

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. А. Расолько

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Научное электронное издание

МИНСК, БГУ, 2023

ISBN 978-985-881-323-9

© Расолько Г. А., 2023

© БГУ, 2023

УДК 517.968.233 + 519.642.7

Расолько, Г. А. Спектральный метод решения некоторых сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] / Г. А. Расолько. – Минск : БГУ, 2023. – 1 электр. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-985-881-323-9.

Рассматриваются построение и реализация алгоритмов численного решения спектральными методами интегральных уравнений с логарифмической особенностью и с ядром типа Коши, возникающих при решении многих задач механики. Основная идея данных методов – использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов. Приведены листинги программ по реализации разработанных вычислительных схем в среде компьютерной алгебры MathCad.

Библиогр. : 31 назв.

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *В. Б. Малютин*;
кандидат физико-математических наук, профессор *В. В. Альсевич*

Минимальные системные требования:

PC, Pentium 4 или выше;
RAM 1 Гб; Windows XP/7/10; Adobe Acrobat.

Оригинал-макет подготовлен в программе Microsoft Office Word.

Ответственный за выпуск *Т. М. Турчиняк*.
Дизайн обложки *Т. Ю. Таран*. Технический редактор *В. П. Явуз*.
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*. Корректор *Н. А. Ракуть*.

Подписано к использованию 30.03.2023. Объем 6,2 МБ.

Белорусский государственный университет.
Управление редакционно-издательской работы.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.
Телефон: (017) 259-70-69, 259-70-70.
email: urir@bsu.by
<http://elib/bzu.by/>

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	5
Классы функций по Мусхелишвили	5
О применении многочленов Чебышева	5
О рекуррентных соотношениях Кленшоу	14
Спектральные соотношения.....	18
2. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА	21
Первый случай сингулярного интегрального уравнения с простейшим регулярым интегралом.....	21
Приближенное решение уравнения в классе $h(0)$	21
Приближенное решение уравнения в классе $h(-1, 1)$	25
Второй случай сингулярного интегрального уравнения с усложненным интегралом	30
Приближенное решение уравнения в классе $h(0)$	30
Приближенное решение уравнения в классе $h(-1, 1)$	36
3. СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА	42
Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(0)$	42
Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1, 1)$	46
Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(1)$	54
Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1)$	59
4. СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО РОДА	66
5. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФРАКЦИИ	71
Первый случай $M(x, t) \equiv 1$	71
Приближенное решение задачи (5.1), (5.2).....	72
Второй случай $M(x, t) \in H$	87
Приближенное решение задачи (5.30), (5.31).....	88
6. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ	96
7. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ	118
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многих задач по теории аналитических функций, гидродинамике, теории упругости, фильтрации, теплопроводности и ряду других разделов механики, физики и математической физики связано с сингулярными интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями с интегралами, рассматриваемыми как главное значение по Коши. Например, в монографии [14] при исследовании широкого класса электродинамических структур последовательно применен аппарат сингулярных интегральных уравнений, удобный для реализации на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ), приведены результаты, касающиеся численного решения таких уравнений методом механических квадратур. На основе таких подходов созданы вычислительные алгоритмы.

Характерной особенностью численного решения интегральных уравнений является их дискретизация, т. е. получение тем или иным способом системы линейных алгебраических уравнений. Однако необходимость численного решения систем алгебраических уравнений заставляет рационально подходить к выбору вычислительных алгоритмов. Если требуется получить решение с высокой степенью точности, то целесообразно разыскивать его в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например многочленов Чебышева [1, с. 187].

Данная монография написана по результатам исследований автора и посвящена разработке приближенных методов решения задач из книг [14; 16; 17; 22; 25] методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Вначале изложены основы математического аппарата, применяемого при построении вычислительных схем, затем даны вычислительные схемы интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью и с ядром типа Коши, возникающих при решении многих задач механики. Приведены описания и листинги функций по реализации разработанных вычислительных схем в среде компьютерной алгебры MathCad. Проведены расчеты на модельных примерах, которые показывают, что уже при сравнительно небольших значениях размеров системы линейных алгебраических уравнений достигается достаточно высокая точность вычисления приближенного решения. Основные результаты опубликованы в изданиях [18–21; 24].

Автор выражает глубокую признательность В. М. Волкову и С. М. Шешко за помощь в реализации некоторых задач.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Приведем некоторые известные сведения, которыми будем пользоваться в монографии.

Классы функций по Мусхелишвили

Известно, что решение сингулярных уравнений зависит от класса функций, в котором оно разыскивается [13].

Напомним о классе функций $h(0)$ по Мусхелишвили – это класс функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [13, с. 32].

Мы говорим, что функция $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$ $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Функция $\psi(x) \in h(-1)$, если на отрезке $[-1, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = 1$ допускает интегрируемую особенность.

Функция $\psi(x) \in h(1)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, она удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки $x = -1$ допускает интегрируемую особенность.

Класс функций $h(-1, 1)$ – класс ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$ функций.

О применении многочленов Чебышева

Имеют место (см., например, [15]) свойства ортогональности многочленов Чебышева:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t) T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 1/2, & j = p \neq 0, \\ 1, & j = p = 0, \end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_j(t) U_p(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 1, & j = p. \end{cases} \quad (1.1)$$

При построении вычислительных схем использован интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода, указанный в [15, с. 104]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(x), \quad (1.2)$$

$$f_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.3)$$

Здесь $\sum_{j=0}^n a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Будем далее говорить, что (1.2) – это разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева первого рода.

Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.3) (файл «fjT.xmcd»)

Функция *fjT*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $f_j, j = \overline{0, n}$, по формуле (1.3).

Прототип: *fjT(ff, n)*.

Параметры:

n – степень многочлена $f_n(x)$;

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $f_j, j = \overline{0, n}$.

```
fjT(ff, n) :=
| for k ∈ 0..n
|   tk ← cos( (2·k + 1) / (2·n + 2) · π )
| F0 ← 1 / (n + 1) · ∑_{k=0}^n ff(tk)
| for j ∈ 1..n
|   Fj ← 2 / (n + 1) · ∑_{k=0}^n (ff(tk) · Tcheb(j, tk))
| F
```

Чтобы получить разложение функции $f(x)$ по многочленам Чебышева второго рода, применим в (1.2) тождества [15, с. 23]:

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2,$$

и получим следующее:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (1.4)$$

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n, \quad (1.5)$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.5)
(файл «fjU.xmcd»)**

Функция *fjU*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $f_j, j = \overline{0, n}$, по формуле (1.5).

Прототип: *fjU(ff, n)*.

Параметры:

n – степень многочлена $f_n(x)$;

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $f_j, j = \overline{0, n}$.

```
fjU(ff, n) :=
  for k ∈ 1..n + 1
    tk ← cos( (2·k - 1) / (2·n + 2) · π )
  for j ∈ 0..n
    Gj ← 1 / (n + 1) · ∑_{k=1}^{n+1} (ff(tk) · Tcheb(j, tk))
  for j ∈ 0..n - 2
    fj ← Gj - Gj+2
  fn-1 ← Gn-1
  fn ← Gn
  f
```

Для получения интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева первого и второго рода используем (1.4) и (1.2), в результате чего имеем

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} T_j(t), \quad (1.6)$$

$$k_{m,j} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} K(x_l, x_r) (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \right], \quad (1.7)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{1, n+1},$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0. \end{cases}$$

Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.7) (файл «KmjUT.xmcd»)

Функция *KmjUT*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $k_{mj}, m = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}$, по формуле (1.7).

Прототип: *KmjUT*(*fk, n*).

Параметры:

n – степень многочлена $K_{nn}(x, t)$;

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$.

Возвращаемое значение: значение вычисленных по формуле (1.7) коэффициентов $k_{mj}, m = \overline{0, n}, j = \overline{0, n}$.

<pre style="margin: 0;">KmjUT(fk, n) :=</pre>	<pre style="margin: 0;">for k ∈ 0..n x_k ← cos((2·k + 1) / (2·n + 2) · π)</pre>
---	---


```

for m ∈ 0..n + 2
  for k ∈ 0..n
    Tm,k ← Tcheb(m, xk)
  for m ∈ 0..n
    σm ← if(m = n ∨ m = n - 1, 0, 1)
    for j ∈ 0..n
      θj ← if(j = 0, 1, 2)
      S ← 0
      for r ∈ 0..n
        s ← 0
        for l ∈ 0..n
          s ← s + fk(xl, xr) · (Tm,l - σm · Tm+2,l)
        S ← Tj,r · s + S
      Kzm,j ←  $\frac{S \cdot \theta_j}{(n + 1)^2}$ 
Kz

```

На основании предыдущих результатов получим интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ следующего вида:

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) k_{m,j}, \quad (1.8)$$

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \sigma_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad \sigma_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.9)$$

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.9)
(файл «KmjTU.xmcd»)**

Функция *KmjTU*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $k_{m,j}$, $m = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$, по формуле (1.9).

Прототип: *KmjTU*(*fk*, *n*).

Параметры:

n – степень многочлена $K_{nn}(x, t)$;

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$.

Возвращаемое значение: значение вычисленных по формуле (1.9) коэффициентов k_{mj} , $m = 0, n$, $j = 0, n$.

```

KmjTU(fk , n) :=
  for k ∈ 0..n
    xk ← cos( (2·k + 1) / (2·n + 2) · π )
    for m ∈ 0..n + 2
      for k ∈ 0..n
        Tm,k ← Tcheb(m , xk)
      for m ∈ 0..n
        for j ∈ 0..n
          θj ← if(j = n ∨ j = n - 1, 0, 1)
          S ← 0
          for r ∈ 0..n
            s ← 0
            for l ∈ 0..n
              s ← s + fk(xl, xr) · Tm,l
            S ← (Tj,r - θj · Tj+2,r) · s + S
          a ← if(m = 0, 1, 2)
          Kzm,j ← (S · a) / (n + 1)2
  Kz

```

Для получения интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода используем (1.2), в результате чего имеем

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{m,j}^*, \quad (1.10)$$

$$k_{m,j}^* = \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) T_j(x_r),$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.11)$$

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.11)
(файл «KmjTT.xmcd»)**

Функция *KmjTT*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов k_{mj}^* , $m = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$, по формуле (1.11).

Прототип: *KmjTT*(*fk*, *n*).

Параметры:

n – степень многочлена $K_{nn}(x, t)$;

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$.

Возвращаемое значение: значение вычисленных по формуле (1.11) коэффициентов k_{mj}^* , $m = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$.

```

KmjTT(fk, n) :=
  for k ∈ 0..n
    xk ← cos( (2·k + 1) / (2·n + 2) · π )
    for m ∈ 0..n
      for k ∈ 0..n
        Tm,k ← Tcheb(m, xk)
      for m ∈ 0..n
        δm ← if(m = 0, 1, 2)
        for j ∈ 0..n
          δj ← if(j = 0, 1, 2)
          S ← 0
          for r ∈ 0..n
            s ← 0
            for l ∈ 0..n

```

			$s \leftarrow s + \text{fk}(x_l, x_r) \cdot T_{m,1}$
			$S \leftarrow T_{j,r} \cdot s + S$
			$K_{zm,j} \leftarrow \frac{S \cdot \delta_j \cdot \delta_m}{(n+1)^2}$
K_z			

Для получения интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода применим аналогичный подход и получим

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t), \quad (1.12)$$

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = \overline{n-1, n}, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = \overline{n-1, n}, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.13)$$

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.13)
(файл «KmjUU.xmcd»)**

Функция *KmjUU*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов k_{mj} , $m = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$, по формуле (1.13).

Прототип: *KmjUU*(*fk*, *n*).

Параметры:

n – степень многочлена $K_{nn}(x, t)$;

fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$.

Возвращаемое значение: значение вычисленных по формуле (1.13) коэффициентов k_{mj} , $m = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$.

```

KmjUU(fk, n) :=
  for k ∈ 1..n + 1
    xk ← cos( (2·k - 1) / (2·n + 2) · π )
    for m ∈ 0..n + 2
      for k ∈ 1..n + 1
        Tm,k ← Tcheb(m, xk)
    for m ∈ 0..n
      σm ← if(m = n ∨ m = n - 1, 0, 1)
      for j ∈ 0..n
        θj ← if(j = n ∨ j = n - 1, 0, 1)
        S ← 0
        for r ∈ 1..n + 1
          s ← 0
          for l ∈ 1..n + 1
            s ← s + fk(xl, xr) · (Tm,l - σm · Tm+2,l)
          S ← (Tj,r - θj · Tj+2,r) · s + S
        Kzm,j ← S / (n + 1)2
  Kz

```

Для указанных интерполяционных многочленов имеют место следующие утверждения (см., например, [23, с. 318, 321, 391]).

Утверждение 1.1. Если в качестве узлов интерполирования берутся нули многочлена Чебышева первого рода, т. е. точки $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k = 0, 1, \dots, n$, то для констант Лебега λ_n имеет место оценка $\lambda_n = O(\ln n)$, $n = 2, 3, \dots$

Утверждение 1.2. Если функция $f(x) \in H(\alpha)$ на сегменте $[a, b]$, то для многочлена наилучшего приближения $E_n(f)$ имеет место оценка

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}).$$

Утверждение 1.3. Если функция непрерывно дифференцируема p раз на сегменте $[-1, 1]$, причем $f^{(p)}(x) \in H(\alpha)$, то для интерполяционных многочленов (1.2) и (1.4), построенных по узлам Чебышева первого рода, имеет место оценка

$$|f(x) - f_n(x)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{p+\alpha}}\right).$$

О рекуррентных соотношениях Кленшоу

Имеется простой способ вычисления выражений вида

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x),$$

без вычисления значений функции $T_i(x)$. Такой способ был предложен Кленшоу в 1955 г., а его реализация описана, например, в [5; 12]. Приведем некоторые алгоритмы.

1. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x). \quad (1.14)$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Подстановка в формулу (1.14) выражения для a_k дает

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2}) T_k(x) + (b_{n-1} - 2xb_n) T_{n-1}(x) + b_n T_n(x).$$

Имеют место формулы [28]:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, n = 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

В силу формулы (1.15) все коэффициенты при b_k равны нулю, за исключением b_0 и b_1 .

Таким образом,

$$f(x) = (b_0 - 2xb_1)T_0(x) + b_1T_1(x),$$

или окончательно

$$f(x) = b_0 - xb_1.$$

По аналогии с данным алгоритмом, используя формулы [28]:

$$2T_n(x)T_m(x) = T_{m-n}(x) + T_{m+n}(x),$$

$$2T_n(x)U_m(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x),$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

можно получить следующие схемы.

2. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2(2x^2 - 1)b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Тогда

$$f(x) = b_0T_0(x) + b_1T_2(x) - 2(2x^2 - 1)b_1T_0(x),$$

или

$$f(x) = b_0 - (2x^2 - 1)b_1.$$

3. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2(2x^2 - 1)b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Тогда

$$f(x) = b_0T_1(x) + b_1T_3(x) - 2(2x^2 - 1)b_1T_1(x),$$

или

$$f(x) = x(b_0 - b_1).$$

4. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k U_k(x). \quad (1.16)$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k - 2xb_{k+1} + b_{k+2} = a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Тогда

$$f(x) = (b_0 - 2xb_1)U_0(x) + b_1U_1(x),$$

или окончательно

$$f(x) = b_0.$$

5. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_k U_{2k}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2(2x^2 - 1)b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Тогда

$$f(x) = b_0U_0(x) + b_1U_2(x) - 2(2x^2 - 1)b_1U_0(x),$$

или

$$f(x) = b_0 + b_1.$$

6. Пусть необходимо вычислить

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k U_{2k+1}(x).$$

С помощью рекуррентного соотношения

$$b_k = 2(2x^2 - 1)b_{k+1} - b_{k+2} + a_k$$

и начальных значений $b_{n+1} = b_{n+2} = 0$ вычисляются константы b_n, b_{n-1}, \dots, b_0 .

Тогда

$$f(x) = b_0U_1(x) + b_1U_3(x) - 2(2x^2 - 1)b_1U_1(x),$$

или

$$f(x) = 2xb_0.$$

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.14)
(файл «TClenchaw.xmcd»)**

Функция *TClenchaw*.

Назначение: вычисляет значение функции $u_n(x)$ по формуле (1.14).

Прототип: *TClenchaw*(n, a, x).

Параметры:

n – степень многочлена u_n ;

a – коэффициенты многочлена $a_k, k = \overline{0, n}$;

x – значение внешней точки x .

Возвращаемое значение: значение функции $u_n(x)$ по формуле (1.14).

$TClenchaw(a, x) :=$	<pre> na ← length(a) b_{na+2} ← 0 b_{na+1} ← 0 for k ∈ na – 1 .. 0 b_k ← a_k + 2·x·b_{k+1} – b_{k+2} y ← b₀ – x·b₁ y </pre>
----------------------	---

**Описание и листинг функции, реализующей формулу (1.16)
(файл «UClenchaw.xmcd»)**

Функция *UClenchaw*.

Назначение: вычисляет значение функции $u_n(x)$ по формуле (1.16).

Прототип: *UClenchaw*(n, a, x).

Параметры:

n – степень многочлена u_n ;

a – коэффициенты многочлена $a_k, k = \overline{0, n}$;

x – значение внешней точки.

Возвращаемое значение: значение функции $u_n(x)$ по формуле (1.16).

$UClenchaw(a, x) :=$	<pre> na ← length(a) b_{na+2} ← 0 b_{na+1} ← 0 </pre>
----------------------	---

for $k \in na - 1..0$ $b_k \leftarrow a_k + 2 \cdot x \cdot b_{k+1} - b_{k+2}$ $y \leftarrow b_0$ y
--

Спектральные соотношения

В данной работе использованы известные спектральные соотношения для сингулярного интеграла [2, с. 188]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.17)$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Имеют место спектральные соотношения для слабо сингулярного интеграла (см., например, [14, с. 45]):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \alpha_k T_k(x),$$

$$\alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -\frac{1}{k}, \quad k > 0. \quad (1.18)$$

Приведем и докажем и другие спектральные соотношения для слабо сингулярного интеграла.

Утверждение 1.4. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k = 0, \\ -\frac{1}{2k} T_k(x) + \frac{1}{2k+4} T_{k+2}(x), & k \geq 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Доказательство. С учетом соотношения [15]

$$2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$$

подынтегральная функция в (1.19) сводится к виду (1.18), откуда следует истинность утверждения.

Утверждение 1.5. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) + \frac{1}{8} U_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x), & k=1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x), & k=2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \\ + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases} \quad (1.20)$$

Доказательство. С учетом соотношений

$$2 T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x), \quad k \geq 1, \quad U_{-1}(x) = 0, \quad T_0 = U_0,$$

левая часть (1.20) сводится к вычислению интегралов вида (1.19), откуда следует истинность утверждения.

Утверждение 1.6. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) + T_1(x), & k=0, \\ \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k=1, \\ \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{T_k(x)}{k} + \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Доказательство. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1-t}$ и учтем соотношение [15] $x T_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$.

В результате подынтегральная функция в (1.21) сводится к виду (1.18), откуда следует истинность утверждения.

Утверждение 1.7. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 L_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \\
 &= \begin{cases} -\ln 2T_0(x) - T_1(x), & k=0, \\ -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) - \frac{1}{4} T_2(x), & k=1, \\ \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{T_k(x)}{k} - \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (1.22)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1+t}$ и учтем соотношение $x T_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$. В результате подынтегральная функция в (1.22) сводится к виду (1.18), откуда следует истинность утверждения.

Утверждение 1.8. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 J_k(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \\
 &= \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ \frac{k-1}{2} U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2} U_k(x), & k \geq 1. \end{cases} \quad (1.23)
 \end{aligned}$$

Доказательство. При $k=0$ формула (1.23) очевидно верна на основании (1.17) и того факта, что $U_{-1}(x) = 0$.

