

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, С УЧЕТОМ РАЗЛИЧНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

А. А. Левый

levand2001@mail.ru;

*Научный руководитель — М. А. Журавков, доктор физико-математических наук,
профессор*

В статье исследуется критерий пластичности, который можно использовать как дополнительный метод контроля перехода материала в состояние пластического течения. Рассматривается задача всестороннего симметричного растяжения плоскости с круговым отверстием. Она же может применяться для оценки состояния подрабатываемого массива горных пород, зачастую представляющего из себя пористую структуру, а также различных компонентов техники, произведенной также из неоднородных пористых материалов. Задача решается в общем виде, что позволяет получать численные значения характеристик напряженного состояния и геометрических параметров областей пластичности для различных критериев пластичности.

Ключевые слова: упругопластическое поведение; критерии пластичности; чувствительность пластических свойств; математическое моделирование; конечно-элементное моделирование; пористость.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об определении напряженного состояния в бесконечной плоскости с круговым отверстием (рис. 1), при всестороннем равномерном растяжении. При этом рассмотрим различные параметры пластического течения среды, а также условия пластичности при которых учитывается зависимость пластических свойств материала от его напряженного состояния.

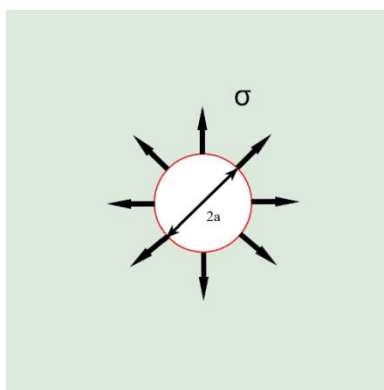


Рис. 1. Плоскость с круговым вырезом радиуса a и радиальными усилиями

ЗАДАНИЕ КРИТЕРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И РЕШЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для изотропных материалов критерий и условия пластичности задаются с помощью функций, зависящих от трех инвариантов тензора напряжений. В рассмотренном случае третьим инвариантом можно пренебречь, так как он оказывает существенно меньшее влияние по сравнению со вторым инвариантом. Поэтому при установленной зависимости от напряженного состояния условие пластичности [1] можно записать в виде (1):

$$F(\xi) = f(\xi)\sigma_0 = k, \quad (1)$$

где σ_0 – интенсивность касательных напряжений, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, σ – среднее напряжение, $\xi = \sigma / \sigma_0$. При этом сама функция пластичности $f(\xi)$ не зависит от вида нагружения и исходя из этого можно устанавливать зависимость любых пластических характеристик для различных типов нагружения. Для условия плоского напряженного состояния $\sigma_{i3} = 0$, с учетом отсутствия массовых сил можно записать следующую систему уравнений (2) для определения напряженного состояния в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} &= 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} &= 0, \\ f(\xi)(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2)^{1/2} &= k. \end{aligned} \quad (2)$$

Из-за симметричного нагружения сдвиговые напряжения отсутствуют. В этом случае уравнение равновесия записывается в виде (3) из-за отсутствия массовых сил и касательных напряжений:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (3)$$

В свою очередь интенсивность напряжений и функцию пластичности запишем в цилиндрических координатах и получим критерий пластичности в следующем виде (4):

$$f(\sigma_r, \sigma_\varphi) \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi} = k. \quad (4)$$

Теперь выберем линейную функцию пластичности (5) и подставив ее в (4) получим уравнение (6), где C – чувствительность пластических свойств материала к виду напряженного состояния [2]:

$$f(\xi) = 1 + C\xi. \quad (5)$$

$$\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi = \left(k - \frac{C}{3} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right)^2. \quad (6)$$

Так же исходя из прикладываемых нагрузок и физико-механических свойств самого тела можно подбирать различные вариации функции пластичности, как пример, функция (7), которая основана на условии пластичности Грина $\sigma_0^2 + C\sigma^2 = k^2$ и применима для пористых тел, для аналогичного нагружения, где через параметр C можно учитывать пористость материала.

