

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

 О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД - 12774/уч.

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09-2021, утверждённого постановлением МО РБ № 98 от 25.04.2022 г., типового учебного плана № G31-1-021/пр-тип. от 21.04.2021 г. и учебных планов № G31-1-019/уч. от 25.05.2021 г., № G31-1-004/уч. ин. от 31.05.2021 г., № G31-1-222/уч. от 22.03.2022, №G31-1-226/уч. ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

А.П. Садовский, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Л.Л. Голубева, заведующая кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

В.К. Дюбков, ректор Учреждения дополнительного образования «Институт повышения квалификации и переподготовки специалистов информационных технологий и бизнес-администрирования», кандидат технических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (протокол № 13 от 14.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 29.06.2023).

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа



Л. Л. Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований и решении практических задач с применением методов компьютерной алгебры.

Задачи учебной дисциплины:

1. формировать способности самостоятельно анализировать математические модели прикладных задач и разрабатывать алгоритмы их решения с применением методов компьютерной алгебры;
2. использовать и развивать инструментальные средства, информационные среды, автоматизированные системы;
3. использовать математические и компьютерные методы исследований при анализе современных естественнонаучных проблем.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста общего высшего образования по специальности 1-31 03 09 «Компьютерная математика и системный анализ».

Учебная дисциплина «Компьютерная алгебра» относится к **модулю** «Компьютерное моделирование» компонента учреждения высшего образования, является дисциплиной по выбору студента.

При изучении дисциплины «Компьютерная алгебра» используются знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплин «Компьютерная математика», «Алгебра и теория чисел», «Численные методы». Содержание дисциплины «Компьютерная алгебра» связано с содержанием дисциплины «Математическое моделирование динамических процессов».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Компьютерная алгебра» должно обеспечить формирование у студентов следующей **специализированной компетенции**:

СК-8. Осуществлять математическое и компьютерное моделирование для прикладных исследований.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные упорядочения мономов;
- алгоритм деления многочленов от нескольких переменных.

уметь:

- применять базисы Гребнера и результаты;
- решать практические задачи, решение которых сводится к нахождению аффинных многообразий.

владеть:

- методами решения полиномиальных систем.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Компьютерная алгебра» изучается в 6-м семестре. Форма получения высшего образования очная (дневная).

Всего на изучение учебной дисциплины «Компьютерная алгебра» отведено: 120 часов, в том числе 52 аудиторных часа, из них: лекции – 20 часов, лабораторные занятия – 26 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы. Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Аффинные многообразия и идеалы.

Определение аффинного многообразия и полиномиального идеала. Базис идеала. Параметризация аффинных многообразий. Задача описания идеала. Задача о принадлежности к идеалу. Задача решения полиномиальных уравнений. Задача неявного представления.

Тема 2. Алгоритм деления полиномов.

Типы упорядочений мономов в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Алгоритм деления в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Тема 3. Базисы Гребнера.

Мономиальные идеалы и лемма Диксона. Теорема Гильберта о базисе. Базисы Гребнера, свойства базисов Гребнера. Алгоритм Бухбергера. Минимальный базис Гребнера, редуцированный базис Гребнера. Усовершенствования алгоритма Бухбергера. Применение базисов Гребнера к решению практических задач.

Тема 4. Теория исключения.

Теоремы об исключении и продолжении, k -й исключающий идеал. Единственность разложения на множители и результаты. Результаты и теорема о продолжении. Обобщенные результаты.

Тема 5. Примеры применения базисов Гребнера.

Проблема различения центра и фокуса. Фокусные величины. Автоматическое доказательство геометрических теорем.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очной формы получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Аффинные многообразия и идеалы	4			4			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой.
2	Алгоритм деления полиномов	4			6		2	Отчеты по лабораторным работам с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой
3	Базисы Гребнера	4			6			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
4	Теория исключения	4			6			Отчеты по лабораторным работам с устной защитой
5	Примеры применения базисов Грёбнера	4			4		4	Отчеты по лабораторным работам с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Садовский, А. П. Полиномиальные идеалы и многообразия / А. П. Садовский. - Минск: БГУ, 2008. - 200 с.
2. Ершов Н. М. Дифференциальные уравнения в прикладных задачах / Н. М. Ершов. - Москва: ДМК Пресс, 2021. – 358 с.
3. Романьков В. А. Алгебраическая криптология / В. А. Романьков; М-во науки и высшего образования РФ, ФГБОУ ВО "Омский гос. ун-т им. Ф. М. Достоевского". - Омск: Изд-во ОмГТУ, 2020. - 261 с.
4. Лобанов А. И. Математическое моделирование нелинейных процессов: учебник для вузов, для студентов, обучающихся по естественно-научным направлениям / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. - Москва: Юрайт, 2023. - 255 с.