Пусть $k \geq 1$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение [15]:

$$x T_k(x) = (1-x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x).$$

Тогда

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{dt}{t-x}.$$

Применим (1.17), учтем соотношение $2 T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$ и получим

$$J_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x).$$

Утверждение доказано.

2. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОСТЕЙШИМ РЕГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

В приложениях (см., например, [14, с. 50]) рассматривается метод механических квадратур применительно к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2.1)$$

Здесь $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H ; $\varphi(x)$ – искомая функция класса H .

Рассмотрим приближенное решение данного уравнения методом ортогональных многочленов (см., например, [26]).

Приближенное решение уравнения в классе $h(0)$

Пусть решение уравнения (2.1) разыскивается в классе $\varphi(x) \in h(0)$ и поставлено условие, обеспечивающее единственность решения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt = B. \quad (2.2)$$

В данном классе неизвестная функция имеет вид $\varphi(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

и является решением следующего уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(x, t) dt = f(x), \quad |x| < 1, \quad (2.3)$$

для которого выполняются условия единственности:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.4)$$

Приближенное решение задачи (2.1), (2.2) будем искать как точное решение задачи, полученной на основании (2.3), (2.4):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x, t) dt = f_n(x), \quad |x| < 1, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.6)$$

при

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k T_k(x), \quad (2.7)$$

где $a_k, k = \overline{0, n+1}$, – числа, подлежащие определению.

Используем (2.7), спектральные соотношения (1.17) и для функции $K(x, t)$ интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ вида (1.6) с учетом (1.7):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} T_j(t),$$

$$k_{m,j} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} K(x_l, x_r) (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \right],$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{1, n+1},$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \quad \vartheta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0. \end{cases}$$

Для функции $f(x)$ применим интерполяционный многочлен $f_n(x)$ вида (1.4):

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x),$$

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2},$$

$$f_{n-1} = G_{n-1},$$

$$f_n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Учитывая свойства ортогональности многочленов Чебышева (1.1), из (2.5) и (2.6) получим

$$\sum_{p=0}^{n+1} a_p U_{p-1}(x) + \sum_{p=0}^n U_p(x) \sum_{k=0}^{n+1} a_k \left\{ \sum_{l=0}^n k_{p,l}^* \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t) T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right\} =$$

$$= \sum_{p=0}^n f_p U_p(x), \quad (2.8)$$

$$\sum_{p=0}^{n+1} a_p \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.9)$$

Вычисляя явно интегралы в (2.8), (2.9) и приравнявая коэффициенты при многочленах $U_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных $a_p, p = \overline{0, n+1}$:

$$\begin{cases} a_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k \rho_{p,k} = f_p, & p = \overline{0, n}, \\ a_0 = B, \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\rho_{p,k} = \begin{cases} 0,5 k_{p,0}, & k = 0, \\ 0,25 k_{p,k}, & 0 < k \leq n, \\ 0, & k = n+1. \end{cases}$$

Окончательно приближенное решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{n+1} a_k T_k(x). \quad (2.11)$$

Описание и листинг функции по решению системы (2.10) (файл «Syst_2_10.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $a_k, k = \overline{0, n}$, из системы (2.10).

Прототип: *Syst(FK, FF, B, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

FK – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

B – заданная константа.

Используемые модули: $KmjUT, fjU$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $a_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (2.10).

$Syst(FK, FF, B, n) :=$	<pre>Fk ← KmjUT(FK, n) g ← fjU(FF, n) for p ∈ 0..n fp ← gp fn+1 ← B FFρ(p, k) ← $\begin{cases} 0.5 \cdot Fk_{p,0} & \text{if } k = 0 \\ 0.25 \cdot Fk_{p,k} & \text{if } 0 < k \leq n \\ 0 & \text{if } k = n + 1 \end{cases}$ for p ∈ 0..n for k ∈ 0..n + 1 Fρp, k ← FFρ(p, k) for p ∈ 0..n for k ∈ 0..n + 1 $\begin{cases} a_{p,k} \leftarrow F\rho_{p,k} \\ a_{p,k} \leftarrow a_{p,k+1} & \text{if } k = p + 1 \end{cases}$ an+1, 0 ← 1 e ← lsolve(a, f) e</pre>
-------------------------	---

Результаты численных экспериментов

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнений (2.1), (2.2) при

$$f(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+1}, \quad K(x,t) = \frac{1}{x^2+t^2+1}, \quad B = 0.$$

Несложно показать, что решением данной задачи является функция

$$\varphi(x) = \frac{1+i}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{x^2+1}.$$

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Examp1_2_10_NotOgr.xmcd»)**

$$F_k(x, t) := \frac{1}{x^2 + t^2 + 1} \quad FF(x) := \frac{(1+i)}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad B := 0$$

$$\varphi(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{(1+i)}{1+x^2}$$

$$\varphi_n(x, a, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \sum_{k=0}^{n+1} (a_k \cdot \text{Tcheb}(k, x)) \\ \frac{s}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right.$$

$a := \text{Syst}(F_k, FF, B, N)$

$x := -0.99, -0.98 \dots 0.99 \quad N \equiv 39$

Решая систему (2.10) в среде компьютерной алгебры MathCad при $n = 19, 29, 39$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (2.11), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ соответственно на $4,4 \cdot 10^{-8}, 6,5 \cdot 10^{-12}, 6,8 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы в последнем случае не превосходит 83, т. е. порядка $O(n)$.

Приближенное решение уравнения в классе $h(-1, 1)$

Пусть решение уравнения (2.1)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

разыскивается в классе $\varphi(x) \in h(-1, 1)$ и выполняется необходимое и достаточное условие его разрешимости:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt dx.$$

В данном классе неизвестная функция имеет вид $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x)$ и является решением уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v(t) K(x, t) dt = f(x), \quad |x| < 1, \quad (2.12)$$

для которого выполняются условия разрешимости:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v(t) K(x, t) dt - f(x) \right) dx = 0.$$

На основании (2.12) приближенное решение уравнения будем искать как точное решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_{n-1}(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ = f_n(x) + \sigma, \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

в котором константа σ определяется из условия разрешимости уравнения:

$$\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_{n-1}(t) K_{n,n}(x, t) dt - f_n(x) \right) dx.$$

Положим далее

$$v_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k(x), \quad (2.14)$$

где $a_k, k = \overline{0, n-1}$, – числа, подлежащие определению.

Используем далее (2.14) и (1.17), интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ для функций $K(x, t)$ вида (1.8):

$$\begin{aligned} K_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) k_{m,j}, \\ k_{m,j} &= \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \sigma_j T_{j+2}(x_r)), \end{aligned}$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad \sigma_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Для функций $f(x)$ выберем интерполяционный многочлен $f_n(x)$ вида (1.2):

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(x),$$

$$f_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Подставим все вышеуказанное в (2.13). С учетом свойств ортогональности многочленов Чебышева (1.1) получим

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^n a_{p-1} T_p(x) + \sum_{p=0}^n T_p(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=0}^n k_{p,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_j(t) U_k(t) dt \right) = \\ = \sum_{p=0}^n f_p T_p(x) + \sigma T_0(x). \end{aligned}$$

Вычисляя явно интегралы в последнем выражении, имеем

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^n a_{p-1} T_p(x) + \sum_{p=0}^n T_p(x) \sum_{k=0}^{n-1} a_k k_{p,k} = \\ = \sum_{p=0}^n f_p T_p(x) + \sigma T_0(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Приравнявая в (2.15) коэффициенты при $T_p(x)$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных $a_k, k = \overline{0, n-1}$:

$$-a_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k k_{p,k} = f_p, \quad p = \overline{1, n}. \quad (2.16)$$

Описание и листинг функции по решению системы (2.16) (файл «Syst_2_16.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $a_k, k = \overline{0, n-1}$, из системы (2.16).

Прототип: *Syst(FK, FF, n)*.

Параметры: n – порядок системы; FK – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$; FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.**Используемые модули:** $KmjTU, fjU$.**Возвращаемое значение:** значение коэффициентов $a_k, k = \overline{0, n-1}$, как решение системы (2.16).

```

Syst(FK, FF, n) :=
  Fk ← KmjTU(FK, n)
  for p ∈ 1..n
    for k ∈ 0..n - 1
      | ap-1, k ← Fkp, k
      | ap-1, k ← ap-1, k-1 if k = p - 1
  g ← fjT(FF, n)
  for k ∈ 1..n
    fk-1 ← gk
  e ← lsolve(a, f)
  e

```

Решая систему линейных алгебраических уравнений (2.16), получим приближенное решение данного уравнения (2.1) в классе $\varphi(x) \in h(-1, 1)$:

$$\varphi_{n-1}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k(x). \quad (2.17)$$

Результаты численных экспериментов

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (2.1) при

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1} - 1 \right) (1+i), \quad K(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2 + 1}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (2.1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{x}{x^2 + 1} (1+i).$$

Решая систему (2.16) в среде компьютерной алгебры MathCad при $n = 20, 30, 40$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (2.17), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ соответственно на $1,8 \cdot 10^{-8}, 2,7 \cdot 10^{-12}, 2,6 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы в последнем случае не превосходит 82, т. е. порядка $O(n)$.

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Exampl_2_16_Ogr.xmcd»)**

$$Fk(x,t) := \frac{x}{x^2 + t^2 + 1}$$

$$FF(x) := (1 + i) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1} - 1 \right)$$

$$\varphi(x) := x \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1 + i}{x^2 + 1}$$

$$\varphi_n(x, a, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \cdot Ucheb(k, x)) \\ s \cdot \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right.$$

$a := \text{Syst}(Fk, FF, N) \quad N \equiv 39$

$x := -0.99, -0.98.. 0.99$

$|\varphi_n(x, a, N) - \varphi(x)|$

Обоснование вычислительных схем проводится по аналогии с [26, с. 108] (случай сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами). Там же приведены оценки порядков погрешностей построенных приближенных решений.

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОЖНЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

В приложениях (см. [22, с. 42]) рассматривается сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\varphi(t) K(x, t) + \overline{\varphi(t)} L(x, t) \right) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2.18)$$

Здесь $K(x, t)$, $L(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гельдера H ; $\varphi(x)$ – искомая функция класса H .

К интегральному уравнению (2.18) сводятся многие задачи теории трещин.

Приближенное решение уравнения в классе $h(0)$

Пусть решение уравнения (2.18) разыскивается в классе $\varphi(x) \in h(0)$ и поставлено условие, обеспечивающее единственность решения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) dt = B. \quad (2.19)$$

Перейдем к новой неизвестной функции

$$\varphi(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

являющейся решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(x, t) + \frac{\overline{v(t)}}{\sqrt{1-t^2}} L(x, t) \right) dt = \\ = f(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

для которого выполняются условия единственности:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.21)$$

Приближенное решение задачи (2.18), (2.19) будем искать как точное решение задачи, полученной на основании (2.20), (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x, t) + \frac{\overline{v_{n+1}(t)}}{\sqrt{1-t^2}} L_{n,n}(x, t) \right) dt = \\ = f_n(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.23)$$

Положим далее

$$v_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k T_k(x), \quad (2.24)$$

$a_k = c_k + i d_k$, $k = \overline{0, n+1}$, – числа, подлежащие определению.

Используем (2.24), (1.17) и интерполяционные многочлены $K_{n,n}(x, t)$, $L_{n,n}(x, t)$ для функций $K(x, t)$, $L(x, t)$ вида (1.6):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} T_j(t),$$

$$k_{m,j} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} K(x_l, x_r) (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \right],$$

$$L_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n l_{m,j} T_j(t),$$

$$l_{m,j} = \frac{\vartheta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} L(x_l, x_r) (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \right],$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{1, n+1},$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$\vartheta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0. \end{cases}$$

Учитывая свойства ортогональности многочленов Чебышева (1.1), из (2.22) и (2.23) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{n+1} a_p U_{p-1}(x) + \sum_{p=0}^n U_p(x) \sum_{k=0}^{n+1} a_k \left\{ \sum_{l=0}^n k_{p,l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t) T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right\} + \\ & + \sum_{p=0}^n U_p(x) \sum_{k=0}^{n+1} a_k \left\{ \sum_{l=0}^n l_{p,l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t) T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right\} = \sum_{p=0}^n f_p U_p(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\sum_{p=0}^{n+1} a_p \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = B. \quad (2.26)$$

Вычисляя явно интегралы в (2.25), (2.26) и приравнивая коэффициенты при многочленах $U_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных a_p , $p = 0, 1, \dots, n+1$:

$$\begin{cases} a_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k \rho_{p,k} + \sum_{k=0}^{n+1} a_k \eta_{p,k} = f_p, & p = \overline{0, n}, \\ a_0 = B, \end{cases} \quad (2.27)$$

где

$$\rho_{p,k} = \begin{cases} 0,5k_{p,0}, & k = 0, \\ 0,25k_{p,k}, & 0 < k \leq n, \\ 0, & k = n+1, \end{cases}$$

$$\eta_{p,k} = \begin{cases} 0,5l_{p,0}, & k = 0, \\ 0,25l_{p,k}, & 0 < k \leq n, \\ 0, & k = n+1. \end{cases}$$

Учитывая, что $a_k = c_k + id_k$, $k = 0, 1, \dots, n+1$, перепишем систему (2.27) относительно неизвестных c_k , d_k :

$$\begin{aligned} & c_{p+1} + id_{p+1} + \\ & + \sum_{k=0}^{n+1} \left((c_k + id_k) (\operatorname{Re}(\rho_{p,k}) + i \operatorname{Im}(\rho_{p,k})) + (c_k - id_k) (\operatorname{Re}(\eta_{p,k}) + i \operatorname{Im}(\eta_{p,k})) \right) = \\ & = \operatorname{Re}(f_p) + i \operatorname{Im}(f_p), \quad p = \overline{0, n}, \\ & c_0 + id_0 = \operatorname{Re}(B) + i \operatorname{Im}(B). \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \left(c_k (\operatorname{Re}(\rho_{p,k}) + \operatorname{Re}(\eta_{p,k})) + d_k (\operatorname{Im}(\eta_{p,k}) - \operatorname{Im}(\rho_{p,k})) \right) &= \operatorname{Re}(f_p), \\ d_{p+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \left(c_k (\operatorname{Im}(\rho_{p,k}) + \operatorname{Im}(\eta_{p,k})) + d_k (\operatorname{Re}(\rho_{p,k}) - \operatorname{Re}(\eta_{p,k})) \right) &= \operatorname{Im}(f_p), \\ p = \overline{0, n}, \quad c_0 &= \operatorname{Re}(B), \quad d_0 = \operatorname{Im}(B). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Окончательно приближенное решение задачи (2.20), (2.21) имеет вид

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{n+1} (c_k + id_k) T_k(x). \quad (2.29)$$

**Описание и листинг функции по решению системы (2.28)
(файл «Syst_2_28.xmcd»)**

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (2.28).

Прототип: *Syst(FK, FL, FF, B, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

FK – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FL – имя модуля, вычисляющего значение функции $L(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

B – заданная константа.

Используемые модули: *KmjUT, fjU*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (2.28).

```

Syst(FK,FL,FF,B,n) :=
  Fk ← KmjUT(FK,n)
  Fl ← KmjUT(FL,n)
  g ← fjU(FF,n)
  for p ∈ 0..n
    | fp ← Re(gp)
    | fp+n+1 ← Im(gp)
  f2n+2 ← Re(B)
  f2n+3 ← Im(B)
  FFρ(p,k) ←
    | 0.5 · Fkp,0 if k = 0
    | 0.25 · Fkp,k if 0 < k ≤ n
    | 0 if k = n + 1
  FFη(p,k) ←
    | 0.5 · Flp,0 if k = 0
    | 0.25 · Flp,k if 0 < k ≤ n
    | 0 if k = n + 1

```

```

for p ∈ 0..n
  for k ∈ 0..n + 1
    | Fρp,k ← FFρ(p,k)
    | Fηp,k ← FFη(p,k)
for p ∈ 0..n
  for k ∈ 0..n + 1
    | ap,k ← Re(Fρp,k) + Re(Fηp,k)
    | ap,k ← ap,k + 1 if k = p + 1
    | ap,k+n+2 ← Im(Fηp,k) - Im(Fρp,k)
    | ap+n+1,k ← Im(Fρp,k) + Im(Fηp,k)
    | ap+n+1,k+n+2 ← Re(Fρp,k) - Re(Fηp,k)
    | ap+n+1,k+n+2 ← ap+n+1,k+n+2 + 1 if k = p + 1
a2·n+2,0 ← 1
a2·n+3,n+2 ← 1
e ← lsolve(a, f)
for k ∈ 0..n + 1
  | ck ← ek
  | dk ← ek+n+2
(c)
(d)

```

Результаты численных экспериментов

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (2.18), (2.19) при

$$f(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+1}, \quad K(x, t) = \frac{1}{x^2+t^2+1},$$

$$L(x, t) = \frac{x^3 t^2}{x^2+1} \frac{1+i}{t^2+1}, \quad B = 0.$$

Несложно показать, что решением задачи (2.18), (2.19) в данном случае является функция $\varphi(x) = \frac{1+i}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{x^2+1}$.

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Examp1_2_28_NotOgr.xmcd»)**

$$Fk(x,t) := \frac{1}{x^2 + t^2 + 1}$$

$$Fl(x,t) := \frac{x^3 t \cdot t}{x^2 + 1} \cdot \frac{1 + i}{1 + t^2}$$

$$FF(x) := \frac{(1 + i)}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

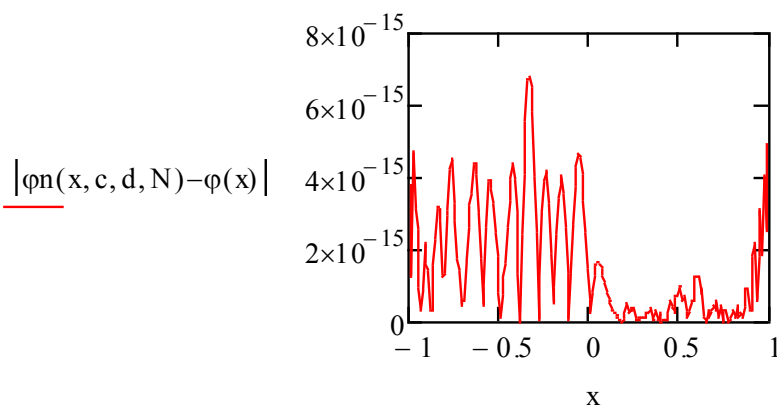
$$B := 0$$

$$\varphi(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{(1 + i)}{1 + x^2}$$

$$\varphi_n(x, c, d, n) := \frac{s \left[\sum_{k=0}^{n+1} [(c_k + i \cdot d_k) \cdot \text{Tcheb}(k, x)] \right]}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \text{Syst}(Fk, Fl, FF, B, N)$$

$$x := -0.99, -0.98, \dots, 0.99 \quad N \equiv 39$$



Решая систему (2.28) в среде компьютерной алгебры MathCad при $n = 19, 29, 39$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (2.29), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ соответственно на $4,4 \cdot 10^{-8}, 6,5 \cdot 10^{-12}, 6,8 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы в последнем случае не превосходит 83, т. е. порядка $O(n)$.