$$f(\xi) = \sqrt{1 + C\xi^2}. \quad (7)$$

Далее из уравнения (6) найдем зависимость $\sigma_\varphi(\sigma_r)$ и подставим ее в уравнение (3), после чего получаем выражение (8)

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{-(1 - 4C^2/9)\sigma_r - 2kC/3 \pm \sqrt{4k^2 - 4Ck\sigma_r + 3(1 - 4C^2/9)\sigma_r^2}}{2(1 - C^2/9)}. \quad (8)$$

При этом $|C| < \frac{3}{2}$, а решение для напряжений σ_φ берем для рассматриваемой нами области, $r/a \geq 1$. Проинтегрировав по частям уравнение (8) получим уравнение (9) отображающее распределение напряжений в рассматриваемом теле, при этом обезразмерим напряжения, найдя отношения их к условию пластичности k , и расстояние от отверстия, найдя отношение к a .

$$\begin{aligned}
Ln \frac{r}{a} = & - \frac{3ArcTan \left[\frac{Ck}{\sqrt{3 - \frac{4C^2}{3}} \sqrt{k^2}} \right]}{2\sqrt{3 - \frac{4C^2}{3}}} + \frac{3ArcTan \left[\frac{6Ck + 9\sigma_r - 4C^2\sigma_r}{\sqrt{9 - 4C^2} \sqrt{12k^2 - 12Ck\sigma_r + (-9 + 4C^2)\sigma_r^2}} \right]}{2\sqrt{3 - \frac{4C^2}{3}}} + \\
& + \frac{1}{4} ArcTanh \left[\frac{(-6 + C)k}{(-3 + 2C)\sqrt{k^2}} \right] - \frac{1}{4} ArcTanh \left[\frac{(6 + C)k}{(3 + 2C)\sqrt{k^2}} \right] + \\
& - \frac{1}{4} ArcTanh \left[\frac{2(-6 + C)k + 3(-3 + 2C)\sigma_r}{(-3 + 2C)\sqrt{4k^2 - 4Ck\sigma_r + \frac{1}{3}(-9 + 4C^2)\sigma_r^2}} \right] + \\
& + \frac{1}{4} ArcTanh \left[\frac{2(6 + C)k - 3(3 + 2C)\sigma_r}{(3 + 2C)\sqrt{4k^2 - 4Ck\sigma_r + \frac{1}{3}(-9 + 4C^2)\sigma_r^2}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} Log[3k] - \frac{1}{4} Log[3k - 3\sigma_r - 2C\sigma_r] - \frac{1}{4} Log[3k + 3\sigma_r - 2C\sigma_r].
\end{aligned}$$

(9)

Для определения распределения окружных напряжений σ_ϕ в теле по аналогии из уравнения (6) найдем уже зависимость σ_r (σ_ϕ) и подставим ее в уравнение равновесия (3), при этом рассматриваются две области решения, где σ_ϕ принимает различные решения, но на которых выполняется условие $r/a \geq 1$. Само распределение получим подставив полученную зависимость σ_r (σ_ϕ) в (9).

Исходя из уравнения (9) можно рассмотреть различное распределение напряжений σ_r и σ_ϕ в рассматриваемом теле при различных вариациях коэффициента C .

ПОЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК

График, приведенный на рисунке 2, полученный с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, отображает зависимость радиальных и окружных напряжений в безразмерном виде от коэффициента C , через который, как упоминалось ранее, можно вводить чувствительность материала к пластическим деформациям. Исходя из результатов представленных на рисунке 3, было получено численное решение для полей характеристик в программном комплексе COMSOL Multiphysics, непосредственно применимых к решаемой задаче.

При сравнении полей характеристик в обезразмеренном виде (рис. 2) и для численного решения (рис. 3) можно заметить соответствие поведения распределений рассматриваемых соотношений.

