

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЯДРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО РЕШЕБНИКА ПО АНАЛИЗУ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Г. С. Плисюк, Я. Г. Сахечидзе

*mmf.plisyuk@bsu.by, mmf.sahechid@bsu.by;*

*Научный руководитель — О. А. Лаврова, кандидат физико-математических наук, доцент*

В работе предложен проект электронного решебника по математическому анализу для решения задач о сходимости числовых рядов, а также реализация вычислительного ядра. Целью разрабатываемого приложения является развитие и совершенствование навыков анализа числовых рядов на сходимость у студентов математических специальностей, а также внедрение компьютерных средств в процесс обучения. Вычислительное ядро приложения реализовано средствами Wolfram Mathematica.

**Ключевые слова:** математический анализ; числовой ряд; сходимость; решебник; вычислительное ядро; компьютерная математика.

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Проектирование приложения-решебника производилось с использованием нотации Unified Modeling Language (унифицированный язык моделирования). В качестве примера приведена диаграмма вариантов использования (рис. 1).

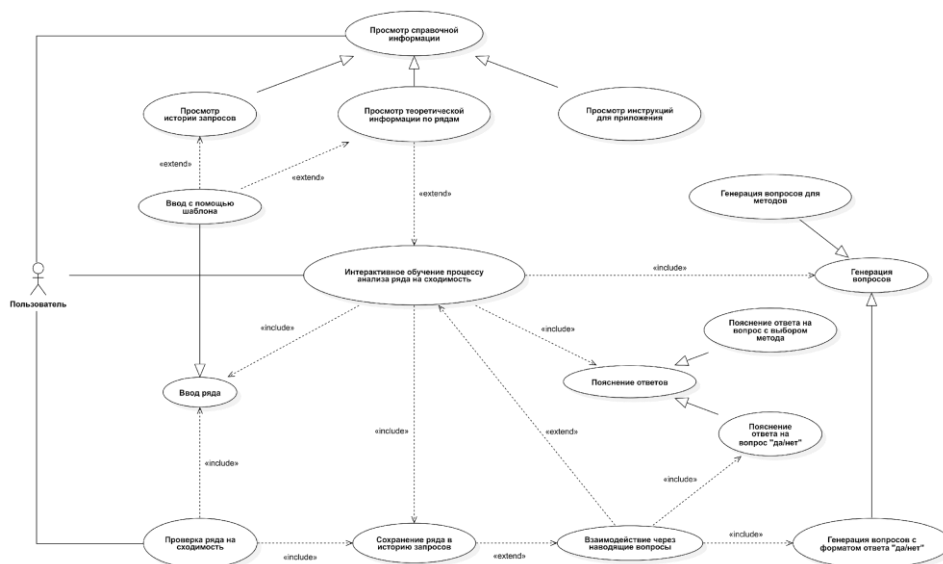


Рис. 1. Диаграмма вариантов использования

Представленная диаграмма демонстрирует функциональность приложения с точки зрения пользователя. В ней отражены три основные функции решебника:

9. Просмотр справочной информации: позволяет ознакомиться с основными понятиями и методами, используемыми в приложении.

10. Проверка ряда на сходимость: представляет собой ядро приложения, которое непосредственно обрабатывает введенную информацию.

Интерактивное обучение алгоритму анализа ряда на сходимость: предусматривает взаимодействие с пользователем через наводящие вопросы, генерацию вопросов, вариантов ответов и пояснений. Приложение предоставляет пользователю право выбора пути решения, что позволяет ему активно участвовать в процессе анализа информации.

Разработанные для описания проекта схемы доступны на репозитории GitHub [1]. Проект приложения был представлен на международной конференции «Трансформация механико-математического и IT-образования в условиях цифровизации» [2].

## СХЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГОРИТМА АНАЛИЗА ЧИСЛОВОГО РЯДА НА СХОДИМОСТЬ

Ядро решебника базируется на алгоритме анализа числовых рядов на сходимость, который был спроектирован на основе литературы по математическому анализу, изучаемой в рамках учебной программы ММФ БГУ. В частности, использовалось учебное пособие [3]. Также при составлении алгоритма проводились консультации с преподавателями кафедры теории функций ММФ БГУ проф. Бровкой Н. В. и доц. Громач Е. В.

Для примера рассмотрим схематичное представление начального этапа алгоритма анализа числового ряда на сходимость (рис. 2).

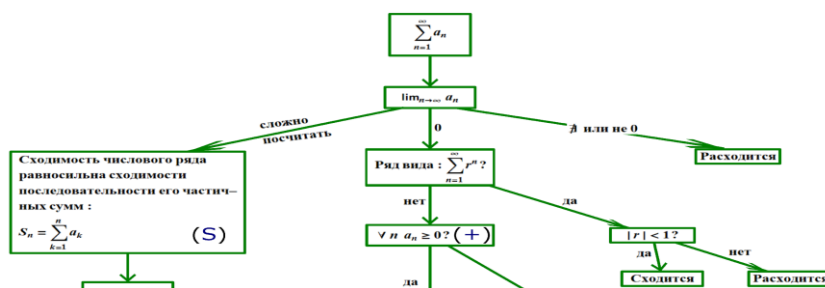


Рис. 2. Начальный этап схемы для анализа числовых рядов

На схеме от блока с необходимым условием отходят три ветви: если условие выполняется («0»), если оно не выполняется («≠ или не 0») или если пользователю не удалось посчитать предел («сложно посчитать»),

см. рис. 2. Если ответ — «0», то анализ продолжается на основании методов, которые работают с последовательностью членов ряда. Если ответ — « $\infty$  или не 0», то на основании необходимого условия [3, ч. 1, с. 113] ряд расходится, и анализ завершен. Если ответ — «сложно посчитать», то вероятнее всего общий член ряда имеет слишком сложную структуру, и, возможно, проще будет работать с последовательностью частичных сумм ряда. Остальная часть схемы представляется по аналогии с представлением на рис. 2.