Приближенное решение уравнения в классе $h(-1, 1)$

Пусть решение уравнения (2.18)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\varphi(t)K(x, t) + \overline{\varphi(t)}L(x, t) \right) dt = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

разыскивается в классе $\varphi(x) \in h(-1, 1)$ и выполняется необходимое и достаточное условие его разрешимости:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\varphi(t)K(x, t) + \overline{\varphi(t)}L(x, t) \right) dt dx. \quad (2.30)$$

Перейдем к новой неизвестной функции $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}v(x)$, являющейся решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}v(t) \frac{dt}{t-x} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}v(t)K(x, t) + \sqrt{1-t^2}\overline{v(t)}L(x, t) \right) dt = f(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (2.31)$$

для которого с учетом (2.30) выполняются условия разрешимости:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}v(t)K(x, t) + \sqrt{1-t^2}\overline{v(t)}L(x, t) \right) dt - f(x) \right) dx = 0.$$

Приближенное решение уравнения (2.31) будем искать как точное решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}v_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}v_{n-1}(t)K_{n,n}(x, t) + \sqrt{1-t^2}\overline{v_{n-1}(t)}L_{n,n}(x, t) \right) dt = f_n(x) + \sigma, \quad |x| < 1, \end{aligned}$$

в котором константа σ определяется из условия разрешимости данного уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Psi(x) dx, \\ \Psi(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2}v_{n-1}(t)K_{n,n}(x, t) + \sqrt{1-t^2}\overline{v_{n-1}(t)}L_{n,n}(x, t) \right) dt - f_n(x). \end{aligned}$$

Положим

$$v_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k(x), \quad (2.32)$$

где $a_k = c_k + i d_k$, $k = \overline{0, n-1}$, – числа, подлежащие определению,

Используем спектральные соотношения (1.17), (2.32) и интерполяционные многочлены $K_{n,n}(x, t)$, $L_{n,n}(x, t)$ для функций $K(x, t)$, $L(x, t)$ вида (1.8):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) k_{m,j},$$

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \sigma_j T_{j+2}(x_r))$$

$$L_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) l_{m,j},$$

$$l_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n L(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \sigma_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Учитывая свойства ортогональности многочленов Чебышева (1.1), имеем

$$\begin{aligned} & -\sum_{p=1}^n a_{p-1} T_p(x) + \sum_{p=0}^n T_p(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=0}^n k_{p,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_j(t) U_k(t) dt + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=0}^n l_{p,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_j(t) U_k(t) dt \right) = \\ & = \sum_{p=0}^n f_p T_p(x) + \sigma T_0(x). \end{aligned}$$

Вычисляя явно интегралы в последнем выражении, получим

$$\begin{aligned} -\sum_{p=1}^n a_{p-1} T_p(x) + \sum_{p=0}^n T_p(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k k_{p,k} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} l_{p,k} \right) = \\ = \sum_{p=0}^n f_p T_p(x) + \sigma T_0(x). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Приравнявая в (2.33) коэффициенты при $T_p(x)$, будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных $a_k = c_k + id_k, k = \overline{0, n-1}$:

$$-a_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k k_{p,k} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} l_{p,k} = f_p, \quad p = \overline{1, n}.$$

Переходя к неизвестным $c_k, d_k, k = \overline{0, n-1}$, отсюда получим

$$\begin{aligned} -(c_{p-1} + id_{p-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k + id_k) (\operatorname{Re}(k_{p,k}) + i \operatorname{Im}(k_{p,k})) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} (c_k - id_k) (\operatorname{Re}(l_{p,k}) + i \operatorname{Im}(l_{p,k})) = f_p, \quad p = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -c_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k (\operatorname{Re}(k_{p,k}) + \operatorname{Re}(l_{p,k})) + d_k (\operatorname{Im}(l_{p,k}) - \operatorname{Im}(k_{p,k})) \right) = \\ = \operatorname{Re}(f_p), \quad p = \overline{1, n}, \\ -d_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(c_k (\operatorname{Im}(k_{p,k}) + \operatorname{Im}(l_{p,k})) + d_k (\operatorname{Re}(k_{p,k}) - \operatorname{Re}(l_{p,k})) \right) = \\ = \operatorname{Im}(f_p), \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Описание и листинг функции по решению системы (2.34) (файл «Syst_2_34.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (2.34).

Прототип: *Syst(FK, FL, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

FK – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FL – имя модуля, вычисляющего значение функции $L(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: $KmjTU, fjT$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (2.34).

```

Syst(FK, FL, FF, n) :=
  Fk ← KmjTU(FK, n)
  Fl ← KmjTU(FL, n)
  for p ∈ 1..n
    for k ∈ 0..n - 1
      ap-1, k ← Re(Fkp, k) + Re(Flp, k)
      ap-1, k ← ap-1, k - 1 if k = p - 1
      ap-1, k+n ← Im(Flp, k) - Im(Fkp, k)
      ap+n-1, k ← Im(Fkp, k) + Im(Flp, k)
      ap+n-1, k+n ← Re(Fkp, k) - Re(Flp, k)
      ap+n-1, k+n ← ap+n-1, k - 1 if k = p - 1
    g ← fjT(FF, n)
    for k ∈ 1..n
      fk-1 ← Re(gk)
      fk+n-1 ← Im(gk)
    e ← lsolve(a, f)
    for k ∈ 0..n - 1
      ck ← ek
      dk ← ek+n
  (
    c
    d
  )

```

Решая систему линейных алгебраических уравнений (2.34), получим приближенное решение уравнения (2.18) в классе $h(-1, 1)$:

$$\varphi_{n-1}(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{n-1} (c_k + id_k) U_k(x). \quad (2.35)$$

Результаты численных экспериментов

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (2.18) при

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2+1} - 1 \right) (1+i), \quad K(x, t) = \frac{x}{x^2+t^2+1}, \quad L(x, t) = \frac{x(1+i)}{x^2+1} \frac{t^2}{t^2+1}.$$

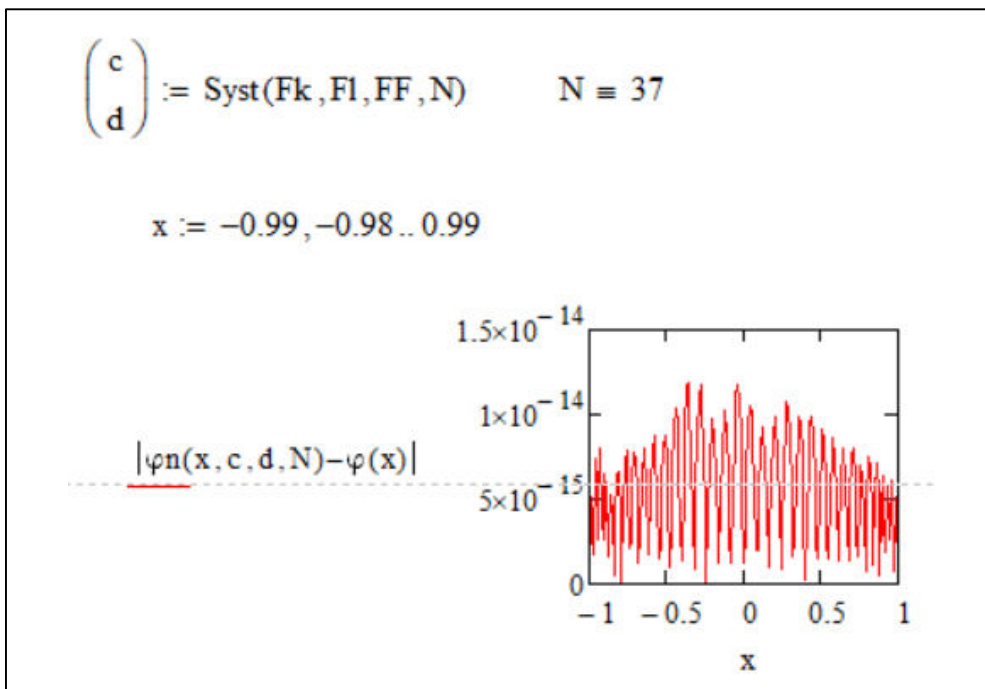
Несложно показать, что решением уравнения (2.18) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{x}{x^2+1} (1+i).$$

Решая систему (2.34) в среде компьютерной алгебры MathCad при $n = 20, 30, 40$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (2.35), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ соответственно на $1,8 \cdot 10^{-8}, 2,7 \cdot 10^{-12}, 2,6 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы в последнем случае не превосходит 82, т. е. порядка $O(n)$.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения (файл «Exampl_2_34_Ogr.xmcd»)

$$\begin{aligned} Fk(x,t) &:= \frac{x}{x^2+t^2+1} \\ Fl(x,t) &:= \frac{xt^2}{x^2+1} \cdot \frac{1+i}{1+t^2} \\ FF(x) &:= (1+i) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{x^2+1} - 1 \right) \\ \varphi(x) &:= x \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1+i}{x^2+1} \\ \varphi_n(x,c,d,n) &:= \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} [(c_k + i \cdot d_k) \cdot Ucheb(k,x)] \\ s \cdot \sqrt{1-x^2} \end{array} \right. \end{aligned}$$



Обоснование вычислительных схем проводится по аналогии с [26, с. 108] (случай сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами). Там же приведены оценки порядков погрешностей построенных приближенных решений.

3. СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА

В книге [14, с. 85] математическое описание задачи рассеяния Е-поляризованных электромагнитных волн криволинейным экраном сводится к решению сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (3.1)$$

Здесь $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H ; $\varphi(x)$ – искомая функция.

В работах [3; 4; 7; 14] и многих других рассматриваются не только условия существования и единственности решения данного уравнения, но и некоторые алгоритмы его приближенного решения.

Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(0)$

Известно, что в классе $h(0)$ решение уравнения (3.1) представимо в виде $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} v(x)$, где $v(x)$ – ограниченная функция.

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = f_n(x), \quad |x| < 1, \quad (3.2)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обоим переменным; $f_n(x)$ – интерполяционный многочлен (1.2) функции $f(x)$ степени n ,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} v_n(x). \quad (3.3)$$

Отметим, что уравнение (3.2) как и уравнение (3.1), в заданном классе разрешимо.

Решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (3.4)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (3.2) с учетом представления (3.4) и равенств (1.18). Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n T_k(x) c_k \alpha_k, \\ & \alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -\frac{1}{k}, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) – это разложение первого интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Рассмотрим второй интеграл в (3.2). Интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ выберем в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода (1.10):

$$\begin{aligned} K_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{m,j}, \\ k_{m,j} &= \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) T_j(x_r), \\ \delta_q &= \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Учтя представление (3.4) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_k = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \omega_k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} k_{m,k}, & k = 0, \\ 0,5k_{m,k}, & k > 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

В результате из (3.6) приходим к разложению второго интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Пусть функция $f_n(x)$ имеет вид (1.2):

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(x),$$

$$f_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Собирая вместе разложение каждого из этих интегралов по формулам (3.5), (3.6), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева первого рода, а справа $f_n(x)$:

$$\sum_{j=0}^n T_j(x) \left(c_j \alpha_j + \sum_{k=0}^n c_k \omega_{j,k} \right) = \sum_{j=0}^n f_j T_j(x). \quad (3.8)$$

Равенство (3.8) верно тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих многочленах удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$c_j \alpha_j + \sum_{k=0}^n c_k \omega_{j,k} = f_j, \quad j = \overline{0, n},$$

$$\alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -\frac{1}{k}, \quad k > 0, \quad (3.9)$$

где коэффициенты $\omega_{j,k}^*$ вычисляются согласно (3.7).

Описание и листинг функции по решению системы (3.9) (файл «Syst_3_9.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (3.9).

Прототип: *Syst(Fk, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: *KmjTT, fjt*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (3.9).

```

Syst(Fk, FF, n) :=
  Fα(k) ←
    | return -ln(2) if k = 0
    | return 1/k otherwise
  Fω ←
    | Fkz ← KmjTT(Fk, n)
    | for m ∈ 0..n
    |   | for k ∈ 0..n
    |   |   ωm,k ← Fkzm,k / 2
    |   |   ωm,0 ← 2 · ωm,0
    |   ω
  ω ← Fω
  for j ∈ 0..n
    | for k ∈ 0..n
    |   Aj,k ← ωj,k
    |   Aj,j ← Aj,j + Fα(j)
  FN ← fjT(FF, n)
  c ← lsolve(A, FN)
  c

```

Решив систему (3.9) относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$, приближенное решение уравнения (3.1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (3.10)$$

Результаты численных экспериментов

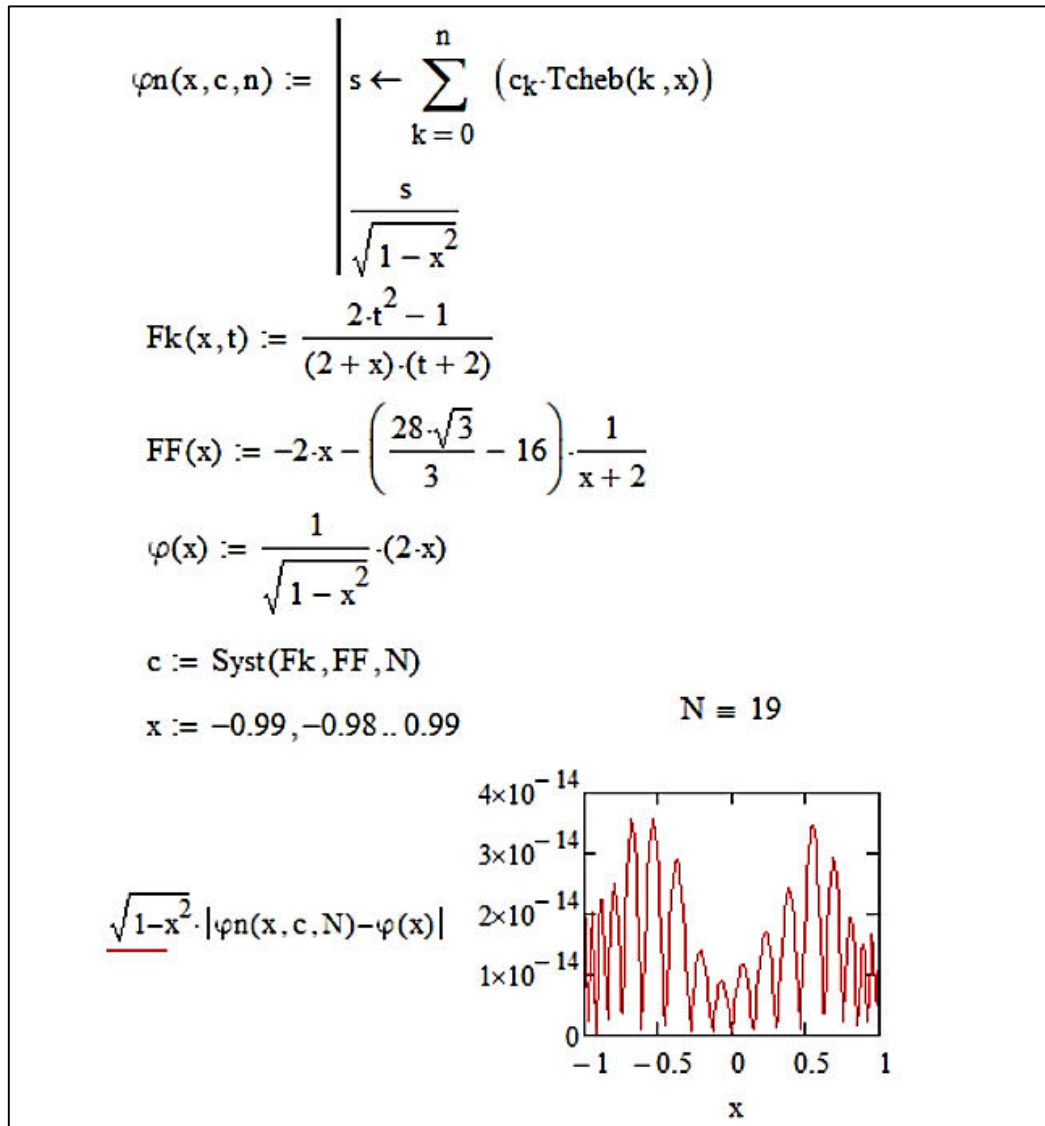
Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (3.1) при

$$k(x, t) = \frac{2t^2 - 1}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = -2x - \left(\frac{28\sqrt{3}}{3} - 16 \right) \frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (3.1) в данном случае является функция $\varphi(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решая систему (3.9) при $n = 9, 14, 19$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (3.10), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $1,8 \cdot 10^{-10}$, $4,2 \cdot 10^{-14}$ и $3,6 \cdot 10^{-14}$ соответственно.

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Exampl_3_9.xmcd»)**



**Приближенное решение сингулярного
интегрального уравнения в классе $h(-1, 1)$**

Аналогично предыдущему разделу рассмотрим вспомогательное уравнение относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$ вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = f_{n+2}(x), |x| < 1, \quad (3.11)$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x, t)$ степени n по обеим переменным; $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (1.4) степени $n + 2$; $\varphi_n(x) = \sqrt{1 - x^2} v_n(x)$.

Отметим, что уравнение (3.11) в заданном классе также разрешимо. Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (3.12)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (3.11) с учетом представления (3.12). Имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x).$$

Подставим вместо $I_k(x)$ его значение согласно (1.20):

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) + \frac{1}{8} U_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x), & k=1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x), & k=2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt &= c_0 \left(\frac{1}{8} U_2(x) - \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) \right) + \\ &+ c_1 \left(-\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x) \right) + c_2 \left(\left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x) \right) + \\ &+ \sum_{k=3}^n c_k \left(-\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \right. \\ &\left. - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

После несложных преобразований имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} B_k U_k(x), \quad (3.14)$$

где выражения для B_k легко получить, приводя подобные в (3.13).

Этим получено разложение данного интеграла по многочленам Чебышева второго рода.

Рассмотрим второй интеграл в (3.11). Интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ возьмем в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода (1.12):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t),$$

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \\ & = \sum_{m=0}^n U_m(x) \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n c_k k_{m,k} + c_0 k_{m,0} \right) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} 0,5k_{m,k}, & k = 0, \\ 0,25k_{m,k}, & k > 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

В результате из (3.15) приходим к разложению второго интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = \sum_{m=0}^n D_m U_m(x), \quad (3.17)$$

где $D_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}$.

Собирая вместе разложение каждого из этих интегралов по формулам (3.14), (3.17), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода, а справа – функцию $f_{n+2}(x)$ в виде (1.4):

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n U_j(x),$$

$$f_j^n = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^n = G_{n-1}, \quad f_n^n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k^n = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^n (B_k + D_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} B_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k^{n+2} U_k(x),$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда коэффициенты удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$B_k + D_k = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$B_k = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}.$$

После несложных преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, 1},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{2, n-4}, \quad (3.18)$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-3, n-2},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-1, n},$$

$$\alpha_k c_{k-2} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2},$$

где коэффициенты $\omega_{k,q}$ вычисляются согласно (3.16),

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{8}, & k = 2, \\ \frac{1}{8k}, & k > 2, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}, & k = 0, \\ -\frac{1}{6}, & k = 1, \\ -\frac{3k+4}{8k(k+2)}, & k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}, & k = 0, \\ \frac{3k+2}{8k(k+2)}, & k > 0, \end{cases}$$

$$\delta_k = \begin{cases} -\frac{1}{16}, & k = 0, \\ -\frac{1}{8(k+2)}, & k > 0. \end{cases}$$

Описание и листинг функции по решению системы (3.18) (файл «Syst_3_18.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (3.18).

Прототип: *Syst(Fk, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: *KmjUU, fjU*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (3.18).

