ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

А. А. Спиридонов, В.А. Саечников

Белгосуниверситет, Минск, Беларусь

При решении стохастических дифференциальных уравнений, описывающих поведение динамических систем эффективным является асимптотический метод, основанный на разложении статистических характеристик решений динамических задач по малому параметру, который является отношением радиуса корреляции случайного поля к дальности распространения в среде. Это так называемое *приближение дельта-коррелированного случайного поля.* В динамических системах с гауссовыми флуктуациями параметров, используемый метод приводит к марковскому характеру решения задачи, а соответствующее уравнение для плотности вероятностей перехода имеет вид *уравнения Фоккера-Планка.* Весьма мощным методом решения уравнения Фоккера-Планка является метод, основанный на использовании интегральных преобразований, связанных с *функциями Лежандра.* Это позволяет получить асимптотические выражения для плотности вероятности и моментов интенсивности волнового поля.

Рассмотрим падение волнового поля

$$U(x,\vec{R}) = e^{-ikx}u(x,\vec{R}) \tag{1}$$

из полупространства $x < 0$ на случайно – неоднородную среду. Если пренебречь эффектами, связанными с рассеянием назад, то для описания распространения волны в среде с крупномасштабными трехмерными неоднородностями при рассеянии волны на малые углы можно использовать *параболическое уравнение квазиоптики* [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,\vec{R}) = \frac{i}{2k}\Delta_R u(x,\vec{R}) + \frac{ik}{2}\left[\varepsilon_0\left(\vec{R}\right) + \varepsilon\left(x,\vec{R}\right)\right]u(x,\vec{R}), \tag{2}$$

где $\varepsilon_0\left(\vec{R}\right)$ - детерминированная часть диэлектрической проницаемости, описывающая рефракцию излучения, $\varepsilon\left(x,\vec{R}\right)$ - случайная часть диэлектрической проницаемости, описывающая флуктуации излучения.

Начальное условие в плоскости приемника для падающего коллимированного волнового пучка, распределение поля, в начальном сечении которого имеет вид

$$u_0(\vec{R}) = u_0 \exp\left\{-\frac{\vec{R}^2}{2a^2}\right\}, \tag{3}$$

где a — эффективная ширина пучка.

Рассмотрим распространение излучения в параболическом волноводе

$$\varepsilon_0\left(\vec{R}\right) = -\alpha^2 R^2 , \qquad \varepsilon\left(x, \vec{R}\right) = -Z(x) R^2 , \tag{4}$$

где α - детерминированный параметр, характеризующий интенсивность рефракции, $Z(x)$ - случайная функция, описывающая флуктуации диэлектрической проницаемости.

В случае флуктуаций диэлектрической проницаемости решение уравнения (2) можно представить в виде

$$u(x, \vec{R}) = u_0 \exp\left[-\frac{R^2}{2a} A(x) + B(x) \right],$$

где комплексные функции $A(x)$ и $B(x)$ описываются уравнениями

$$\frac{dA(x)}{dx} + \frac{i}{ka^2}\left[A^2(x) - \left(\alpha k a^2\right)^2 \right] + ika^2 Z(x) = 0 , \qquad A(0) = 1,$$

$$\frac{dB(x)}{dx} + \frac{i}{ka^2} A(x) = 0 , \qquad B(0) = 0 . \tag{5}$$

Пусть случайная функция $Z(x)$, описывающая флуктуации диэлектрической проницаемости гауссова дельта-коррелированная и ее дисперсия достаточна мала $(\sigma^2 \ll 1)$. Тогда для применения асимптотического метода введем случайную функцию $\psi(x)$, которая выражается через медленно меняющиеся и статистически независимые функции $w(x)$ и $\varphi(x)$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{w(x) - 1}{w(x) + 1}} \exp\left(i\varphi(x) - 2i\alpha x\right)$$

и связана с $A(x)$ равенством

$$A(x) = k\alpha a^2 \frac{1 + \psi(x) e^{-2i\alpha x}}{1 - \psi(x) e^{-2i\alpha x}} .$$

