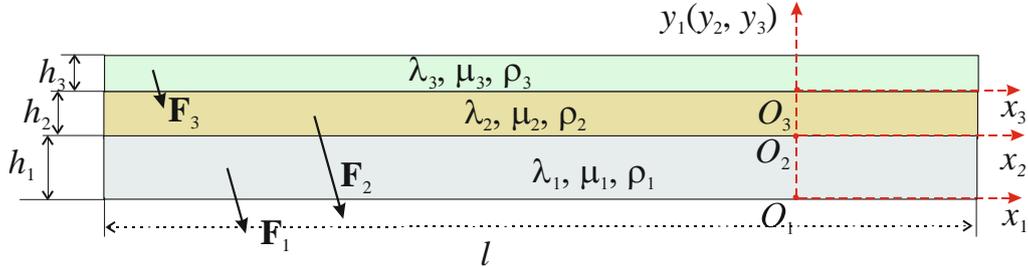
## ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] методом асимптотического интегрирования двухмерных уравнений упругости по толщине с последующим осреднением всех переменных параметров, авторами получены уравнения, описывающие изгиб и динамику полосы-балки типа Тимошенко-Рейсснера с учетом поперечных сдвигов. Аналогичный асимптотический подход использован в статье [2] при исследовании низкочастотных колебаний двухслойной полосы-балки с высококонтрастными механическими свойствами, однако, в отличие от работы [1], авторами выполнено асимптотическое интегрирование по толщине обоих слоев с выполнением граничных условий неразрывности на интерфейсной поверхности. Целью данной работы является распространение методики, разработанной в [2], для вывода уравнений, описывающих низкочастотную динамику трехслойной полосы-балки, состоящей из жесткого ядра и двух «мягких» лицевых слоев.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехслойную полосу, состоящую из изотропного упругого жесткого ядра и двух изотропных относительно мягких слоев, жестко прикрепленных к заполнителю. Каждый слой толщиной  $h_k$  характеризуется константами Ламе  $\lambda_k, \mu_k$  и плотностью материал  $\rho_k$ , где  $k=1,3$  и  $k=2$  соответствуют внешним мягким слоям и жесткому ядру, соответственно. В общем случае материал внешних слоев можно рассматривать как вязкоупругий с комплексными параметрами  $\lambda_j, \mu_j$  ( $j=1,3$ ).

Системы координат для каждой полосы приведены на рисунке, где  $x_1 = x_2 = x_3 = x$  и  $0 \leq y_k \leq h_k$ . На балку-полосу действуют объёмные силы  $F_k = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)})$ , где  $f_\zeta^{(k)}(x_k, y_k)$  являются функциями продольной и поперечной координат  $x_k, y_k$ . Возможные внешние силы, действующие на мягкие облицовки, считаются слабыми и не учитываются



Трёхслойная балка-полоса под действием объёмных сил. Системы координат

Материал для каждого слоя предполагается изотропным и подчиняется классическому Закон Гука  $s_{ij}^{(k)} = \lambda_k e_{ii}^{(k)} \delta_{ij} + 2\mu_k e_{ij}^{(k)}$ .

Введем малый параметр и соотношение модулей упругости слоев:

$$\varepsilon = h/l, \quad h = h_1 + h_2 + h_3, \quad E_m' / E_2 = \varepsilon^2 \zeta_m, \quad \zeta_m \ll 1, \quad m = 1, 3. \quad (1)$$

Здесь  $E_2$  – модуль Юнга упругого жесткого ядра,  $E_m' = \Re E_m$  – действительная часть комплексного модуля Юнга для  $m$ -го мягкого слоя. Введем безразмерные переменные

$$x = l\xi, \quad y_k = h_k z_k, \quad \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\} = h \{u^{(k)}, w^{(k)}\},$$

$$s_{ij}^{(k)} = E_k' \sigma_{ij}^{(k)}, \quad f_2^{(k)} = \frac{E_k'}{h_k} \hat{f}_2^{(k)}, \quad f_1^{(k)} = \frac{\varepsilon E_k'}{h_k} \hat{f}_1^{(k)}, \quad i, j, k = 1, 2. \quad (2)$$