$\text{Syst}(F_k, FF, n) :=$	$F\beta(k) \leftarrow$	$\begin{aligned} &\text{return } -\frac{1}{8} - \frac{\ln(2)}{2} \text{ if } k = 0 \\ &\text{return } -\frac{1}{6} \text{ if } k = 1 \\ &\text{return } -\frac{3 \cdot k + 4}{8 \cdot k \cdot (k + 2)} \text{ otherwise} \end{aligned}$
	$F\alpha(k) \leftarrow$	$\begin{aligned} &\text{return } \frac{1}{8} \text{ if } k = 2 \\ &\text{return } \frac{1}{8 \cdot k} \text{ if } k = 3 \vee k = 4 \\ &\text{return } \frac{1}{8 \cdot (k - 2)} \text{ otherwise} \end{aligned}$
	$F\gamma(k) \leftarrow$	$\begin{aligned} &\text{return } \frac{1}{8} + \frac{\ln(2)}{4} \text{ if } k = 0 \\ &\text{return } \frac{3 \cdot k + 2}{8 \cdot k \cdot (k + 2)} \text{ otherwise} \end{aligned}$
	$F\delta(k) \leftarrow$	$\begin{aligned} &\text{return } -\frac{1}{16} \text{ if } k = 0 \\ &\text{return } -\frac{1}{8 \cdot (k + 2)} \text{ otherwise} \end{aligned}$
	$F\omega \leftarrow$	$\begin{aligned} &Fkz \leftarrow \text{KmjUU}(Fk, n) \\ &\text{for } k \in 0..n \\ &\quad \text{for } m \in 0..n \\ &\quad \quad \omega_{k,m} \leftarrow \frac{Fkz_{k,m}}{4} \\ &\quad \quad \omega_{k,0} \leftarrow 2 \cdot \omega_{k,0} \\ &\omega \end{aligned}$
	$\text{for } k \in 0..n + 2$	
	$\text{for } m \in 0..n$	
	$A_{k,m} \leftarrow 0$	
	$\text{for } k \in 0..1$	
	$A_{k,k} \leftarrow F\beta(k)$	
	$A_{k,k+2} \leftarrow F\gamma(k)$	
	$A_{k,k+4} \leftarrow F\delta(k)$	

```

for k ∈ 2..n - 4
  Ak,k-2 ← Fα(k)
  Ak,k ← Fβ(k)
  Ak,k+2 ← Fγ(k)
  Ak,k+4 ← Fδ(k)
for k ∈ n - 3..n - 2
  Ak,k-2 ← Fα(k)
  Ak,k ← Fβ(k)
  Ak,k+2 ← Fγ(k)
for k ∈ n - 1..n
  Ak,k-2 ← Fα(k)
  Ak,k ← Fβ(k)
for k ∈ n + 1..n + 2
  Ak,k-2 ← Fα(k)
ω ← Fω
for k ∈ 0..n
  for m ∈ 0..n
    Ak,m ← Ak,m + ωk,m
FN ← fjU(FF, n + 2)
c ← lsolve(A, FN)
c

```

Решив систему (3.18) относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$, при $n \geq 7$, приближенное решение уравнения (3.1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (3.19)$$

Результаты численных экспериментов

Предложенная схема протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (3.1) при

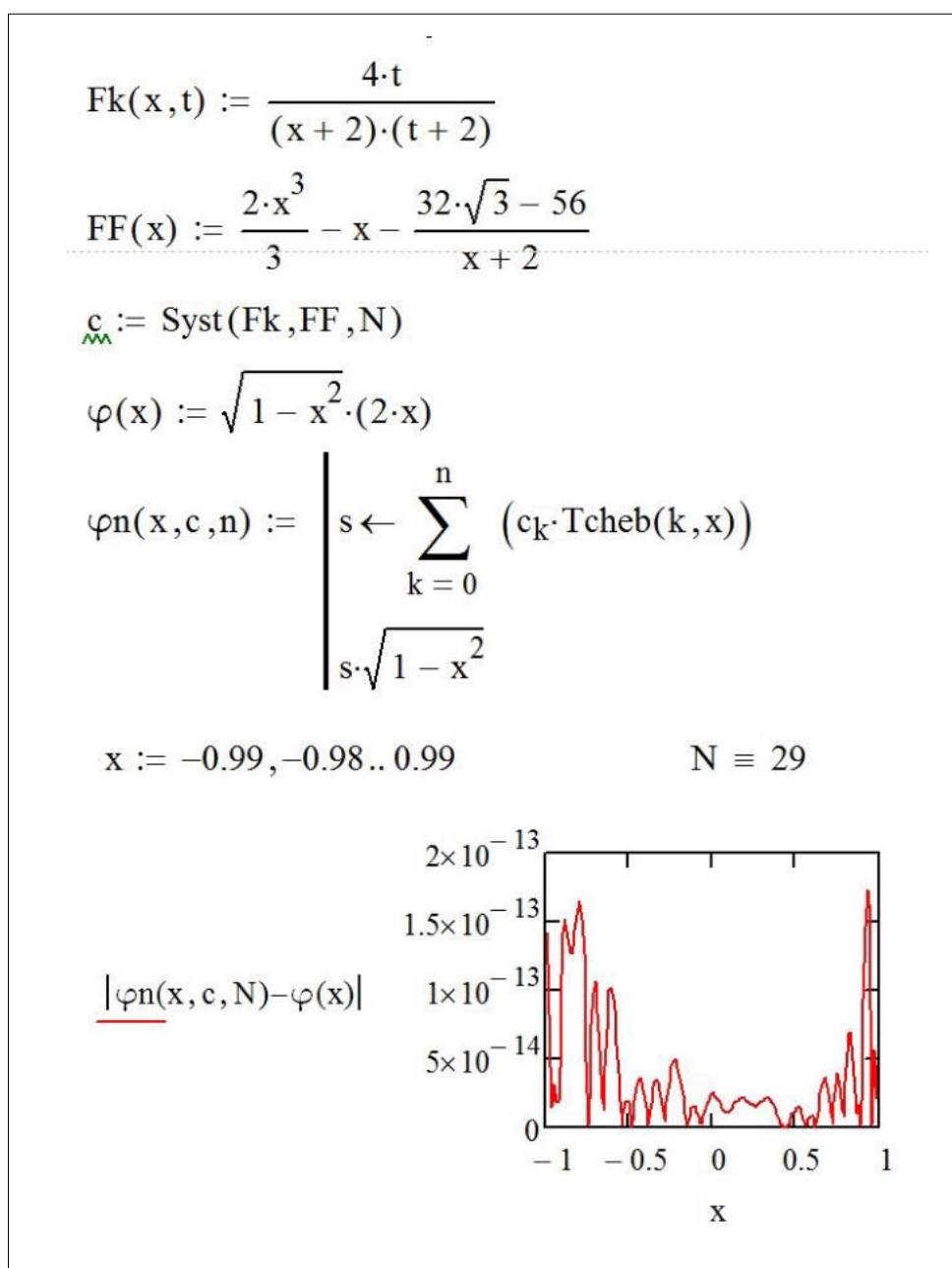
$$k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (3.1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Решая систему (3.18) при n равных 7, 14 и 29, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (3.19), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $4,6 \cdot 10^{-4}$, $1,8 \cdot 10^{-7}$ и $1,7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения (файл «Exampl_3_18.xmcd»)



Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(1)$

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = \\ = f_{n+1}(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обеим переменным; $f_{n+1}(x)$ – интерполяционный многочлен вида (1.2) функции $f(x)$ степени $n+1$,

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} v_n(x). \quad (3.21)$$

Отметим, что уравнение (3.20), как и уравнение (3.1), в заданном классе разрешимо.

Положим далее

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (3.22)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (3.20) с учетом представления (3.21), (3.22) и равенств (1.21):

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2 T_0(x) + T_1(x), & k=0, \\ \frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k=1, \\ \frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{T_k(x)}{k} + \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k \geq 2. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \\ = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n L_k(x) c_k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Учтя (1.21), перегруппируем в (3.23) слагаемые относительно многочленов $T_k(x)$, $k = \overline{1, n+1}$, и будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+1} B_k T_k(x).$$

Выражения для B_k несложно получить из (3.23).

Этим получено разложение первого интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Рассмотрим второй интеграл в (3.20) и в качестве интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ выберем (1.10):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{m,j},$$

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) T_j(x_r),$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Учтя представление (3.21) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-t)}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \left(k_{m,k} \omega_k - \frac{1}{2} k_{m,|k-1|} \omega_{|k-1|} \right) - \\ & - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \frac{1}{2} k_{m,k+1} \omega_{k+1} = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\Omega_{m,k} = k_{m,k} \omega_k - \frac{1}{2} k_{m,|k-1|} \omega_{|k-1|} - \frac{1}{2} k_{m,k+1} \omega_{k+1} \vartheta_{k+1},$$

$$\vartheta_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n}, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad \omega_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0,5, & k > 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

В результате из (3.24) приходим к разложению второго интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Собирая вместе разложение каждого из этих интегралов по формулам (3.23), (3.24), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева первого рода, а справа – функцию $f_{n+1}(x)$ в виде (1.2):

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n T_j(x),$$

$$f_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k^n = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Получим

$$\sum_{j=0}^n T_j(x) \left(B_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} \right) + B_n T_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j^{n+1} T_j(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих многочленах удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$B_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} = f_j^{n+1}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$B_{n+1} = f_{n+1}^{n+1}, \quad (3.26)$$

где коэффициенты $\Omega_{j,k}$ вычисляются согласно (3.25).

После несложных преобразований из (3.26) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$-\ln 2 c_0 + \frac{\ln 2}{2} c_1 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{0,q} = f_0^{n+1},$$

$$c_0 - c_1 + 0,5c_2 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{1,q} = f_1^{n+1},$$

$$\frac{1}{2k} c_{k-1} - \frac{1}{k} c_k + \frac{1}{2k} c_{k+1} + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{k,q} = f_k^{n+1}, \quad k = \overline{2, n-1}, \quad (3.27)$$

$$\frac{1}{2n}c_{n-1} - \frac{1}{n}c_n + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{n,q} = f_n^{n+1},$$

$$\frac{1}{2n+2}c_n = f_{n+1}^{n+1}.$$

Решив систему (3.27) относительно неизвестных $c_k, k = \overline{0, n}$, приближенное решение уравнения (3.1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (3.28)$$

Описание и листинг функции по решению системы (3.27) (файл «Syst_3_27.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (3.27).

Прототип: *Syst(Fk, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: *KmjTT, fJT*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (3.27).

$Syst(Fk, FF, n) :=$	<pre> Fω(k) ← return 1 if k = 0 return 0.5 otherwise FΩ ← Fkz ← KmjTT(Fk, n) for m ∈ 0..n for k ∈ 0..n Ω_{m,k} ← Fkz_{m,k} · Fω(k) - 1/2 · Fkz_{m, k-1} · Fω(k-1) Ω_{m,k} ← Ω_{m,k} - 1/2 · Fkz_{m,k+1} · Fω(k+1) if k < n Ω Ω ← FΩ for j ∈ 0..n </pre>
----------------------	--

```

for k ∈ 0..n
  Aj,k ← Ωj,k
A0,0 ← A0,0 - ln(2)
A0,1 ← A0,1 +  $\frac{\ln(2)}{2}$ 
A1,0 ← A1,0 + 1
A1,1 ← A1,1 - 1
A1,2 ← A1,2 + 0.5
for k ∈ 2..n - 1
  Ak,k-1 ← Ak,k-1 +  $\frac{1}{2 \cdot k}$ 
  Ak,k ← Ak,k -  $\frac{1}{k}$ 
  Ak,k+1 ← Ak,k+1 +  $\frac{1}{2 \cdot k}$ 
An,n-1 ← An,n-1 +  $\frac{1}{2 \cdot n}$ 
An,n ← An,n -  $\frac{1}{n}$ 
An+1,n ←  $\frac{1}{2 \cdot n + 2}$ 
FN ← fT(FN, n + 1)
c ← lsolve(A, FN)
c

```

Результаты численных экспериментов

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (3.1) при

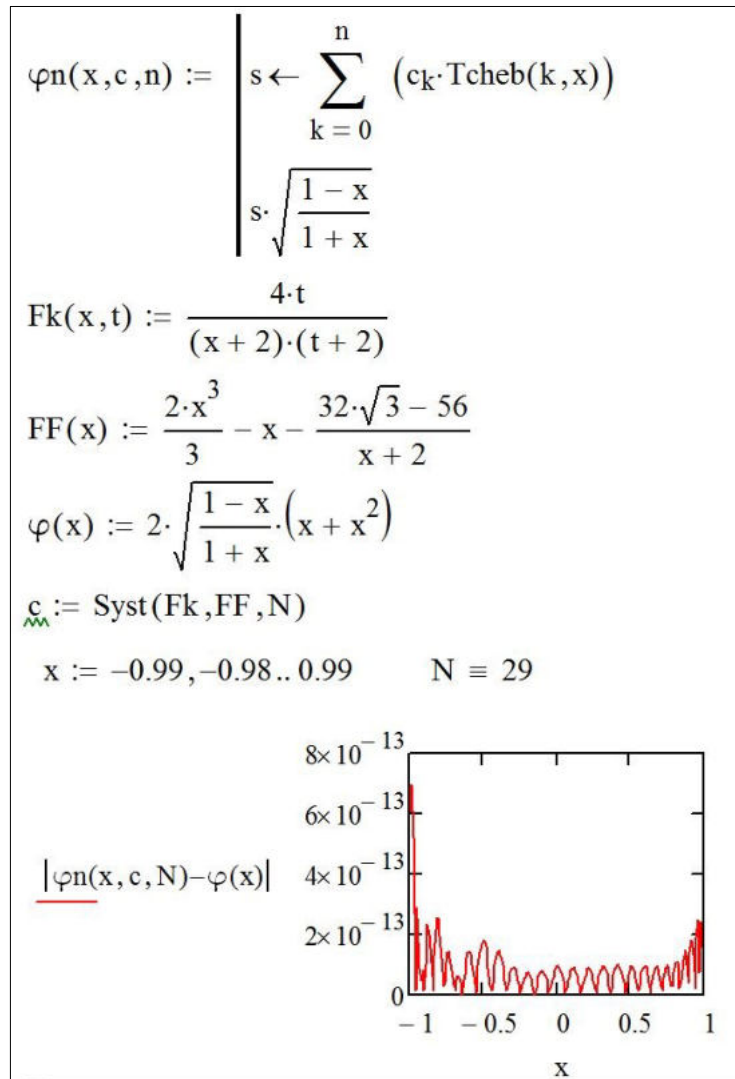
$$k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (3.1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = (2x + 2x^2) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Решая систему (3.27) при $n = 7, 14, 29$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (3.28), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,1 \cdot 10^{-4}$, $1,5 \cdot 10^{-7}$ и $7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения (файл «Exampl_3_27.xmcd»)



Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения в классе $h(-1)$

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ = f_{n+1}(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x, t)$ степени n по обеим переменным; $f_{n+1}(x)$ – интерполяционный многочлен вида (1.2) функции $f(x)$ степени $n+1$,

$$\Phi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} v_n(x). \quad (3.30)$$

Отметим, что уравнение (3.29), как и уравнение (3.1), в заданном классе разрешимо.

Положим далее

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (3.31)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (3.29) с учетом представления (3.31) и равенств (1.22). Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n L_k(x) c_k, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} T_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\ln 2T_0(x) - T_1(x), & k=0, \\ -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) - T_1(x) - \frac{1}{4} T_2(x), & k=1, \\ -\frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \frac{T_k(x)}{k} - \frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k \geq 2. \end{cases}$$

Учтя (1.22), перегруппируем в (3.32) слагаемые относительно многочленов $T_k(x)$, $k = \overline{1, n+1}$, и будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+1} D_k T_k(x).$$

Выражения для D_k несложно получить из (3.32).

В результате получено разложение первого интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Рассмотрим второй интеграл в (3.29) и в качестве интерполяционного многочлена $K_{n,n}(x, t)$ выберем (1.10):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n T_j(t) k_{m,j},$$

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) T_j(x_r),$$

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Учтя представление (3.30) и свойство ортогональности многочленов Чебышева первого рода, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+t)}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \left(k_{m,k} \omega_k + \frac{1}{2} k_{m,|k-1|} \omega_{|k-1|} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \frac{1}{2} k_{m,k+1} \omega_{k+1} = \\ & = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\Omega_{m,k} = k_{m,k} \omega_k + \frac{1}{2} k_{m,|k-1|} \omega_{|k-1|} + \frac{1}{2} k_{m,k+1} \omega_{k+1} \vartheta_{k+1},$$

$$\vartheta_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, n}, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad \omega_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0,5, & k > 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

В итоге из (3.33) приходим к разложению второго интеграла по многочленам Чебышева первого рода.

Собирая вместе разложение каждого из этих интегралов по формулам (3.32), (3.33), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева первого рода, а справа – функцию $f_{n+1}(x)$ в виде (1.2):

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n {}^0 f_j^n T_j(x),$$

$$f_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k^n = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Имеем

$$\sum_{j=0}^n T_j(x) \left(D_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} \right) + D_n T_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j^{n+1} T_j(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих многочленах удовлетворяют следующей системе уравнений относительно неизвестных $c_k, k = \overline{0, n}$:

$$D_j + \sum_{k=0}^n c_k \Omega_{j,k} = f_j^{n+1}, \quad j = \overline{0, n}, \quad D_{n+1} = f_{n+1}^{n+1}, \quad (3.35)$$

где коэффициенты $\Omega_{j,k}$ вычисляются согласно (3.34).

После несложных преобразований отсюда приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k, k = \overline{0, n}$:

$$\begin{aligned} -\ln 2 c_0 - \frac{\ln 2}{2} c_1 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{0,q} &= f_0^{n+1}, \\ -c_0 - c_1 - 0,5c_2 + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{1,q} &= f_1^{n+1}, \\ -\frac{1}{2k} c_{k-1} - \frac{1}{k} c_k - \frac{1}{2k} c_{k+1} + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{k,q} &= f_k^{n+1}, \quad k = \overline{2, n-1}, \\ -\frac{1}{2n} c_{n-1} - \frac{1}{n} c_n + \sum_{q=0}^n c_q \Omega_{n,q} &= f_n^{n+1}, \\ -\frac{1}{2n+2} c_n &= f_{n+1}^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Решив систему (3.36) относительно неизвестных $c_k, k = \overline{0, n}$, приближенное решение уравнения (3.1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (3.37)$$

Описание и листинг функции по решению системы (3.36) (файл «Syst_3_36.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (3.36).