В результате для плотности вероятностей $w(x)$ получаем уравнение Фоккера- Планка

$$\frac{\partial P(x, w)}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial w}\left(w^2 - 1\right) \frac{\partial P(x, w)}{\partial w} , \qquad P(0, w) = \delta\left(w(0) - w(x)\right), \tag{6}$$

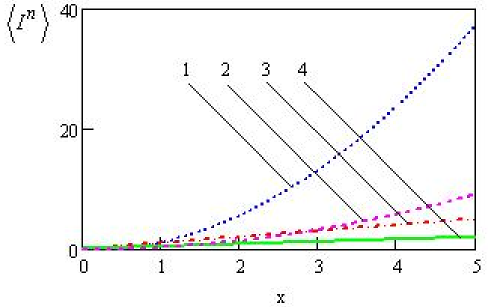
где $D = \sigma^2 l_0 / \left(2\alpha^2 k^2\right)$ – коэффициент диффузии, $w(0) = \left(1 + \alpha^2 k^2 a^4\right) / \left(\alpha k a^2\right)$.

Используя интегральное преобразование Меллера-Фока получим асимптотическое выражение для моментов интенсивности на оси параболического волновода

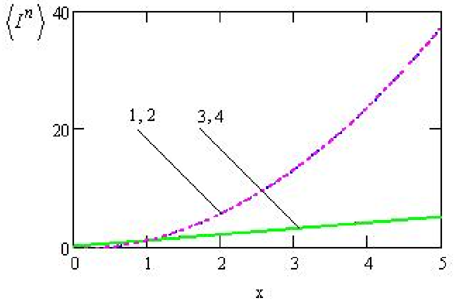
$$\left\langle I^n \right\rangle = \left(\alpha k a^2\right)^n P_{n-1}(w_0) \exp\left[Dn(n-1)x \right], \qquad (7)$$

где $P_n(w)$ – полином Лежандра порядка n.

На рисунке приведены графики зависимости моментов интенсивности $\left\langle I^2 \right\rangle$ и $\left\langle I^3 \right\rangle$ от дальности распространения x для коллимированного волнового пучка с длиной волны λ = 0,63 мкм и эффективной шириной a = 5 мм при различных значениях параметра α (1 — $\left\langle I^3 \right\rangle$, $\alpha = 4\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$, 2 —$\left\langle I^3 \right\rangle$, $\alpha = 2\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$, 3 — $\left\langle I^2 \right\rangle$, $\alpha = 4\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$, 4 — $\left\langle I^2 \right\rangle$, $\alpha = 2\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$) и $\sigma^2 = 10^{-16}$ (рисунок a) и дисперсии флуктуаций диэлектрической проницаемости σ^2 (1 — $\left\langle I^3 \right\rangle$, $\sigma^2 = 10^{-16}$, 2 —$\left\langle I^3 \right\rangle$, $\sigma^2 = 10^{-12}$, 3 — $\left\langle I^2 \right\rangle$, $\sigma^2 = 4\cdot10^{-16}$, 4 — $\left\langle I^2 \right\rangle$, $\sigma^2 = 2\cdot10^{-13}$) и $\alpha = 4\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$ (рисунок б).



(*а*)



(*б*)

Зависимость моментов интенсивности $\left\langle I^2 \right\rangle$ и $\left\langle I^3 \right\rangle$ от дальности распространения x при различных значениях параметра α и $\sigma^2 = 10^{-16}$ (*а*) и различных значениях σ^2 и $\alpha = 4\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$.

Из графиков зависимости моментов интенсивности очевидно, что в то время как среднее значение интенсивности на оси волновода сохраняется, высшие моменты интенсивности экспоненциально растут с дальностью распространения (рис. б). При заданных значениях параметра α, характеризующего интенсивность рефракции рассеяние на флуктуациях диэлектрической проницаемости не оказывает существенного влияния на распределение моментов интенсивности волнового поля (рис. б).

1. *Кляцкин В. И.* Динамика стохастических систем.-М.: Физматлит, 2003.