Перечень дополнительной литературы

5. Абрашина-Жадаева Н. Г. Математическое моделирование физических процессов: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физическим специальностям / Н. Г. Абрашина-Жадаева, В. И. Зеленков, И. А. Тимощенко. - Минск: РИВШ, 2022. - 174 с.
6. Кокс, Дэвид Идеалы, многообразия и алгоритмы = Ideals, Varieties, and Algorithms: Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши; Пер.с англ. Ю.Ю. Кочеткова под ред. В.Л. Попова. - Москва: Мир, 2000. - 687с.
7. Adams W., Loustaunau P. An Introduction to Gröbner Bases. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc. – Providence, 1994. 289 p.
8. Becker T., Weispfenning V. Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra. Springer Verlag, Berlin and New York, 1993. 512 p.
9. Просолов В.В. Многочлены. – МЦНМО, 2000, 336 с.
10. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. – М., Мир. 1972, 160 с.
11. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. – М., Мир. 1991, 152 с.
12. Быков В.И., Кытманов А.М., Лазман М.З. Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов. – Новосибирск, «Наука». 1991, 232 с.

Рекомендуемое учебно-лабораторное оборудование

Для проведения лабораторных занятий и УСР рекомендуется следующее программное обеспечение: MS Office, пакет *Mathematica*, пакет MATLAB, Python.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Согласно Положению о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ, контроль знаний студентов по дисциплине «Компьютерная алгебра» происходит в форме текущего контроля и промежуточной аттестации. Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины.

Отметка текущего контроля по дисциплине «Компьютерная алгебра» формируется в результате регулярной и систематической проверки знаний студентов во время занятий и по итогам их самостоятельной работы. Текущий контроль знаний проходит во время устной защиты отчёта по лабораторным работам, выполняемым в учебной лаборатории и самостоятельно вне аудитории, отчётов по заданиям УСР. Задания к лабораторным и УСР составляются согласно содержанию учебного материала. Во время самостоятельной работы студент выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу.

При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, аргументация выбранных решений, последовательность и оригинальность изложения материала, оригинальность кода, корректность оформления, самостоятельность выполнения заданий. Также ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекциях, поэтому студенту при выполнении лабораторных заданий необходимо знание лекционных материалов. Для совершенствования способностей учиться самостоятельно студентам могут выдаваться темы докладов, с которыми они выступают на занятиях.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Компьютерная алгебра» учебным планом предусмотрен **экзамен**. Экзамен по дисциплине проходит в устной форме.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- отчёты по лабораторным работам с их устной защитой – 60%;
- отчёты по заданиям с их устной защитой – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) - 40% и экзаменационной отметки - 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2. Алгоритм деления полиномов. (2 часа).

Разработка алгоритма на основе теоретических результатов. Реализация алгоритма средствами Mathematica. Верификация алгоритма на тестовых задачах.

Выполнение заданий осуществляется на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – отчет по заданиям с устной защитой.

Тема 5. Примеры применения базисов Грёбнера. (4 часа).

Проблема различения центра и фокуса. Фокусные величины.

Для заданных систем автономных дифференциальных уравнений второго порядка необходимо вычислить фокусные величины. Представить необходимые условия центра в виде объединения неприводимых многообразий.

Выполнение заданий осуществляется на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – отчет по заданиям с устной защитой.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса *используются методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют со-

бой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к экзамену, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным разделам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Определение аффинного многообразия и полиномиального идеала. Базис идеала. Параметризация аффинных многообразий.
2. Задача описания идеала. Задача о принадлежности к идеалу. Задача решения полиномиальных уравнений. Задача неявного представления.
3. Алгоритм деления в кольце многочленов.
4. Полиномы от одной переменной, алгоритм Евклида.
5. Типы упорядочений мономов. Упорядочение мономов в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, лексикографическое, градуированное лексикографическое и обратное лексикографическое упорядочения. Алгоритм деления в $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$.
6. Мономиальные идеалы и лемма Диксона.
7. Теорема Гильберта о базисе.
8. Базисы Гребнера, свойства базисов Гребнера.
9. Минимальный базис Гребнера, редуцированный базис Гребнера.
10. Алгоритм Бухбергера.
11. Минимальный базис Гребнера, редуцированный базис Гребнера.
12. Усовершенствования алгоритма Бухбергера. Сизигии базисов идеала.
13. Применение базисов Гребнера к решению практических задач.
14. Теоремы об исключении и продолжении, k -й исключаящий идеал.
15. Единственность разложения на множители и результаты. Результаты и теорема о продолжении. Обобщенные результаты.
16. Проблема различения центра и фокуса. Фокусные величины. Автоматическое доказательство геометрических теорем.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название Кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ²
Численные методы	Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)
Математическое моделирование динамических процессов	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЕ НА _____ / _____ УЧЕБНЫЙ ГОД**

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № _____ от _____ 200__ г.)
(название кафедры)

Заведующая кафедрой
кандидат физ.-мат. наук, доцент _____
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

Л.Л. Голубева
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
доктор физ.-мат. наук, профессор _____
(ученая степень, ученое звание) (подпись)

С.М. Босяков
(И.О.Фамилия)