Прототип: *Syst(Fk, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: $KmjTT, fjT$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (3.36).

```

Syst(Fk, FF, n) :=
  Fω(k) ← | return 1 if k = 0
           | return 0.5 otherwise
  FΩ ← | Fkz ← KmjTT(Fk, n)
        | for m ∈ 0..n
        |   for k ∈ 0..n
        |     | Ωm,k ← Fkzm,k · Fω(k) +  $\frac{1}{2}$  · Fkzm, |k-1| · Fω(|k-1|)
        |     | Ωm,k ← Ωm,k +  $\frac{1}{2}$  · Fkzm,k+1 · Fω(k+1) if k < n
        |     | Ω
  Ω ← FΩ
  for j ∈ 0..n
    for k ∈ 0..n
      Aj,k ← Ωj,k
  A0,0 ← A0,0 - ln(2)
  A0,1 ← A0,1 -  $\frac{\ln(2)}{2}$ 
  A1,0 ← A1,0 - 1
  A1,1 ← A1,1 - 1
  A1,2 ← A1,2 - 0.5
  for k ∈ 2..n-1
    | Ak,k-1 ← Ak,k-1 -  $\frac{1}{2 \cdot k}$ 
    | Ak,k ← Ak,k -  $\frac{1}{k}$ 
    | Ak,k+1 ← Ak,k+1 -  $\frac{1}{2 \cdot k}$ 
  An,n-1 ← An,n-1 -  $\frac{1}{2 \cdot n}$ 
  An,n ← An,n -  $\frac{1}{n}$ 

```

$$\begin{array}{l} A_{n+1,n} \leftarrow -\frac{1}{2 \cdot n + 2} \\ FN \leftarrow \text{fjT}(FF, n + 1) \\ c \leftarrow \text{lsolve}(A, FN) \\ c \end{array}$$

Результаты численных экспериментов

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (3.1) при

$$k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (3.1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = (2x - 2x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Решая систему (3.36) при n равных 7, 14 и 29, точное решение $\varphi(x)$ отличается от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (3.37), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $2,2 \cdot 10^{-4}$, $1,0 \cdot 10^{-7}$ и $7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения (файл «Exampl_3_36.xmcd»)

$$\begin{array}{l} \varphi_n(x, c, n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow \sum_{k=0}^n (c_k \cdot \text{Tcheb}(k, x)) \\ s \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{array} \right. \\ Fk(x, t) := \frac{4 \cdot t}{(x+2) \cdot (t+2)} \\ FF(x) := \frac{2 \cdot x^3}{3} - x - \frac{32 \cdot \sqrt{3} - 56}{x+2} \end{array}$$

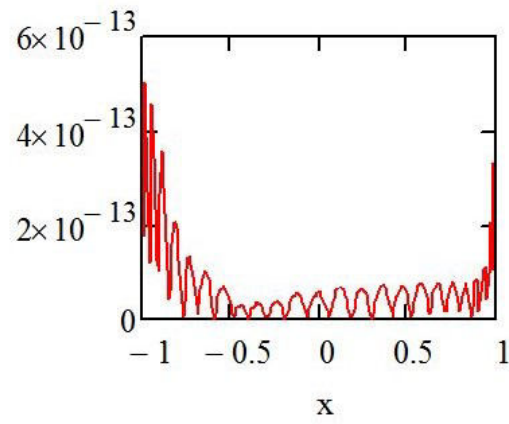
$$\varphi(x) := 2 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot (x - x^2)$$

$\underline{c} := \text{Syst}(\text{Fk}, \text{FF}, \text{N})$

$x := -0.99, -0.98 \dots 0.99$

$\text{N} \equiv 25$

$|\varphi_n(x, c, N) - \varphi(x)|$



4. СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО РОДА

В книге [14, с. 58, 59] рассматривается квадратурный метод приближенного решения разрешимого сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (4.1)$$

решение которого разыскивается в классе $h(-1, 1)$. Здесь $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H , $\varphi(x)$ – искомая функция.

Приближенное решение уравнения (4.1) в классе $h(-1, 1)$ будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\varphi_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = F_n(x), \quad |x| < 1, \quad (4.2)$$

где $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x)$, $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x, t)$ степени n по обеим переменным, где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$, такая, что

$$F_n(x_j) = f(x_j), \quad x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Отметим, что уравнение (4.2) в заданном классе также разрешимо. Положим далее

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (4.3)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в (4.2) с учетом представления (4.3) и :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x),$$

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) + \frac{1}{8}U_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{6}U_1(x) + \frac{1}{24}U_3(x), & k=1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right)U_0(x) - \frac{5}{32}U_2(x) + \frac{1}{32}U_4(x), & k=2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases}$$

Рассмотрим второй интеграл в (4.2) и воспользуемся интерполяционным многочленом (1.8):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n U_j(t) k_{m,j},$$

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \sigma_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad \sigma_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} 0,5k_{m,k}, & k=0, \\ 0,25k_{m,k}, & k>0. \end{cases}$$

С учетом (4.4) уравнение (4.2) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k I_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,k} = F_n(x). \quad (4.5)$$

В качестве внешних узлов x в (4.5) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = \overline{0, n}$. Из (4.5) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k A_{j,k} = f(x_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (4.6)$$

где

$$A_{j,k} = \sqrt{1-x_j^2} T_k(x_j) + I_k(x_j) + \sum_{m=0}^n T_m(x_j) \omega_{m,k}.$$

Система (4.6), полученная из (4.5), разрешима и имеет единственное решение.

Решив систему (4.6) относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$, приближенное решение уравнения (4.1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (4.7)$$

Описание и листинг функции по решению системы (4.6) (файл «Syst_4_6.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (4.6).

Прототип: *Syst(Fk, FF, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

FF – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: *KmjTU*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (4.6).

$\text{Syst}(Fk, FF, n) :=$	$I(k, x) \leftarrow$	$\begin{cases} -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \text{Ucheb}(2, x) & \text{if } k = 0 \\ -\frac{1}{6} \cdot \text{Ucheb}(1, x) + \frac{1}{24} \cdot \text{Ucheb}(3, x) & \text{if } k = 1 \\ \left(\frac{\ln(2)}{4} + \frac{1}{8}\right) - \frac{5}{32} \cdot \text{Ucheb}(2, x) + \frac{1}{32} \cdot \text{Ucheb}(4, x) & \text{if } k = 2 \\ \frac{5}{24} \cdot \text{Ucheb}(1, x) - \frac{13}{120} \cdot \text{Ucheb}(3, x) + \frac{1}{40} \cdot \text{Ucheb}(5, x) & \text{if } k = 3 \end{cases}$
-----------------------------	----------------------	---

	$\left \begin{aligned} & -\frac{1}{8 \cdot (k-2)} \cdot \text{Ucheb}(k-4, x) + \frac{3 \cdot k - 4}{8 \cdot k \cdot (k-2)} \cdot \text{Ucheb}(k-2, x) - \frac{3 \cdot k + 4}{8 \cdot k \cdot (k+2)} \cdot \end{aligned} \right.$
Fx(n) ←	$\left \begin{aligned} & \text{for } l \in 0..n \\ & \quad x_l \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right) \end{aligned} \right.$
	x
FUch(n) ←	$\left \begin{aligned} & x \leftarrow \text{Fx}(n) \\ & \text{for } l \in 0..n \\ & \quad \text{for } m \in 0..n \\ & \quad \quad Y_{m,l} \leftarrow \text{Ucheb}(m, x_l) \end{aligned} \right.$
	Y
FTch(n) ←	$\left \begin{aligned} & x \leftarrow \text{Fx}(n) \\ & \text{for } l \in 0..n \\ & \quad \text{for } m \in 0..2 \cdot n + 2 \\ & \quad \quad Y_{m,l} \leftarrow \text{Tcheb}(m, x_l) \end{aligned} \right.$
	Y
FK ←	KmjTU(Fk, N)
omk(m, k) ←	$\left \begin{aligned} & 0.5 \cdot \text{FK}_{m,0} \quad \text{if } k = 0 \\ & 0.25 \cdot \text{FK}_{m,k} \quad \text{if } k > 0 \end{aligned} \right.$
FT ←	FTch(n)
FU ←	FUch(n)
x ←	Fx(n)
for	j ∈ 0..n
for	k ∈ 0..n
	$\left \begin{aligned} & s \leftarrow \sum_{m=0}^n (\text{FT}_{m,j} \cdot \text{omk}(m, k)) \end{aligned} \right.$
	$\left \begin{aligned} & a_{j,k} \leftarrow I(k, x_j) + \sqrt{1 - (x_j)^2} \cdot \text{FT}_{k,j} + s \end{aligned} \right.$
for	l ∈ 0..n
	$\left \begin{aligned} & x \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot l + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right) \end{aligned} \right.$
	F _l ← FF(x)
c ←	lsolve(a, F)

Результаты численных экспериментов

Предложенная схема протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (4.1) при

$$k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (4.1) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Exampl_4_6.xmcd»)**

$$Fk(x, t) := \frac{4}{x+2} \cdot \frac{t}{t+2}$$

$$FF(x) := 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \cdot x^3 - x + (56 - 32 \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\varphi(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot (2 \cdot x)$$

$$\varphi_n(x, c, n) := \begin{cases} s \leftarrow \sum_{k=0}^n (c_k \cdot \text{Tcheb}(k, x)) \\ s \cdot \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

c := Syst(Fk, FF, N) N ≡ 14

x := -0.99, -0.98..0.99

$$\underline{|\varphi_n(x, c, N) - \varphi(x)|}$$

Решая систему (4.6) при $n = 7, 14, 25$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (4.7), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $1,3 \cdot 10^{-5}$, $2,4 \cdot 10^{-14}$ и $1,7 \cdot 10^{-14}$ соответственно.

5. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФРАКЦИИ

В монографии [14, с. 87] при решении задачи дифракции H -поляризованной электромагнитной волны рассматривается приближенное решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x),$$

$$-1 < x < 1.$$

Здесь $M(x, t)$, $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H ; $\varphi(x)$ – искомая функция. Там же показано, что решение данного уравнения в классе H существует и единственно при выполнении условий

$$\varphi(\pm 1) = 0$$

и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x),$$

где $v(x)$ – ограниченная функция при $x \in [-1, 1]$.

Для получения вычислительной схемы приближенного решения указанного уравнения в [14, с. 69] предварительно рассматривается уравнение с $M(x, t) \equiv 1$.

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ $M(x, t) \equiv 1$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x, t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (5.1)$$

$$\varphi(\pm 1) = 0. \quad (5.2)$$

Задача (5.1), (5.2) имеет единственное решение, если $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гёльдера H , и искомая функция представима в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x), \quad (5.3)$$

где $v(x)$ – ограниченная функция при $x \in [-1, 1]$.

Приближенное решение задачи (5.1), (5.2)

Рассмотрим две новые вычислительные схемы численного решения уравнения (5.1) при условии (5.2).

Схема 1

Приближенное решение задачи (5.1), (5.2) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n'(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = f_{n+2}(x), \quad -1 < x < 1, \quad \varphi_n(\pm 1) = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен (1.8) функции $K(x,t)$ степени n по обоим переменным; $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ степени $n+2$; $\varphi_n(x)$ – некоторое приближение к искомой функции.

Чтобы получить явное выражение для $\varphi_n(x)$, поступим следующим образом. Введем новую функцию

$$v_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n'(t)}{t-x} dt. \quad (5.5)$$

Тогда, выполняя обращение интеграла (5.5) в классе неограниченных функций, имеем

$$\varphi_n'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} v_n(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, учитывая, что $\varphi_n(-1) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \int_{-1}^x \varphi_n'(\tau) d\tau = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} v_n(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x,t) v_n(t) dt + \mu(x), \quad \mu(x) = c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$H(x,t) = -\sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) =$$

$$= -\sqrt{1-t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|} \right) = -\ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Замечая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, находим $c = 0$.

Кроме того, что функция $H(x, t)$ симметрическая, она еще и неположительная. В самом деле

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H(\cos\theta, \cos\sigma) = -\ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = \\ &= -\ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \leq 0, \quad 0 < \sigma, \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Пусть далее с учетом (5.5)

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (5.7)$$

где $c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Тогда из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \quad (5.8)$$

так как

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{v_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= -\sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_{k+1}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k A_k(x), \end{aligned}$$

где

$$A_k(x) = \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{1}{k+1} \sin((k+1) \arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1} U_k(x), \quad k \geq 0.$$

В результате получено представление $\varphi_n(x)$ через многочлены Чебышева второго рода.

Введем операторы:

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt, \quad (5.9)$$

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.4) с учетом (5.7), (5.9), (5.10) в эквивалентной форме имеет вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n; x) + k(\varphi_n; x) = f_{n+2}(x). \quad (5.11)$$

На основании полученного представления (5.8) выполним эквивалентные преобразования и упростим входящие в (5.9) и (5.10) интегралы.

$$\begin{aligned} I(\varphi_n; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(t) \ln|t-x| dt = \\ &= -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt = -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} J_k(x), \end{aligned}$$

при этом $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt$ вычисляется в соответствии

с (1.19). Подставим вместо $J_k(x)$ его значение по равенству (1.19):

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} T_0(x) + \frac{1}{4} T_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{2k} T_k(x) + \frac{1}{2k+4} T_{k+2}(x), & k \geq 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(\varphi_n; x) &= c_0 \left(\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{1}{8} U_2(x) \right) + c_1 \left(-\frac{1}{12} U_3(x) + \frac{1}{3} U_1(x) \right) + \\ &+ \sum_{k=2}^n c_k \frac{1}{k+1} \left(-\frac{U_{k-2}(x)}{4k} + \frac{k+1}{2k(k+2)} U_k(x) - \frac{U_{k+2}(x)}{4(k+2)} \right). \quad (5.12) \end{aligned}$$

Перегруппировав это выражение, получим разложение данного интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} D_k U_k(x). \quad (5.13)$$

Значения D_k (5.13) нетрудно выписать на основании (5.12), что мы и учтем в дальнейшем.

В качестве $K_{n,n}(x, t)$ выберем (1.12):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t), \quad (5.14)$$

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = \overline{n-1, n}, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = \overline{n-1, n}, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Упростим (5.10) с учетом (5.14):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt =$$

$$= - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} M_{k,j},$$

$$M_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \quad (5.15)$$

Следовательно, на основании (5.15) получено разложение оператора (5.10) по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \sum_{m=0}^n E_m U_m(x), \quad (5.16)$$

где

$$E_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}, \quad \omega_{m,k} = -\frac{k_{m,k}}{2k+2}. \quad (5.17)$$

Учитывая (5.16) и собирая в (5.11) вместе представление каждого из трех слагаемых, получим слева линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода и справа $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (1.4) степени $n+2$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{j=0}^n f_j^n U_j(x), \\ f_j^n &= G_j^n - G_{j+2}^n, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^n = G_{n-1}^n, \quad f_n^n = G_n^n, \\ G_j^n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \\ x_k^n &= \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Получим

$$\sum_{k=0}^n (c_k + D_k + E_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} D_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k^{n+2} U_k(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда имеет место следующая система:

$$\begin{aligned} c_k + D_k + E_k &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, n}, \\ D_k &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}. \end{aligned}$$

Выполнив простейшие преобразования, отсюда придем к такой системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\begin{aligned} (\beta_k + 1)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, 1}, \\ \alpha_k c_{k-2} + (\beta_k + 1)c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{2, n-2}, \\ \alpha_k c_{k-2} + (\beta_k + 1)c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-1, n}, \\ \alpha_k c_{k-2} &= f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где коэффициенты $\omega_{k,q}$ вычисляются согласно (5.17),

$$\alpha_k = -\frac{1}{4k(k-1)},$$

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}, & k = 0, \\ \frac{1}{2k(k+2)}, & k > 0, \end{cases}$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{4(k+2)(k+3)}.$$

Решив систему (5.18) относительно неизвестных c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, при $n \geq 4$, приближенное решение задачи (5.1), (5.2) получим по формуле (5.8).

**Описание и листинг функции по решению системы (5.18)
(файл «Syst_5_17.xmcd»)**

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (5.18).

Прототип: *Syst(Fk, Ff, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

Ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: *KmjUU, fjU*.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (5.18).

```

Syst(Fk, Ff, n) := | Fkz ← KmjUU(Fk, n)
                   | Fβ(k) ← | return 1/8 + ln(2)/2 if k = 0
                   |          | return 1/(2·k·(k+2)) otherwise
                   | Fα(k) ← -1/(4k·(k-1))
                   | Fγ(k) ← -1/(4(k+2)·(k+3))
                   | Fω ← | for k ∈ 0..n

```

```

      for m ∈ 0..n
        ωk,m ← -  $\frac{Fkz_{k,m}}{2 \cdot m + 2}$ 
      ω
for k ∈ 0..n + 2
  for m ∈ 0..n
    Ak,m ← 0
for k ∈ 0..1
  | Ak,k ← Fβ(k) + 1
  | Ak,k+2 ← Fγ(k)
for k ∈ 2..n - 2
  | Ak,k-2 ← Fα(k)
  | Ak,k ← Fβ(k) + 1
  | Ak,k+2 ← Fγ(k)
for k ∈ n - 1..n
  | Ak,k-2 ← Fα(k)
  | Ak,k ← Fβ(k) + 1
for k ∈ n + 1..n + 2
  Ak,k-2 ← Fα(k)
ω ← Fω
for k ∈ 0..n
  for m ∈ 0..n
    Ak,m ← Ak,m + ωk,m
FN ← fjU(Ff, n + 2)
c ← lsolve(A, FN)
c

```

Результаты численных экспериментов

Применим полученный алгоритм к приближенному решению задачи (5.1), (5.2) при

$$k(x, t) = \frac{x^3 t}{(x^2 + 1)(t^2 + 1)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x - \frac{(2\sqrt{2} - 3)x^3}{x^2 + 1}.$$

Несложно показать, что решением задачи (5.1), (5.2) в данном случае является функция

$$\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Решая систему (5.18) при $n = 7, 14, 35$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (5.8), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $1,0 \cdot 10^{-5}$, $2,2 \cdot 10^{-8}$ и $8,0 \cdot 10^{-16}$ соответственно.

Описание и листинг по приближенному решению задачи (5.1), (5.2) согласно схеме 1 (файл «Exampl_5_17.xmcd»)

$$Fk(x, t) := \frac{x^3 \cdot t}{(x^2 + 1) \cdot (t^2 + 1)}$$

$$Ff(x) := \frac{2 \cdot x^3}{3} - 5 \cdot x - \frac{(2 \cdot \sqrt{2} - 3) \cdot x^3}{x^2 + 1}$$

$$\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2} \cdot (2 \cdot x)$$

$$\underline{c} := \text{Syst}(Fk, Ff, N)$$

$$\varphi_n(x, c, n) := \begin{cases} s \leftarrow \sum_{k=0}^n \left(\frac{c_k}{k+1} \cdot \text{Ucheb}(k, x) \right) \\ -s \cdot \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$x := -0.99, -0.98..0.99 \quad N \equiv 14$$

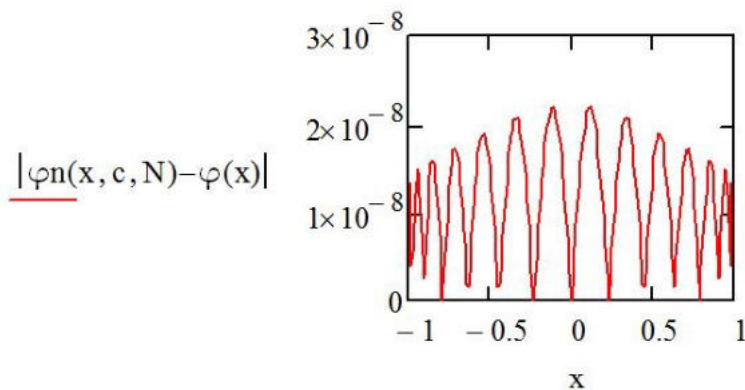


Схема 2

Построим еще одну вычислительную схему численного решения задачи (5.1), (5.2). Принимая во внимание (5.3), приближенное решение задачи (5.1), (5.2) будем искать как решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2} v_n(t))'}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x,t) dt = f_{n+2}(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обоим переменным; $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ степени $n+2$; $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x)$ – некоторое приближение к искомой функции.

Положим далее

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (5.20)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Упростим интегралы, входящие в (5.19).

С учетом (5.20) и (1.23) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2} v_n(t))'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2} T_k(t))'}{t-x} dt = -c_0 U_0(x) + \\ & + \sum_{k=1}^n c_k \frac{k-1}{2} U_{k-2} - \sum_{k=1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k = -c_0 U_0(x) + \sum_{k=0}^{n-2} c_{k+2} \frac{k+1}{2} U_k(x) - \\ & - \sum_{k=1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) = -c_0 U_0(x) + c_2 \frac{U_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k+1}{2} (c_{k+2} - c_k) U_k(x) - \\ & - \sum_{k=n-1}^n c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) = \sum_{k=0}^n A_k U_k(x). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Получим разложение первого интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(\sqrt{1-t^2} v_n(t))'}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n A_k U_k(x), \quad (5.22)$$

где A_k на основании (5.21) имеют вид

$$A_k = \begin{cases} 0,5c_2 - c_0, & k = 0, \\ 0,5(k+1)(c_{k+2} - c_k), & k = \overline{1, n-2}, \\ -0,5nc_{n-1}, & k = n-1, \\ -0,5(n+1)c_n, & k = n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим второй интеграл и снова учтем (5.20):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x).$$

Подставим вместо $I_k(x)$ его значение по равенству (1.20):

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt = \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) + \frac{1}{8} U_2(x), & k = 0, \\ -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x), & k = 1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x), & k = 2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases}$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = c_0 \left(\frac{1}{8} U_2(x) - \left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) \right) + \\ & + c_1 \left(-\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x) \right) + c_2 \left(\left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8} \right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x) \right) + \\ & + \sum_{k=3}^n c_k \left(-\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{U_{k+2}(x)}{8(k+2)} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Перегруппировав это выражение, будем иметь разложение второго интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) \ln|t-x| dt = \sum_{k=0}^{n+2} B_k U_k(x). \quad (5.24)$$

Значения B_k нетрудно выписать на основании (5.23), чем мы воспользуемся в дальнейшем.