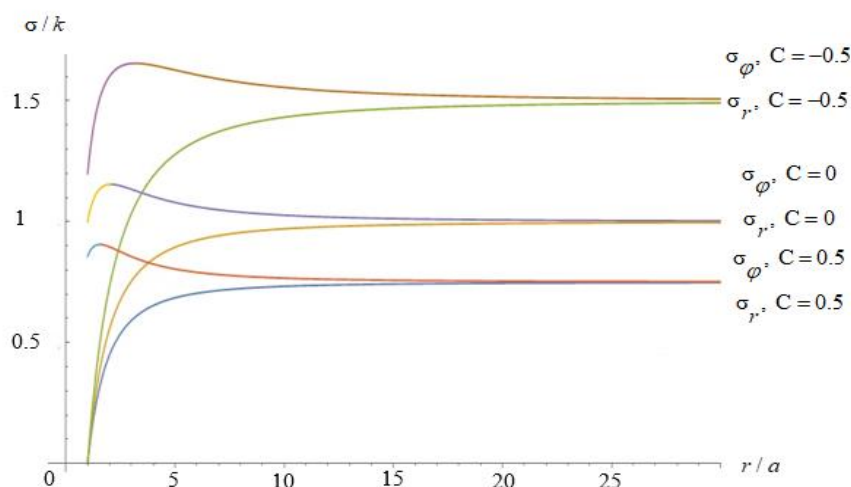


Рис. 2. График поля характеристик показывающий распределения отношения напряжений к условию пластичности вблизи кругового выреза

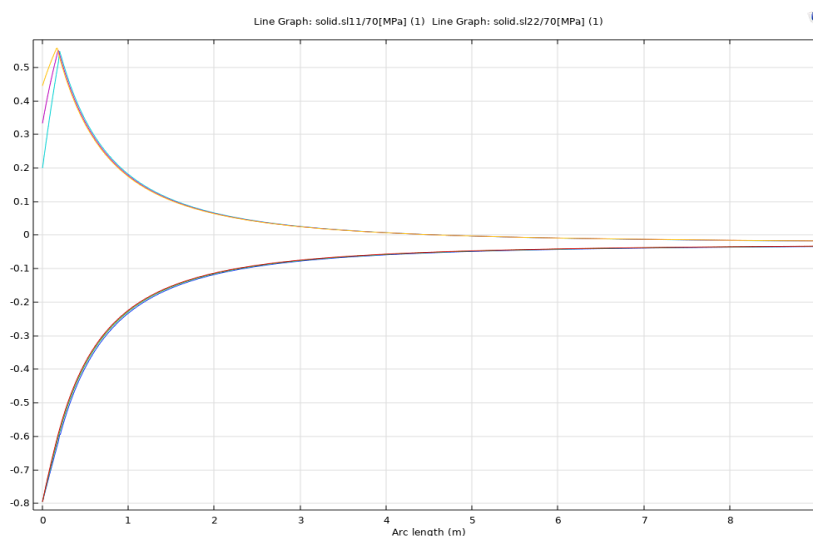


Рис. 3. Распределение отношения окружных и радиальных напряжений к пределу пропорциональности при чувствительностях $C = 0.5$, $C = 0$ и $C = -0.5$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено аналитическое решение задачи об определении НДС плоскости с круговым отверстием на поверхность которого действует равномерно распределенное давление. Исследована зависимость распределения напряжений от значения чувствительности пластических свойств материала, которую можно рассматривать в качестве характеристики пористости для неоднородных материалов.

Показано, что распределение напряжений существенно зависит от этого параметра. Задача решена в общем виде, что позволяет использовать широкий спектр критериев пластичности для получения численных значений характеристик напряженного состояния и размеров пластических областей. Также, реализовано численное решение задачи о всестороннем симметричном растяжении плоскости с круговым отверстием в условии плоского напряженного состояния.

Библиографические ссылки

1. *Ломакин Е.В., Минаев Н.Г.* Поля напряжений вблизи кругового отверстия в пористой среде в условиях плоской деформации // *Механика твердого тела.* 2020. №3. С. 39-47.
2. *Ломакин Е.В., Мельников А.М.* Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2009. Т. 2, № 2. С. 48–64.