Далее рассматриваем низкочастотные изгибные колебания с большим характерным размером деформации, для которых справедливы следующие асимптотические оценки [1,2]:

$$w^{(k)} = \varepsilon^{-4} W^{(k)}, \quad u^{(k)} = \varepsilon^{-3} U^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = \varepsilon^{-1} \tau^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = \sigma^{(k)} \quad (3)$$

где  $W^{(k)}, U^{(k)}, \tau^{(k)}, \sigma^{(k)} \ll 1$  – безразмерные нормальное и тангенциальное перемещения, а также напряжение сдвига и нормальное напряжение, соответственно.

Уравнения равновесия двухмерной теории упругости, с учетом (1) – (3), можно свести к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z} = -\varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^4 \kappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)},$$

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} = -\kappa_k \frac{\partial W^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \kappa_k c_g^{(k)} \tau^{(k)},$$

$$\frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial z} = -\kappa_k c_0^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \eta_k \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2} - \varepsilon^2 f_1^{(k)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial z} = -\kappa_k \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial \xi} + \eta_k \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} - f_2^{(k)}.$$

Граничные условия на лицевых поверхностях являются однородными, а на интерфейсных поверхностях ставим условия неразрывности деформаций.

### УРАВНЕНИЕ ТИПА ТИМОШЕНКО-РЕЙССНЕРА

Решение уравнений (4) ищем в виде рядов по степеням малого параметра. Асимптотическое интегрирование уравнений (4) приводит к последовательности краевых задач на каждом слое. Решение краевых задач нулевого приближения с учетом граничных условий на лицевых и интерфейсных линиях, приводит к уравнению типа Бернулли-Эйлера, описывающее динамику эквивалентной однослойной балки-полосы.

Из рассмотрения первого приближения получаем модифицированное уравнение, предсказывающее динамику эквивалентной однослойной балки с учетом поперечных сдвигов и свойств мягких слоев:

$$I_r \frac{\partial^4 u_2^0}{\partial x^4} + J_r \frac{\partial^4 u_2^0}{\partial t^2} = E_2 F(x/l). \quad (5)$$

Где

$$I_r = \frac{1}{12} \left[ \frac{E_2 h_2^3}{1 - \nu_2^2} + \frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} (4h_1^2 + 6h_1 h_2 + 3h_2^2) + \frac{E_3 h_3}{1 - \nu_3^2} (4h_3^2 + 6h_3 h_2 + 3h_2^2) \right], \quad (6)$$

$$\mathbf{J}_r = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k - \rho_2 h_2^3 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1 + \nu_2}{12(1 - \nu_2)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Здесь,  $F(x)$  – приведенная к исходной поверхности равнодействующая объемных сил,  $I_r$  – приведенная к исходной поверхности изгибная жесткость, а  $J_r$  – модифицированный дифференциальный оператор инерции [2]. Уравнение (6) учитывает сдвиги в твердом ядре и относится к модели типа Тимошенко-Рейсснера [1]. В отличие от модели, предложенной в [1] и основанной на осреднении всех характеристик по толщине балки/пластины, уравнение (6) может быть использовано для случая, когда упругие и вязкоупругие свойства составляющих слоев отличаются высокой контрастностью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена трехслойная полоса, состоящая из изотропного упругого жесткого ядра и двух изотропных относительно мягких слоев, жестко прикрепленных к заполнителю. С использованием асимптотического интегрирования двухмерных уравнений упругости по толщине слоев, выведено дифференциальное уравнение, предсказывающее деформацию изгиба и свободные низкочастотные колебания балки-полосы, соответствующее модели типа Тимошенко-Рейсснера.

## Библиографические ссылки

1. *Tovstik P, Tovstik T.* Generalized Timoshenko-Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2017. Vol. 97 (3). P. 297–308.
2. *Mikhasev G., Le N.* Asymptotically Correct Analytical Model for Flexural Response of a Two-Layer Strip with Contrast Elastic Constants // *In: H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov (eds) Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials.* 2023. Vol. 170. Cham: Springer. P. 517–540.