Рассмотрим третий интеграл. В качестве $K_{n,n}(x, t)$ выберем (1.12):

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t),$$

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

С учетом (5.20) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) U_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j+k}(t) + U_{j-k}(t)) dt \right) = \\ & = \sum_{m=0}^n U_m(x) \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n c_k k_{m,k} + c_0 k_{m,0} \right) = \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} \frac{k_{m,k}}{2}, & k = 0, \\ \frac{k_{m,k}}{4}, & k > 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Следовательно, получено разложение третьего интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = \sum_{m=0}^n D_m U_m(x), \quad (5.27)$$

где $D_m = \sum_{k=0}^n c_k \omega_{m,k}^*$.

Собирая вместе разложение каждого из трех интегралов по формулам (5.22), (5.25), (5.27), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода, а справа – функцию $f_{n+2}(x)$ в виде (1.4):

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n U_j(x),$$

$$f_j^n = G_j^n - G_{j+2}^n, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^n = G_{n-1}^n, \quad f_n^n = G_n^n,$$

$$G_j^n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n},$$

$$x_k^n = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Получим

$$\sum_{k=0}^n (A_k + B_k + D_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} B_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k^{n+2} U_k(x).$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда имеет место следующая система:

$$A_k + B_k + D_k = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$B_k = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}.$$

Выполнив простейшие преобразования, отсюда придем к такой системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, 1},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{2, n-4}, \quad (5.28)$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-3, n-2},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^n c_q \omega_{k,q}^* = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-1, n},$$

$$\alpha_k c_{k-2} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2},$$

где коэффициенты $\omega_{k,q}^*$ вычисляются согласно (5.26),

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{8}, k = 2, \\ \frac{1}{8k}, k = \overline{3, 4}, \\ \frac{1}{8(k-2)}, k > 4, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} -\frac{\ln 2}{2} - \frac{9}{8}, k = 0, \\ -\frac{7}{6}, k = 1, \\ -\frac{4(k+1)^3 - k}{8k(k+2)}, k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\ln 2}{4} + \frac{5}{8}, k = 0, \\ \frac{4(k+1)^3 - k - 2}{8k(k+2)}, k > 0, \end{cases}$$

$$\delta_k = \begin{cases} -\frac{1}{16}, k = 0, \\ -\frac{1}{8(k+2)}, k > 0. \end{cases}$$

Решив систему (5.28) относительно неизвестных $c_k, k = 0, 1, \dots, n$, при $n \geq 7$, приближенное решение задачи (5.1), (5.2) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (5.29)$$

Описание и листинг функции по решению системы (5.28) (файл «Syst_5_27.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (5.28).

Прототип: *Syst(Fk, Ff, n)*.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

Ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: $KmjUU, fjU$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (5.28).

```

Syst(Fk, Ff, n) := Fkz ← KmjUU(Fk, n)
                  Fβ(k) ← | return  $-\frac{9}{8} - \frac{\ln(2)}{2}$  if k = 0
                  -----|
                  | return  $-\frac{7}{6}$  if k = 1
                  |-----|
                  | return  $-\frac{4 \cdot (k+1)^3 - k}{8 \cdot k \cdot (k+2)}$  otherwise
                  |
                  Fα(k) ← | return  $\frac{1}{8}$  if k = 2
                  |-----|
                  | return  $\frac{1}{8 \cdot k}$  if k = 3 ∨ k = 4
                  |-----|
                  | return  $\frac{1}{8 \cdot (k-2)}$  otherwise
                  |
                  Fγ(k) ← | return  $\frac{5}{8} + \frac{\ln(2)}{4}$  if k = 0
                  |-----|
                  | return  $\frac{4 \cdot k^3 + 12 \cdot k^2 + 11 \cdot k + 2}{8 \cdot k \cdot (k+2)}$  otherwise
                  |
                  Fδ(k) ← | return  $-\frac{1}{16}$  if k = 0
                  |-----|
                  | return  $-\frac{1}{8 \cdot (k+2)}$  otherwise
                  |
                  Fω ← | for k ∈ 0..n
                  |     | for m ∈ 0..n
                  |     |     | ωk,m ←  $\frac{Fkz_{k,m}}{4}$ 
                  |     |     | ωk,m ← 2 · ωk,m if m = 0
                  |     |     |
                  |     | ω
                  |     |
                  |     | for k ∈ 0..n + 2
                  |     |     | for m ∈ 0..n
                  |     |     |     | Ak,m ← 0
                  |     |     |
                  |     |
                  |

```

```

for k ∈ 0..1
  | Ak,k ← Fβ(k)
  | Ak,k+2 ← Fγ(k)
  | Ak,k+4 ← Fδ(k)
for k ∈ 2..n - 4
  | Ak,k-2 ← Fα(k)
  | Ak,k ← Fβ(k)
  | Ak,k+2 ← Fγ(k)
  | Ak,k+4 ← Fδ(k)
for k ∈ n - 3..n - 2
  | Ak,k-2 ← Fα(k)
  | Ak,k ← Fβ(k)
  | Ak,k+2 ← Fγ(k)
for k ∈ n - 1..n
  | Ak,k-2 ← Fα(k)
  | Ak,k ← Fβ(k)
for k ∈ n + 1..n + 2
  Ak,k-2 ← Fα(k)
ω ← Fω
for k ∈ 0..n
  for m ∈ 0..n
    Ak,m ← Ak,m + ωk,m
FN ← fjU(Ff,n + 2)
c ← lsolve(A,FN)
c

```

Результаты численных экспериментов

Применим полученный алгоритм к приближенному решению задачи (5.1), (5.2) при

$$k(x, t) = \frac{x^3 t}{(x^2 + 1)(t^2 + 1)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x - \frac{(2\sqrt{2} - 3)x^3}{x^2 + 1}.$$

Несложно показать, что решением задачи (5.1), (5.2) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$.

$$+\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t)K(x, t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (5.30)$$

$$\varphi(\pm 1) = 0. \quad (5.31)$$

Здесь $M(x, t)$, $K(x, t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гельдера H ,

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}v(x), \quad (5.32)$$

где $v(x)$ – ограниченная функция при $x \in [-1, 1]$.

Приближенное решение задачи (5.30), (5.31)

Рассмотрим вычислительную схему численного решения уравнения (5.30) при условии (5.31) и (5.32).

Приближенное решение уравнения (5.30) будем искать как решение следующей задачи относительно новой неизвестной функции $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_n(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_{n,n}(x, t)\varphi_n(t) \ln|t-x| dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t)K_{n,n}(x, t)dt = f_{3n+2}(x), \quad |x| < 1, \quad \varphi_n(\pm 1) = 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где $M_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен вида (1.8) функции $M(x, t)$ степени n по обеим переменным; $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен функции $K(x, t)$ степени n по обеим переменным; $f_{3n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ степени $3n+2$; $\varphi_n(x)$ – некоторое приближение к искомой функции.

Отметим, что, согласно [14, с. 87], уравнение (5.33) также разрешимо.

Чтобы получить явное выражение для $\varphi_n(x)$, введем новую функцию

$$v_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_n(t)}{t-x} dt. \quad (5.34)$$

Тогда, выполняя обращение интеграла (5.34) в классе неограниченных функций, получим

$$\varphi'_n(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}v_n(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Далее, учитывая, что $\varphi_n(-1) = 0$, имеем

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^x \varphi'_n(\tau) d\tau = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}v_n(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) v_n(t) dt + \mu(x), \quad \mu(x) = c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.35)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, t) &= -\sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \\ &= -\sqrt{1-t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|} \right) = -\ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}. \end{aligned}$$

Замечая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, находим $c = 0$.

Функция $H(x, t)$ симметрическая и неположительная. В самом деле

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H(\cos \theta, \cos \sigma) = -\ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = \\ &= -\ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \leq 0, \quad 0 < \sigma, \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Пусть далее

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (5.36)$$

где c_k , $k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Тогда из (5.34)–(5.36) следует, что

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k U_k(x), \quad (5.37)$$

так как

$$\varphi_n(x) = -\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{v_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} T_{k+1}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k A_k(x),
\end{aligned}$$

где

$$A_k(x) = \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = -\frac{1}{k+1} \sin((k+1) \arccos(x)) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1} U_k(x), \quad k \geq 0.$$

Этим получено представление $\varphi_n(x)$ через многочлены Чебышева второго рода.

Введем операторы:

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_{n,n}(x, t) \varphi_n(t) \ln|t-x| dt, \quad (5.38)$$

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.33) с учетом введенных операторов в эквивалентной форме имеет вид

$$v_n(x) + I(\varphi_n; x) + k(\varphi_n; x) = f_{3n+2}(x). \quad (5.40)$$

На основании полученного представления (5.37) выполним эквивалентные преобразования и явно вычислим входящие в (5.38) и (5.39) интегралы. Имеем

$$\begin{aligned}
I(\varphi_n; x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) M_{n,n}(x, t) \ln|t-x| dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \beta_k c_k U_k(t) M_{n,n}(x, t) \ln|t-x| dt = \\
&= \sum_{k=0}^n \beta_k c_k J_k(x), \quad \beta_k = -\frac{1}{k+1},
\end{aligned} \quad (5.41)$$

где

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} M_{n,n}(x, t) U_k(t) \ln|t-x| dt. \quad (5.42)$$

Упростим функцию (5.42), выписав интерполяционный многочлен вида (1.12) для функции $M(x, t)$:

$$M_{n,n}(x, t) = \sum_{q=0}^n U_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} U_j(t),$$

$$m_{q,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=0}^n (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)) \sum_{l=0}^n M(x_l, x_r) (T_q(x_l) - \sigma_q T_{q+2}(x_l)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_q = \begin{cases} 1, & q = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & q = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Тогда

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^n U_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \sum_{q=0}^n U_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} L_{k,j}(x), \quad (5.43)$$

где

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) \ln|t-x| dt.$$

Учтем, что

$$\sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) = \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{2\sqrt{1-t^2}},$$

и воспользуемся формулой (1.18):

$$L_{k,j}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{|k-j|}(t) - T_{k+j+2}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt =$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)).$$

Учитывая данное упрощение, из (5.43) получим

$$J_k(x) = \sum_{q=0}^n U_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} \frac{1}{2} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)). \quad (5.44)$$

На основании (5.44) из (5.41) окончательно имеем

$$I(\varphi_n; x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \beta_k c_k \sum_{q=0}^n U_q(x) \sum_{j=0}^n m_{q,j} (\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x)).$$

Далее по аналогии с предыдущим упростим

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt.$$

Для этого выпишем интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции $K(x, t)$ вида (1.12), используя свойства ортогональности многочленов Чебышева второго рода, упростим (5.39):

$$\begin{aligned} k(\varphi_n; x) &= \sum_{k=0}^n \beta_k c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \beta_k c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} \rho_{k,j}, \quad \rho_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$k(\varphi_n; x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k \beta_k \sum_{m=0}^n U_m(x) k_{m,k}. \quad (5.45)$$

Следовательно, (5.45) – разложение оператора $k(\varphi_n; x)$ по многочленам Чебышева второго рода.

Окончательно из уравнения (5.33) получено разрешимое уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k U_k(x) - \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{2k+2} \sum_{q=0}^n U_q(x) \left[\sum_{j=0}^n m_{q,j} S_{k,j}(x) + k_{q,k} \right] &= f_{3n+2}(x), \\ S_{k,j}(x) &= \left(\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x) \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Взяв в (5.46) в качестве внешних узлов точки $x_l = \cos \frac{2l+1}{2n+2} \pi$, $l = \overline{0, n}$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$:

$$\sum_{k=0}^n c_k a_{l,k} = f_{3n+2}(x_l), \quad l = \overline{0, n}, \quad (5.47)$$

где

$$\begin{aligned} a_{l,k} &= U_k(x_l) - \\ &- \frac{1}{2k+2} \sum_{q=0}^n U_q(x_l) \left[\sum_{j=0}^n m_{q,j} \left(\alpha_{|k-j|} T_{|k-j|}(x_l) - \alpha_{k+j+2} T_{k+j+2}(x_l) \right) + k_{q,k} \right]. \end{aligned}$$

Замечание. В системе (5.47) при численном решении данного уравнения в качестве правой части будем использовать $f(x_l)$, $l = \overline{0, n}$.
 Приближенное решение $\varphi_n(x)$ вычисляется по формуле (5.37):

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} c_k U_k(x).$$

**Описание и листинг функции по решению системы (5.47)
 (файл «Syst_5_46.xmcd»)**

Функция Syst.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов c_k , $k = \overline{0, n}$, из системы (5.47).

Прототип: $Syst(Fk, FM, Ff, n)$.

Параметры:

n – порядок системы;

Fk – имя модуля, вычисляющего значение функции $K(x, t)$;

Fm – имя модуля, вычисляющего значение функции $M(x, t)$;

Ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Используемые модули: $KmjUU$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов c_k , $k = \overline{0, n}$, как решение системы (5.47).

Syst(FK, FM, FF, n) :=	<table border="1"> <tr> <td style="vertical-align: top;">F_x(n) ←</td> <td style="vertical-align: top;"> for 1 ∈ 0..n $x_1 \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right)$ x </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;">α_k(n) ←</td> <td style="vertical-align: top;"> Y₀ ← -ln(2) for k ∈ 1..2 · n + 2 $Y_k \leftarrow -\frac{1}{k}$ Y </td> </tr> <tr> <td style="vertical-align: top;">FU_{ch}(n) ←</td> <td style="vertical-align: top;"> x ← F_x(n) for 1 ∈ 0..n for m ∈ 0..n $Y_{m,1} \leftarrow Ucheb(m, x_1)$ Y </td> </tr> </table>	F _x (n) ←	for 1 ∈ 0..n $x_1 \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right)$ x	α _k (n) ←	Y ₀ ← -ln(2) for k ∈ 1..2 · n + 2 $Y_k \leftarrow -\frac{1}{k}$ Y	FU _{ch} (n) ←	x ← F _x (n) for 1 ∈ 0..n for m ∈ 0..n $Y_{m,1} \leftarrow Ucheb(m, x_1)$ Y
F _x (n) ←	for 1 ∈ 0..n $x_1 \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right)$ x						
α _k (n) ←	Y ₀ ← -ln(2) for k ∈ 1..2 · n + 2 $Y_k \leftarrow -\frac{1}{k}$ Y						
FU _{ch} (n) ←	x ← F _x (n) for 1 ∈ 0..n for m ∈ 0..n $Y_{m,1} \leftarrow Ucheb(m, x_1)$ Y						

```

FUch(n) ← | x ← Fx(n)
           | for l ∈ 0..n
           |   for m ∈ 0..n
           |     Ym,l ← Ucheb(m, xl)
           | Y
FTch(n) ← | x ← Fx(n)
           | for l ∈ 0..n
           |   for m ∈ 0..2 · n + 2
           |     Ym,l ← Tcheb(m, xl)
           | Y
for l ∈ 0..n
  | x ← cos( (2 · l + 1) / (2 · n + 2) · π )
  | Fl ← FF(x)
Fk ← KmjUU(FK, n)
Fm ← KmjUU(FM, N)
FT ← FTch(n)
α ← αk(n)
FU ← FUch(n)
for l ∈ 0..n
  for k ∈ 0..n
    | s ← ∑q=0n [ FUq,l · [ Fkq,k + ∑j=0n [ Fmq,j · (α|k-j| · FT|k-j|,1 - αk+j+2 · FTk+j+2,1) ] ] ]
    | al,k ← FUk,l - 1 / (2 · k + 2) (s)
c ← lsolve(a, F)
c

```

Результаты численных экспериментов

Применим полученный алгоритм к приближенному решению задачи (5.30), (5.31), (5.32) при

$$K(x, t) = \frac{x^3 t}{(1+x^2)(1+t^2)}, \quad M(x, t) = \frac{2xt^2 - x}{1+x^2},$$

$$f(x) = \frac{4x^4}{5} - \frac{32x^2}{15} + \frac{x(60\sqrt{2} - 90) - 79}{30(x^2 + 1)} - x(2\sqrt{2} + 1) + \frac{79}{30}.$$

Несложно показать, что решением этой задачи является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Решая систему (5.47) при $n = 7, 14, 18$, получим точное решение $\varphi(x)$, отличное от приближенного $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (5.37), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $3,6 \cdot 10^{-7}$, $1,6 \cdot 10^{-12}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно.

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения (5.47)
(файл «Exampl_5_46.xmcd»)**

$$F_k(x, t) := \frac{x^3}{1+x^2} \cdot \frac{t}{1+t^2}$$

$$F_m(x, t) := \frac{x \cdot 2 \cdot t^2 - x}{1+x^2}$$

$$F_F(x) := \frac{4 \cdot x^4}{5} - \frac{32 \cdot x^2}{15} + \frac{x \cdot (60 \cdot \sqrt{2} - 90) - 79}{30 \cdot (x^2 + 1)} - x \cdot (2 \cdot \sqrt{2} + 1) + \frac{79}{30}$$

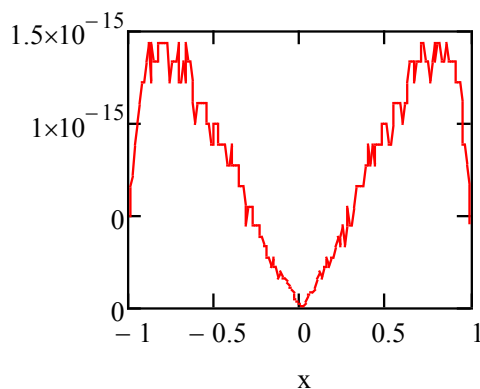
$$\varphi(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot (2 \cdot x)$$

$$\varphi_n(x, c, n) := \begin{cases} s \leftarrow - \sum_{k=0}^n \left(\frac{c_k}{k+1} \cdot \text{Ucheb}(k, x) \right) \\ s \cdot \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$c := \text{Syst}(F_k, F_m, F_F, N)$

$x := -0.99, -0.98.. 0.99$ $N \equiv 18$

$|\varphi_n(x, c, N) - \varphi(x)|$



6. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (6.1)$$

которое называется уравнением Прандтля [8; 9; 25]. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса \mathbb{C} $\Gamma(x)$ – искомая функция. К уравнению (6.1) присоединяются дополнительные условия

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (6.2)$$

Число работ, посвященных этому уравнению, огромно. Известно, что указанное уравнение точно решается лишь в редких частных случаях [8]. Значительная часть публикаций, начиная с самой первой, относится к вопросу разработки и обоснования приближенных методов решения уравнения (6.1). Среди приближенных методов наиболее распространенным является метод Мультихотта.

В данной главе предлагаются разные вычислительные схемы для численного решения уравнения (6.1). Первоначально уравнение сводится к равносильному уравнению с логарифмической особенностью. Указываются условия разрешимости полученного уравнения. Вычислительные схемы основаны на применении к интегралу, входящему в уравнение, которое равносильно исходному, спектральных соотношений для сингулярного интеграла. Отметим, что в [24] предложена и обоснована вычислительная схема для уравнения (6.1), близкая по структуре к схеме Мультихотта, но отличающаяся от предложенной ниже.