Также подобные схемы были разработаны для определения равномерной и поточечной сходимости функциональных рядов и последовательностей. Все схемы доступны на репозитории GitHub [4].

## РЕАЛИЗАЦИЯ ЯДРА В СРЕДЕ WOLFRAM MATHEMATICA

Основной сущностью в системе является числовой ряд, компьютерное представление которого реализовано с помощью объекта `kmSeries`:

```
kmSeries[km, an_Function, {n, start_Integer?NonNegative,  $\infty$ }].
```

Объект `kmSeries` обладает следующими атрибутами:

- `km` – специальный символ, который позволяет отличать внутреннее представление от вызова объекта `kmSeries` как функции;
- `an` – функция, которая задает общий член ряда;
- список, содержащий переменную-индекс и пределы суммирования.

Для реализации алгоритма анализа числового ряда на сходимость согласно разработанной схеме были созданы независимые друг от друга функции проверки условий и утверждений схемы для объекта `kmSeries`. При построении системы были приняты следующие соглашения: отклики всех блоков были унифицированы, а именно «True» означает, что признак/условие выполняется; «False» – признак/условие не выполняется; «Indeterminate» – система не может определить выполнение признака/условия, или же сам признак не может дать однозначный ответ в данной ситуации. Также названия всех функций, реализующих блоки схемы, должны заканчиваться на «Test».

Для имитации прохождения системой схемы алгоритма было разработано две функции. Первая функция `kmMainProgram` последовательно выполняет шаги схемы и сохраняет конечный результат всего анализа. Вторая функция `kmMainProcess` предназначена для инициализации необходимых переменных, а также для контроля выполнения одного блока схемы на каждом шаге с последующим

анализом результатов, внесением соответствующих записей в «журнал» и навигацией по схеме.

Начальным шагом устанавливается проверка необходимого условия. После инициализации начинается основной этап работы системы, в течение которого kmMainProgram вызывает kmMainProcess для выполнения алгоритма текущего блока схемы шаг за шагом до тех пор, пока анализ ряда не будет завершен.

В качестве иллюстрации приведена часть «журнала» (рис. 3).

```
kmDisplay[Quiet@kmMainProgram[Sum[ $\frac{(n+1)^2}{2^k}$ , 1], "Plain"]
```

---

**ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ**

Текущий ряд для анализа на сходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n^2} (n+1)^2)$ .

Переходим к проверке необходимого условия...

---

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ**

Проверка выполнения необходимого условия:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n^2} (n+1)^2) = 0$ .

Необходимое условие **выполняется**, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Переходим к определению геометрического ряда...

---

**ОТДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ**

Проверка, является ли ряд геометрическим согласно виду общего члена ряда:  $a_n = r^n$ ?

Ряд **не является** геометрическим.

Переходим к определению знакопостоянного ряда...

---

**ЗНАКОПОСТОЯНСТВО**

Проверка, является ли ряд знакопостоянным согласно виду общего члена ряда:  $(\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0) \vee (\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq 0)$ ?

Ряд **является** знакопостоянным.

Переходим к определению обобщённо-гармонического ряда...

---

**ОТДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ РЯДОВ**

Проверка, является ли ряд обобщённо-гармоническим согласно виду общего члена ряда:  $a_n \leq \frac{1}{n^p}$ ?

Ряд **не является** обобщённо-гармоническим.

Переходим к проверке общего члена ряда на наличие факториала...

Рис. 3. Пример программной реализации алгоритма

Все выше обозначенные алгоритмы в полном объеме, а также текущая версия ядра доступны на репозитории GitHub [4].

## Библиографические ссылки

1. GitHub – Developed an interface for an electronic interactive math calculus tutorial [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/YaroslavSahechidze/DESIGNING-THE-INTERACTIVE-INTERFACE-OF-THE-ELECTRONIC-CALCULUS-TUTORIAL> – Дата доступа: 19.06.2023.
2. Плисюк Г. С., Сахечидзе Я. Г., Лаврова О. А. Разработка электронного интерактивного решебника по математическому анализу // Международная научно-практическая конференция «Трансформация механико-математического и IT-образования в условиях цифровизации», Минск, 26–27 апреля 2023 г., БГУ (принято к опубликованию).
3. Зверович Э. И. Вещественный и комплексный анализ : учеб. пособие для студ. мат. спец. учреждений, обеспеч. получение высш. образования : в 6 ч. – Минск: Вышэйшая школа, 2006–2008. 6 ч.
4. GitHub – Материалы по проекту интерактивного электронного решебника по мат. анализу для числовых рядов на Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://github.com/GregoryPlisiuk/CourseWork> – Дата доступа: 19.06.2023.