Схема 1

Сведем уравнение (6.1) к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью.

Пусть

$$u(x) \triangleq \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \quad (6.3)$$

Применим формулу обращения этого сингулярного интеграла в классе функций $h(0)$:

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Здесь c – произвольная постоянная. Отсюда с учетом (6.2) получим

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right), \\ H(x, t) &= \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Замечая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, находим $c = 0$.

Кроме того, что функция $H(x, t)$ симметрична, она еще и неотрицательна. В самом деле

$$\begin{aligned}H(x, t) &= H(\cos \theta, \cos \sigma) = \ln \frac{1 - \cos(\theta + \sigma)}{2 \sin \frac{\theta + \sigma}{2} \left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} = \ln \frac{\sin \frac{\theta + \sigma}{2}}{\left| \sin \frac{\theta - \sigma}{2} \right|} \geq 0, \\ &0 < \sigma, \theta \leq \pi.\end{aligned}$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt, \quad (6.5)$$

введем линейный оператор

$$K(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt. \quad (6.6)$$

Тогда граничная задача (6.1), (6.2) сводится к уравнению

$$u(x) + K(u; x) = f(x). \quad (6.7)$$

Учитывая (6.4), (6.6) и применяя в (6.5) формулу интегрирования по частям, получим равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x}, \quad \Phi'(x) = u(x). \quad (6.8)$$

Отсюда с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [13, с. 58]) заключаем, что оператор $K(u; x)$ отображает пространство \mathbb{C} в себя, если функция $B^{-1}(x) \in \mathbb{C}$ или даже $b^{-1}(x) \in \mathbb{C}$, где $b(x) = \frac{B(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Кроме того,

$$\|Ku\|_{\mathbb{C}} \leq \rho \|u\|_{\mathbb{C}} \quad (6.9)$$

где

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|} \right). \quad (6.10)$$

Теорема 6.1. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (6.1), удовлетворяет условию

$$\rho < 1, \quad \rho = \max_{|x| \leq 1} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|B(x)|} \right). \quad (6.11)$$

Тогда уравнение (6.7), а вместе с ним и граничная задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}$

На основании (6.7) и (6.3) приближенное решение уравнения (6.1) при условии (6.2) найдем как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x), \quad (6.12)$$

где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса \mathbb{C} такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$,

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$K(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt \quad (6.13)$$

и $u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt$ – многочлен степени n .

Пусть

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (6.14)$$

где $c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Очевидно, что для уравнения (6.12) с оператором (6.13), тождественным (6.6), имеет место аналог теоремы 1, т. е. вследствие (6.9)–(6.11) уравнение (6.12) также разрешимо.

Используя (6.14) и (1.17), упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K(u_n; x)$:

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \quad (6.15)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= - \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (6.13) и (6.15) следует, что

$$K(u_n; x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \quad (6.16)$$

Уравнение (6.12) с учетом (6.14), (6.16) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(1 + \frac{1}{k+1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \right) U_k(x) = F_n(x). \quad (6.17)$$

В качестве внешних узлов x в (6.17) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Из (6.17) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_j^2}}{B(x_j)} \frac{1}{k+1} + 1 \right) U_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.18)$$

Приближенное решение задачи (6.1), (6.2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (6.15):

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x).$$

**Описание и листинг функции по решению системы (6.18)
(файл «Syst_6_18.xmcd»)**

Функция Syst.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (6.18).

Прототип: Syst(*fB*, *f*, *n*).

Параметры:

n – степень многочлена $\Gamma_n(x)$;

f – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

fB – имя модуля, вычисляющего значение функции $B(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (6.18).

```

Syst(fB, f, n) :=
  for j ∈ 0.. n
  |
  | xj ← cos( (2 · j + 1) / (2 · n + 2) · π )
  | Bj ← fB(xj)
  | for k ∈ 0.. n
  | | Ukj ← Ucheb(k, xj)
  | | Aj, k ← [ ( √(1 - (xj)2) / Bj · 1 / (k + 1) + 1 ) ] · Ukj
  | for j ∈ 0.. n
  | Fj ← f(xj)
  c ← lsolve(A, F)
  c
  
```

Замечание. Рассматривая случай, когда функция $B(x) = b\sqrt{1-x^2}$, $b = \text{const}$, в уравнении (6.17) в качестве $F_n(x)$ возьмем интерполяционный многочлен (1.4). Тогда уравнение (6.17) переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{b} \frac{1}{k+1} + 1 \right) U_k(x) = \sum_{k=0}^n f_k U_k(x). \quad (6.19)$$

Отсюда следует, что решением системы (6.19) являются числа

$$c_k = f_k \left(\frac{1}{b} \frac{1}{k+1} + 1 \right)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (6.20)$$

f_k вычисляются в соответствии с (1.4).

**Описание и листинг функции по вычислению
значения коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$ (файл «Syst_6_20.xmcd»)**

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, по формуле (6.20).

Прототип: *Syst(fB, f, n)*.

Параметры:

n – степень многочлена $\Gamma_n(x)$;

b – значение константы b из функции $B(x) = b\sqrt{1-x^2}$;

f – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, вычисленное по формуле (6.20).

$\text{Syst}(fB, f, n) := \left \begin{array}{l} F \leftarrow fU(f, n) \\ \text{for } k \in 0..n \\ \\ c_k \leftarrow F_k \cdot \left[\frac{1}{fB \cdot (k+1)} + 1 \right]^{-1} \\ \\ c \end{array} \right.$
--

Схема 2

Обратимся снова к уравнению Прандтля (6.1) с дополнительными условиями (6.2). Сведем уравнение (6.1) к уравнению с логарифмической особенностью в классе функций $h(-1, 1)$.

Пусть

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \tag{6.21}$$

Так как для интеграла (6.21) очевидно выполнены условия разрешимости $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0$, применим формулы обращения сингулярного интеграла (6.21) в указанном классе функций – классе функций $h(-1, 1)$, ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$:

$$\Gamma'(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда имеем при условии (6.2)

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt, \quad (6.22)$$

$$H_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_1^0(x, t) + H(x, t), \quad (6.23)$$

где

$$H_1^0(x, t) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + t(\pi - \arccos x)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (6.24)$$

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}. \quad (6.25)$$

Функция $H(x, t)$ симметрична и неотрицательна.

На основании (6.23) имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_1(x, t)| dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_1^0(x, t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) dt \leq 2 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi} \right) < \pi.$$

Принимая во внимание (6.22)–(6.25), введем линейный оператор

$$K_1(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(H_1^0(x, t) + H(x, t) \right) u(t) dt.$$

Тогда граничная задача (6.1), (6.2) сводится к уравнению

$$u(x) + K_1(u; x) = f(x), \quad (6.26)$$

где

$$K_1(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u(t) dt. \quad (6.27)$$

По аналогии с предыдущим получим следующие теоремы.

Теорема 6.2. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (6.1), удовлетворяет условию

$$\rho_1 < 1, \quad \rho_1 = \max_{|x| \leq 1} \left(2 \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi - \arccos x}{\pi} \right) / |B(x)| \right). \quad (6.28)$$

Тогда уравнение (6.26) с оператором (6.27), а вместе с ним и граничная задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1, 1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}$

На основании (6.26) и (6.21) приближенное решение уравнения (6.1) при условии (6.2) найдем как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K_1(u_n; x) = F_n(x), \quad (6.29)$$

где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$, такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$,

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$K_1(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt \quad (6.30)$$

и $u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt$ – многочлен степени n . Пусть

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (6.31)$$

где $c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Очевидно, что уравнение (6.29) в следствии (6.28) также разрешимо.

Для обращения сингулярного интеграла (6.31) в классе ограниченных функций подчиним (6.31) условию разрешимости $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$, т. е.

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \text{ Следовательно, } c_0 = 0.$$

Используя (6.31) и учитывая (1.17), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_1(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k^1(x), \quad (6.32)$$

$$\gamma_k^1(x) = \int_{-1}^x \sin(k \arccos \tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin x \right), & k=1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k>1, \end{cases} \quad (6.33)$$

так как

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_1(x, t) u_n(t) dt = \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \left(\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\
&= \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^n c_k \int_{-1}^x \sin(k \arccos \tau) d\tau = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k(x).
\end{aligned}$$

Поэтому из (6.30), (6.32) и (6.33) следует, что

$$K_1(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k(x). \quad (6.34)$$

Уравнение (6.29) с учетом (6.34) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=1}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k^1(x) + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (6.35)$$

В качестве внешних узлов x в (6.35) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = \overline{1, n}$. Из (6.35) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k \left(\frac{1}{B(x_j)} \gamma_k^1(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (6.36)$$

На основании вышеприведенного система (6.36) разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = \overline{1, n}$.

Приближенное решение задачи (6.1), (6.2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (6.32):

$$\Gamma_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k^1(x).$$

Описание и листинг функции по решению системы (6.36) (файл «Syst_6_36.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (6.36).

Прототип: *Syst(fB, f, n)*.

Параметры:

n – степень многочлена $\Gamma_n(x)$;

f – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

fB – имя модуля, вычисляющего значение функции $B(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k=0, n$, как решение системы (6.36).

$$\text{Syst}(fB, ff, n) := \left\{ \begin{array}{l} f\gamma(k, x) \leftarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + 2 \cdot \text{asin}(x)) & \text{if } k = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{\text{Ucheb}(k, x)}{k+1} - \frac{\text{Ucheb}(k-2, x)}{k-1} \right) & \text{if } k > 1 \end{cases} \\ \text{for } j \in 1..n \\ \left\{ \begin{array}{l} x_j \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot j + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right) \\ F_j \leftarrow ff(x_j) \\ B_j \leftarrow fB(x_j) \\ \text{for } k \in 1..n \\ \left\{ \begin{array}{l} Tkj \leftarrow \text{Tcheb}(k, x_j) \\ A_{j,k} \leftarrow \frac{1}{B_j} \cdot f\gamma(k, x_j) + Tkj \end{array} \right. \end{array} \right. \\ c \leftarrow \text{lsolve}(A, F) \\ c \end{array} \right.$$

Схема 3

Применим еще формулы обращения сингулярного интеграла (6.21) в классе ограниченных в окрестности точки $x = 1$ функций и получим

$$\Gamma'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u(t) dt, \quad (6.37)$$

где

$$H_2(x, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_2^0(x, t) + H(x, t),$$

$$H_2^0(x, t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (\pi - \arccos x), \quad H(x, t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Очевидно, что функция $H_2(x, t)$ неотрицательна и имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_2(x, t)| dt \leq \pi - \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} \leq \pi.$$

Тогда граничная задача (6.1), (6.2) сводится к уравнению

$$u(x) + K_2(u; x) = f(x), \quad (6.38)$$

где

$$K_2(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u(t) dt. \quad (6.39)$$

Теорема 6.3. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (6.1), удовлетворяет условию

$$\rho_2 < 1, \quad \rho_2 = \max_{|x| \leq 1} \left(\left(\pi - \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} \right) / |B(x)| \right). \quad (6.40)$$

Тогда уравнение (6.38) с оператором (6.39), а вместе с ним и граничная задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}$

Используя полученные выше уравнения Фредгольма (6.26), (6.38), получим следующие вычислительные схемы.

На основании (6.38) и (6.21) приближенное решение уравнения (6.1) при условии (6.2) найдем как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K_2(u_n; x) = F_n(x), \quad (6.41)$$

где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса \mathbb{C} такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$,

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$K_2(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt \quad (6.42)$$

и $u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt$ – многочлен степени n . Пусть

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (6.43)$$

где $c_k, k = 0, 1, \dots, n$, – пока неизвестные постоянные.

Очевидно, что уравнение (6.41) также разрешимо.

Используя (6.43) и учитывая (1.17), как и ранее, вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_2(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^2(x), \quad (6.44)$$

$$\gamma_k^2(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} d\tau, & k=0, \\ \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau, & k>0, \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + \pi - \arccos x, & k=0, \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin x \right), & k=1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k>1, \end{cases} \quad (6.45)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_2(x, t) u_n(t) dt &= \int_{-1}^x \left(\frac{\sqrt{1-\tau}}{\sqrt{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\tau+t-\tau}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) \frac{dt}{t-\tau} = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \left((1+\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-\tau} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^2(x). \end{aligned}$$

Поэтому из (6.42), (6.44) и (6.45) следует, что

$$K_2(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^2(x). \quad (6.46)$$

Уравнение (6.41) с учетом (6.46) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k^2(x) + \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (6.47)$$

В качестве внешних узлов x в (6.47) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = \overline{0, n}$. Из (6.47) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{B(x)} \gamma_k^2(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.48)$$

**Описание и листинг функции по решению системы (6.48)
(файл «Syst_6_48.xmcd»)**

Функция Syst.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (6.48).

Прототип: Syst(fB, f, n).

Параметры:

n – степень многочлена $\Gamma_n(x)$;

f – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

fB – имя модуля, вычисляющего значение функции $B(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (6.48).

```
Syst(fB, ff, n) :=
  |
  | fγ(k, x) ←
  |   |
  |   | √(1-x²) + π - acos(x) if k = 0
  |   | 1/4 · (π + 2·x·√(1-x²) + 2·asin(x)) if k = 1
  |   | √(1-x²) · (Ucheb(k, x)/(k+1) - Ucheb(k-2, x)/(k-1)) if k > 1
  |   |
  |   | for j ∈ 1..n
  |   |   |
  |   |   | xj ← cos((2·j+1)/(2·n+2) · π)
  |   |   | Fj ← ff(xj)
  |   |   | Bj ← fB(xj)
  |   |   | for k ∈ 1..n
  |   |   |   |
  |   |   |   | Tkj ← Tcheb(k, xj)
  |   |   |   | Aj,k ← 1/Bj · fγ(k, xj) + Tkj
  |   |   |
  |   | c ← lsolve(A, F)
  |   |
  | c
```

Система (6.48) разрешима и имеет единственное решение $c_k, k = \overline{0, n}$.

Приближенное решение задачи (6.1), (6.2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (6.44).

Схема 4

Применим еще формулы обращения сингулярного интеграла (6.21) в классе функций, ограниченных в окрестности точки $x = -1$, и получим

$$\Gamma'(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{u(t)}{t-x} dt.$$

Отсюда

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u(t) dt, \quad (6.49)$$

$$H_3(x, t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = H_3^0(x, t) + H(x, t),$$

$$H_3^0(x, t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} (\arccos x - \pi),$$

$$H(x, t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}.$$

Таким образом, уравнение (6.1) свелось к уравнению

$$u(x) + K_3(u; x) = f(x), \quad (6.50)$$

$$K_3(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u(t) dt. \quad (6.51)$$

Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H_3(x, t)| dt \leq \pi - \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} \leq \pi.$$

Теорема 6.4. Пусть функция $B(x)$, входящая в уравнение (6.1), удовлетворяет условию

$$\rho_3 < 1, \quad \rho_3 = \max_{|x| \leq 1} \left(\left(\pi - \arccos(x) + \sqrt{1-x^2} \right) / |B(x)| \right). \quad (6.52)$$

Тогда уравнение (6.50) с оператором (6.51), а вместе с ним и граничная задача (6.1), (6.2), имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(-1)$ при любой $f(x) \in \mathbb{C}$

На основании (6.50) и (6.21) приближенное решение уравнения (6.1) при условии (6.2) найдем как решение следующего уравнения

$$u_n(x) + K_3(u_n; x) = F_n(x), \quad (6.53)$$

где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса \mathbb{C} такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$,

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = \overline{0, n},$$

$$K_3(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt \quad (6.54)$$

и $u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt$ – многочлен степени n . Пусть

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (6.55)$$

где $c_k, k = \overline{0, n}$, – пока неизвестные постоянные.

Уравнение (6.53) вследствие (6.52) также разрешимо.

Используя (6.55) и учитывая (1.17), вычислим и упростим $\Gamma_n(x)$, а этим и $K_3(u_n; x)$.

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^3(x), \quad (6.56)$$

$$\gamma_k^3(x) = \begin{cases} -\int_{-1}^x \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} d\tau, & k=0, \\ \int_{-1}^x \sqrt{1-\tau^2} U_{k-1}(\tau) d\tau, & k>0, \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 3\pi - \arccos x, & k=0, \\ \frac{1}{\pi} \left(\pi + 2x\sqrt{1-x^2} + 2 \arcsin x \right), & k=1, \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \left(\frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{U_{k-2}(x)}{k-1} \right), & k>1, \end{cases} \quad (6.57)$$

так как

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H_3(x, t) u_n(t) dt = \int_{-1}^x \left(\frac{\sqrt{1+\tau}}{\sqrt{1-\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t} u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{T_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \left((1-\tau) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) d\tau = \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^3(x).
\end{aligned}$$

Поэтому из (6.54), (6.56) и (6.57) следует, что

$$K_3(u_n; x) = \frac{1}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \gamma_k^3(x). \quad (6.58)$$

Уравнение (6.53) с учетом (6.58) в заданном классе переходит в уравнение

$$\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{B(x)} \gamma_k^3(x) + \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = F_n(x). \quad (6.59)$$

В качестве внешних узлов x в (6.59) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = \overline{1, n}$. Из (6.59) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{1}{B(x)} \gamma_k^3(x_j) + T_k(x_j) \right) = f(x_j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (6.60)$$

Описание и листинг функции по решению системы (6.60) (файл «Syst_6_60.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (6.60).

Прототип: *Syst(fB, f, n)*.

Параметры:

n – степень многочлена $\Gamma_n(x)$;

f – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$;

fB – имя модуля, вычисляющего значение функции $B(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (6.60).

$$\begin{aligned}
\text{Syst}(fB, ff, n) := & \left. \begin{aligned}
f\gamma(k, x) \leftarrow & \begin{cases}
-\sqrt{1-x^2} + 3 \cdot \pi - \text{acos}(x) & \text{if } k = 0 \\
\frac{1}{4} \cdot (\pi + 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + 2 \cdot \text{asin}(x)) & \text{if } k = 1 \\
\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{\text{Ucheb}(k, x)}{k+1} - \frac{\text{Ucheb}(k-2, x)}{k-1} \right) & \text{if } k > 1
\end{cases} \\
\text{for } j \in 1..n & \\
\left. \begin{aligned}
x_j \leftarrow & \cos\left(\frac{2 \cdot j + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right) \\
F_j \leftarrow & ff(x_j) \\
B_j \leftarrow & fB(x_j) \\
\text{for } k \in 1..n & \\
\left. \begin{aligned}
Tkj \leftarrow & \text{Tcheb}(k, x_j) \\
A_{j,k} \leftarrow & \frac{1}{B_j} \cdot f\gamma(k, x_j) + Tkj
\end{aligned} \right. \\
c \leftarrow & \text{lsolve}(A, F) \\
c &
\end{aligned} \right.
\end{aligned}
\end{aligned}$$

Приближенное решение задачи (6.1), (6.2) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется согласно (6.56).

Результаты численных экспериментов

Схема 1

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = \\
& = \frac{1}{B(x)} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \text{arcth} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} + 1, \quad -1 < x < 1. \quad (6.61)
\end{aligned}$$

Пусть $B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2}$. Несложно показать, что решением задачи (6.61), (6.2) в данном случае является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \text{arcth} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right). \quad (6.62)$$

**Описание и листинг по приближенному решению
уравнения Прандтля согласно схеме 1
(файл «Exampl_6_18.xmcd»)**

$$fB(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{4 \cdot x^2 + 1.1}{2 \cdot x^2 + 1}$$

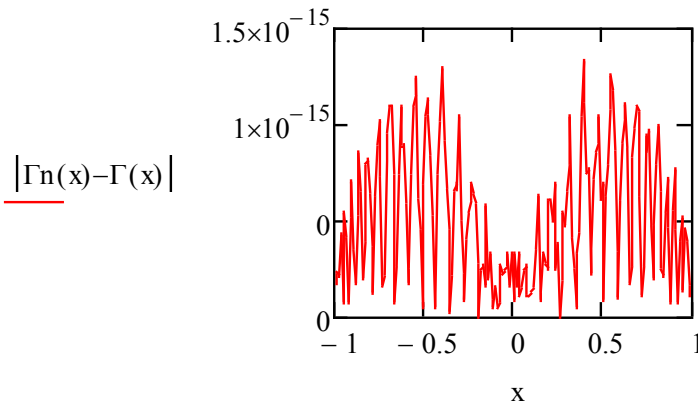
$$ff(x) := \frac{1}{fB(x)} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1} + 1$$

$$\Gamma(x) := \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$c := \operatorname{Syst}(fB, ff, n) \quad n \equiv 34$$

$$\Gamma_n(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{c_k}{k+1} \cdot \operatorname{Ucheb}(k, x) \right)$$

$$x := -0.99, -0.98..0.99$$



Решая систему (6.18) при $n = 10, 34$, получим точное решение $\Gamma(x)$, отличное от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (6.15), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,5 \cdot 10^{-6}$ и $1,3 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом соответственно $\operatorname{conde} \leq 25$ и $\operatorname{conde} \leq 142$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (6.61). Пусть

$$B(x) = 6\sqrt{1-x^2}.$$

Решением задачи (6.61), (6.2) и в данном случае является функция (6.62).

**Описание и листинг по приближенному решению
уравнения Прандтля согласно схеме 1
(файл «Exampl_6_20.xmcd»)**

$$ff(x) := 1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}{2}\right) - \sqrt{1-x^2}}{6 \cdot \sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

$$fB := 6$$

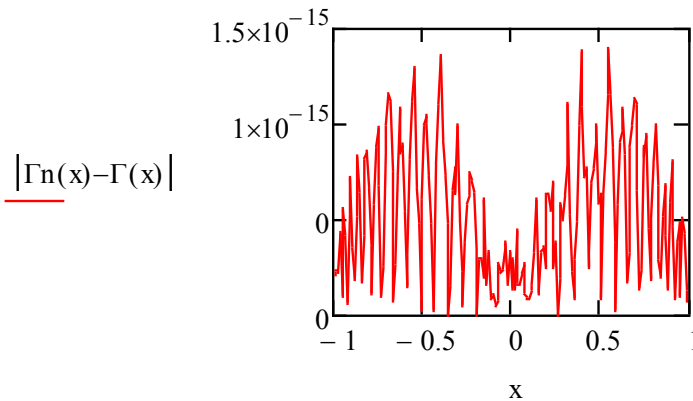
$$\Gamma(x) := \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$n \equiv 34$$

$$c := \operatorname{Syst}(fB, ff, n)$$

$$\Gamma_n(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{c_k}{k+1} \cdot \operatorname{Ucheb}(k, x) \right)$$

$$x := -0.99, -0.98.. 0.99$$



Вычислив c_k , $k=0, 1, \dots, n$, по формуле (6.20), получаем, что при $n=10, 34$ точное решение $\Gamma(x)$ отличается от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (6.15), в системе точек $x = -0.99, -0.98, \dots, 0.99$ не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,3 \cdot 10^{-15}$ соответственно.

Схема 2

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (6.61) при

$$B(x) = 3\sqrt{1-x^2} \frac{1+32x^2}{1+2x^2}. \quad (6.63)$$

Несложно показать, что решением задачи (6.61), (6.2) в данном случае является функция (6.62).

Решая систему (6.36) при $n = 10, 34$, получим точное решение $\Gamma(x)$, отличное от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (6.32), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,7 \cdot 10^{-6}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом соответственно $conde \leq 12$ и $conde \leq 50$.

**Описание и листинг по приближенному решению
уравнения Прандтля согласно схеме 2
(файл «Examp1_6_36.xmcd»)**

$$fB(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \left(3 \cdot \frac{32 \cdot x^2 + 1}{2 \cdot x^2 + 1} \right)$$

$$\Gamma_n(x) := \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$ff(x) := 1 - \frac{\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} \right) - \sqrt{1-x^2} \right) \cdot (2 \cdot x^2 + 1)}{(96 \cdot x^2 + 3) \cdot \sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

$$c := \operatorname{Syst}(fB, ff, N)$$

$$f\gamma(k, x) := \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + 2 \cdot \operatorname{asin}(x)) & \text{if } k = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{Ucheb}(k, x)}{k+1} - \frac{\operatorname{Ucheb}(k-2, x)}{k-1} \right) & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_n(x) := \sum_{k=1}^N (c_k \cdot f\gamma(k, x))$$

$x := -0.99, -0.98 \dots 0.99$ $N \equiv 34$

$|\Gamma_n(x) - \Gamma(x)|$

Схема 3

Решая систему (6.48) в случае (6.63) при $n = 10, 34$, получим точное решение $\Gamma(x)$, отличное от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (6.44), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,4 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом соответственно $\text{conde} \leq 26$ и $\text{conde} \leq 36$.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения Прандтля согласно схеме 3 (файл «Exampl_6_48.xmcd»)

$$fB(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \left(3 \cdot \frac{32 \cdot x^2 + 1}{2 \cdot x^2 + 1} \right)$$

$$\Gamma(x) := \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$ff(x) := 1 - \frac{\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} \right) - \sqrt{1-x^2} \right) \cdot (2 \cdot x^2 + 1)}{(96 \cdot x^2 + 3) \cdot \sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

$$c := \operatorname{Syst}(fB, ff, N)$$

$$f\gamma(k, x) := \begin{cases} \sqrt{1-x^2} + \pi - \operatorname{acos}(x) & \text{if } k = 0 \\ \frac{1}{4} \cdot (\pi + 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + 2 \cdot \operatorname{asin}(x)) & \text{if } k = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{Ucheb}(k, x)}{k+1} - \frac{\operatorname{Ucheb}(k-2, x)}{k-1} \right) & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_n(x) := \left[\sum_{k=1}^N (c_k \cdot f\gamma(k, x)) \right]$$

$x := -0.99, -0.98 \dots 0.99$ $N \equiv 34$

$|\Gamma_n(x) - \Gamma(x)|$

Схема 4

Решая систему (6.60) в случае (6.63) при $n = 10, 34$, получим точное решение $\Gamma(x)$, отличное от приближенного $\Gamma_n(x)$, вычисленного по формуле (6.56) в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,7 \cdot 10^{-6}$ и $1,5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом соответственно $conde \leq 14$ и $conde \leq 37$.

Описание и листинг по приближенному решению уравнения Прандтля согласно схеме 4 (файл «Exampl_6_60.xmcd»)

$$fB(x) := \sqrt{1-x^2} \cdot \left(3 \cdot \frac{32 \cdot x^2 + 1}{2 \cdot x^2 + 1} \right)$$

$$\Gamma(x) := \sqrt{1-x^2} - \sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$ff(x) := 1 - \frac{\left(\sqrt{2} \cdot \operatorname{atanh} \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} \right) - \sqrt{1-x^2} \right) \cdot (2 \cdot x^2 + 1)}{(96 \cdot x^2 + 3) \cdot \sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

$$c := \operatorname{Syst}(fB, ff, N)$$

$$f\gamma(k, x) := \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} + 3 \cdot \pi - \operatorname{acos}(x) & \text{if } k = 0 \\ \frac{1}{4} \cdot \left(\pi + 2 \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2} + 2 \cdot \operatorname{asin}(x) \right) & \text{if } k = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{Ucheb}(k, x)}{k+1} - \frac{\operatorname{Ucheb}(k-2, x)}{k-1} \right) & \text{if } k > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_n(x) := \left[\sum_{k=1}^N (c_k \cdot f\gamma(k, x)) \right]$$

$$x := -0.99, -0.98 \dots 0.99 \quad N \equiv 34$$

$|\Gamma_n(x) - \Gamma(x)|$

7. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ

В данной главе предлагается вычислительная схема для численного решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения, к которому приводят некоторые важные задачи гидродинамики [16; 17]:

$$u'(x) + \gamma(x) \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = f(x), \quad (7.1)$$

$$x \in [-1, 1], \quad u(x_0) = 0, \quad x_0 \in [-1, 1],$$

где $\gamma(x)$, $f(x)$ – заданные функции класса $C[-1, 1]$; $u(x)$ – искомая функция.

Построение вычислительной схемы. Применим формулы интегрирования по частям к интегралу в интегро-дифференциальном уравнении (7.1), а именно

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u'(t) dt, \quad (7.2)$$

где

$$H(x, t) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|}. \quad (7.3)$$

Получим интегральное уравнение с логарифмическим ядром относительно производной искомого решения

$$u'(x) + \gamma(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u'(t) dt = f(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (7.4)$$

К уравнениям с такими особенностями применима теория Фредгольма. Функция $H(x, t)$ симметрическая, неотрицательная и имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1.$$

Введем линейный оператор

$$K(\varphi; x) = \gamma(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) \varphi(t) dt. \quad (7.5)$$

Тогда граничная задача (7.1) сводится к уравнению

$$\varphi(x) + K(\varphi; x) = f(x), \quad \varphi(x) \triangleq u(x) \quad u(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t) dt. \quad (7.6)$$

Так как имеет место (7.2), то с учетом теоремы Племеля – Привалова (см., например, [13, с. 58]) заключаем, что оператор $K(\varphi; x)$ отображает пространство \mathbb{C} в себя, если функция $\gamma(x) \in \mathbb{C}$. Кроме того,

$$\|K\varphi\|_{\mathbb{C}} \leq \rho \|\varphi\|_{\mathbb{C}} \quad (7.7)$$

где

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left(\sqrt{1-x^2} |\gamma(x)| \right). \quad (7.8)$$

Отсюда, согласно теории метода последовательных приближений [10, с. 213–224], имеет место следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть функция $\gamma(x)$, входящая в уравнение (7.6), удовлетворяет условию

$$\rho < 1, \quad \rho = \max_{|x| \leq 1} \left(\sqrt{1-x^2} |\gamma(x)| \right). \quad (7.9)$$

Тогда уравнение (7.6), а вместе с ним и задача Коши (7.1) имеет единственное решение в пространстве \mathbb{C} при любой $f(x) \in \mathbb{C}$

Приближенное решение. Пусть

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (7.10)$$

где $c_k, k = 0, 1, \dots, n$, – пока неизвестные постоянные.

Приближенное решение уравнения (7.1) найдем как решение следующего вспомогательного уравнения, построенного на основании (7.3)–(7.6):

$$\varphi_n(x) + K(\varphi_n; x) = F_n(x), \quad (7.11)$$

где $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$, такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$,

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

$$K(\varphi_n; x) = \gamma(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) \varphi_n(t) dt. \quad (7.12)$$

Тогда

$$u_n(x) = \int_{x_0}^x \varphi_n(t) dt = \sum_{k=0}^n c_k \int_{x_0}^x U_k(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} (T_{k+1}(x) - T_{k+1}(x_0)). \quad (7.13)$$

Очевидно, что для уравнения (7.11) с оператором (7.12), тождественным (7.6), имеет место аналог теоремы 7.1, т. е. вследствие (7.6)–(7.9) уравнение (7.11) также разрешимо.

Выполнив тождественные преобразования, используя (7.10) и (1.17), упростим $K(\varphi_n; x)$:

$$\begin{aligned} K(\varphi_n; x) &= \gamma(x) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) \varphi_n(t) dt = \\ &= \gamma(x) \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x), \end{aligned} \quad (7.14)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) \varphi_n(t) dt &= \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} (-T_{k+1}(\tau)) d\tau = \\ &= - \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \end{aligned}$$

Уравнение (7.11) с учетом (7.10), (7.14) тождественно следующему уравнению:

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\gamma(x) \frac{\sqrt{1-x^2}}{k+1} + 1 \right) U_k(x) = F_n(x). \quad (7.15)$$

Вычислительная схема. В качестве внешних узлов x в (7.15) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Из (7.15) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k \left(\gamma(x_j) \frac{\sqrt{1-x_j^2}}{k+1} + 1 \right) U_k(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (7.16)$$

Описание и листинг функции по решению системы (7.16) (файл «Syst_7_16.xmcd»)

Функция *Syst*.

Назначение: вычисляет значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, из системы (7.16).

Прототип: $Syst(f\gamma, ff, n)$.

Параметры:

n – порядок системы;

$f\gamma$ – имя модуля, вычисляющего значение функции $\gamma(x)$;

ff – имя модуля, вычисляющего значение функции $f(x)$.

Возвращаемое значение: значение коэффициентов $c_k, k = \overline{0, n}$, как решение системы (7.16).

```
Syst(fγ, ff, n) := | for j ∈ 0.. n
                   |   |
                   |   |  $x_j \leftarrow \cos\left(\frac{2 \cdot j + 1}{2 \cdot n + 2} \cdot \pi\right)$ 
                   |   |  $F_j \leftarrow ff(x_j)$ 
                   |   |  $B_j \leftarrow f\gamma(x_j)$ 
                   |   | for k ∈ 0.. n
                   |   |   |  $U_{kj} \leftarrow Ucheb(k, x_j)$ 
                   |   |   |  $A_{j,k} \leftarrow \left[ \sqrt{1 - (x_j)^2} \cdot \frac{B_j}{k + 1} + 1 \right] \cdot U_{kj}$ 
                   |   | c ← lsolve(A, F)
                   |   | c
```

Согласно [11, с. 535] система (7.16) разрешима и имеет единственное решение $c_k, k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (7.1) – функция $u_n(x)$ – вычисляется по (7.13).

Заметим, что обоснование сходимости и оценки погрешности приближенного решения можно получить по аналогии с [22].

Результаты численных экспериментов

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u'(x) + \frac{\sqrt{2}(1-x^2)}{2(1+x^2)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = -\frac{3(x^2-1)}{2(1+x^2)^2}, \quad u(-1) = 0. \quad (7.17)$$

Несложно показать, что решением задачи (7.17) в данном случае является функция $u(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$.

Решая систему (7.16) при $n = 12, 24, 36$, получим точное решение $u(x)$, отличное от приближенного $u_n(x)$, вычисленного по формуле (7.13), в системе точек $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $6,7 \cdot 10^{-6}$, $1,5 \cdot 10^{-10}$ и $4,0 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц системы при этом соответственно $conde \leq 31$, $conde \leq 84$ и $conde \leq 153$.

**Описание и листинг по приближенному решению уравнения
(файл «Exampl_7_16.xmcd»)**

$$\gamma(x) := \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}{2 \cdot (x^2 + 1)}$$

$$ff(x) := -\frac{3 \cdot (x^2 - 1)}{2 \cdot (x^2 + 1)^2}$$

$$u(x) := \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$$

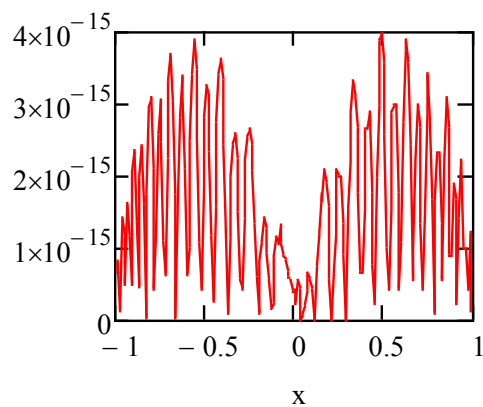
$c := \text{Syst}(\gamma, ff, n)$

$$un(x) := \sum_{k=0}^n \left[\frac{c_k}{k+1} \cdot (\text{Tcheb}(k+1, x) - \text{Tcheb}(k+1, -1)) \right]$$

$x := -0.99, -0.98.. 0.99$

$n \equiv 36$

$|un(x) - u(x)|$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии представлены вычислительные схемы приближенного решения некоторых сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом ортогональных многочленов. Основной идеей используемого метода является применение спектральных или квази-спектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов Коши и со слабой особенностью.

Данный подход был предложен ранее для приближенного решения сингулярных интегральных уравнений и отражен в шести монографиях.

1. «Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов». Здесь рассматриваются алгоритмы численного решения скалярных и векторных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши с произвольными и постоянными коэффициентами, основанные на полученных спектральных соотношениях для характеристических операторов.

2. «Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода : в 2 ч. Ч. 1 : Алгоритмы в MathCad». В книге описывается реализация алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с произвольными коэффициентами и ядрами Коши в системе компьютерной математики MathCad, основанных на полученных спектральных соотношениях для характеристических операторов.

3. «Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода : в 2 ч. Ч. 2 : Алгоритмы в Mathematica» посвящен реализации алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений второго рода с произвольными коэффициентами и ядрами Коши в системе компьютерной математики Mathematica.

4. В книге «Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов : в 2 ч. Ч. 1 : Алгоритмы в MathCad» рассматривается реализация алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами и ядрами Коши в системе компьютерной математики MathCad, основанных на полученных спектральных соотношениях для характеристических операторов.

5. «Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов : в 2 ч. Ч. 2 : Алгоритмы в Mathematica» показывает реализацию алгоритмов численного решения сингулярных интегральных уравнений с постоянными коэффициентами и ядрами Коши в системе компьютерной математики Mathematica.

6. «Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмической особенностью» рассматри-

вает алгоритмы численного решения как сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида, так и простейшего сингулярного интегрального уравнения с кратными ядрами Коши, основанные на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева.

Построенные спектральные схемы позволяют получить приближенное решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Наука, 1987.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. М. : Наука, 1966. Т. 2.
3. Вайникко Г. М. Анализ дискретизационных методов. Тарту : Изд-во Тартус. ун-та, 1976. 161 с.
4. Вайникко Г. М. О сходимости квадратурно-разностных методов для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1971. № 11:3. С. 770–776.
5. Васильев Н. И., Клоков Ю. А., Шкерстена А. Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. Рига, 1984.
6. Векуа И. Н. Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9, вып. 2. С. 143–150.
7. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1994.
8. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. ГИИТЛ, 1949.
9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1977.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1989.
12. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М. : Изд-во иностр. лит., 1962.
13. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.
14. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев : Наук. думка, 1984.
15. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
16. Пыхтеев Г. Н. Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения // ПМТФ. 1966. № 1. С. 32–44.
17. Пыхтеев Г. Н. Некоторые методы решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости // ПМТФ. 1966. № 2. С. 72–86.
18. Расолько Г. А. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
19. Расолько Г. А. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
20. Расолько Г. А., Шешко С. М., Шешко М. А. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Журн. дифференциальные уравнения, 2019. Т. 55, № 9. С. 1285–1292.
21. Расолько Г. А., Шешко С. М. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 10–20.
22. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев : Наук. думка, 1981.
23. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979.

24. Шешко М. А., Расолько Г. А., Мастяница В. С. К приближенному решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 9. С. 1550–1560.
25. Prandtl L. // Nach. Kgl. Ges. Wiss. Math. Phys. 1918. P. 451–470.
26. Расолько Г. А. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс]. Минск : БГУ, 2015. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/118113>
27. Расолько Г. А. Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода : в 2 ч. [Электронный ресурс]. Минск : БГУ, 2015. Ч. 1 : Алгоритмы в MathCad. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/148189>
28. Расолько Г. А. Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений второго рода : в 2 ч. [Электронный ресурс]. Минск : БГУ, 2016. Ч. 2 : Алгоритмы в Mathematica Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/156293>
29. Расолько Г. А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов : в 2 ч. [Электронный ресурс]. Минск : БГУ, 2017. Ч. 1 : Алгоритмы в MathCad. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/180437>
30. Расолько Г. А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов : в 2 ч. [Электронный ресурс]. Минск : БГУ, 2017. Ч. 2 : Алгоритмы в Mathematica. Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/180438>
31. Расолько Г. А. Спектральный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмической особенностью. Lap Lambert Academic Publishing. 2017. 116 с.