

## ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Производственные функции являются важным инструментом экономического анализа и моделирования производственных процессов. Они позволяют описать зависимость объема продукции от факторов производства, таких как труд, капитал и земля, а также от уровня технических знаний. В данной работе рассматривается функциональная запись производственной функции и ее свойства. Помимо этого, описываются различные виды данной функции по количеству рассматриваемых факторов. Приводятся примеры применения производственной функции в различных отраслях экономики. Работа подчеркивает важность выбора и изучения производственных функций для анализа эффективности использования производственных факторов и определения возможностей замещения одних факторов другими.

**Ключевые слова:** производственная функция, объем производства, факторы производства, комбинации факторов производства, техническая эффективность, свойства производственной функции

Производственная функция – функция, отображающая зависимость между максимальным объемом производимого продукта в единицу времени и физическим объемом факторов производства при данном уровне технических знаний. Поскольку объем производства зависит от объема использованных ресурсов, то зависимость между ними может быть выражена в виде следующей функциональной записи:

$Q = f(L, K, M)$ , где  $Q$ , – максимальный объем продукции, произведенной при данной технологии и определенных факторах производства;  $L$  – труд;  $K$  – капитал;  $M$  – материалы;  $f$  – функция.

При микроэкономическом анализе предполагается, что уровень организационно–технических знаний фиксирован, а все материальные факторы объединяют в один фактор – капитал. Т. е. в этом случае производственная функция включает в себя два фактора, от которых зависит выпуск продукции: труд и капитал:  $Q = f(L, K)$ .

Принято различать 3 основных вида производственных функций по количеству рассматриваемых факторов: однофакторные, двухфакторные, многофакторные. Однофакторная функция представляет собой зависимость объема производства от 1 фактора, двухфакторная от 2 факторов, многофакторная от нескольких.

Примерами однофакторных функций являются:

– **Показательная функция:**  $y = a_0 - k * a_1^x$ . При росте затрат ресурса  $x$  объем произведенной продукции  $y$  тоже растет, стремясь к значению параметра  $a_0$ .

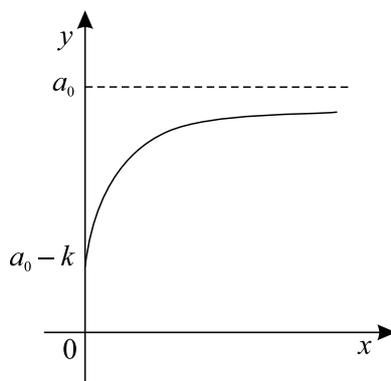


Рис. 1. Показательная производственная функция

– **Степенная функция:**  $y = a_0 * x^{a_1}$ . При росте затрат ресурса  $x$ , объем производства  $y$  без ограничений возрастет. Насколько быстро растет  $y$  зависит от величины параметров  $a_0, a_1$ .

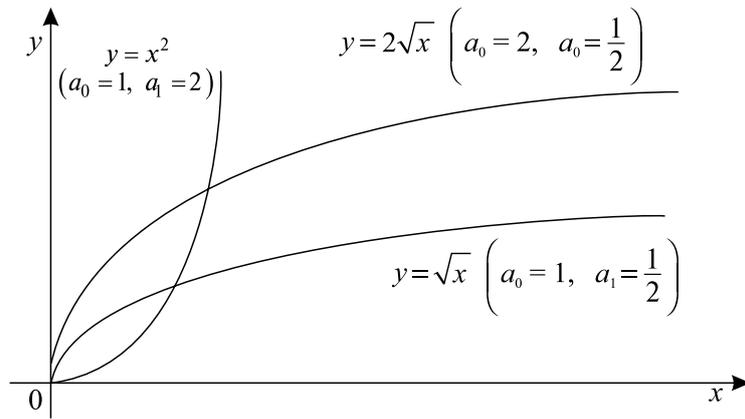


Рис. 2. Степенная производственная функция

– Гиперболическая зависимость:  $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ . Величина  $a_1/x$  уменьшается с увеличением  $x$ , значит при росте затрат ресурса объем производства убывает [1].

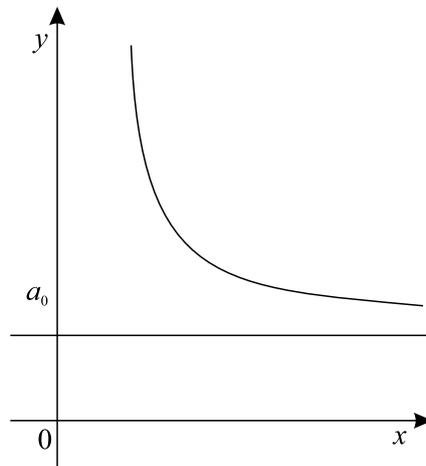


Рис. 3. Гиперболическая производственная функция

Примерами двухфакторных функций являются:

– *Линейная производственная функция*

Функция представляет собой производственный процесс, в котором вводимые ресурсы являются совершенными заменителями, то есть один, скажем труд, может быть полностью заменен капиталом.

$P = a * L + b * K$ , где  $P$  – общий продукт,  $a$  – производительность  $L$  единиц труда,  $b$  – производительность  $K$  единиц капитала.

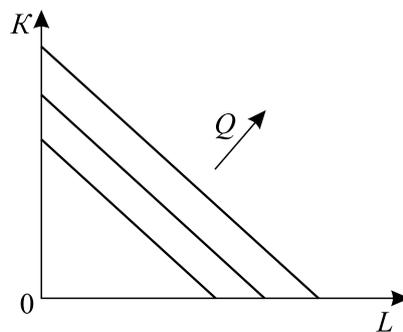


Рис. 4. Линейная производственная функция

– *Функция фиксированного производства*

С фиксированной пропорцией функция отражает производственный процесс, в котором вводимые ресурсы требуются в фиксированных пропорциях, поскольку не может быть замены одних вводимых ресурсов другими.

$Q = \min(a * K, b * L)$ , где  $Q$  – общий продукт,  $a$  и  $b$  – соответственно коэффициент производства капитала и труда,  $K$  и  $L$  – соответственно единицы капитала и труда.

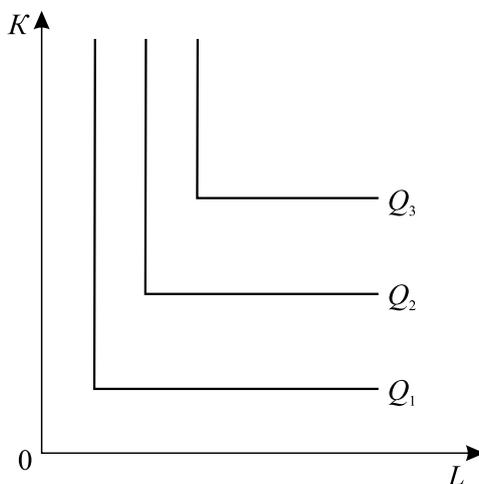


Рис. 5. Функция фиксированного производства

– *Производственная функция Кобба-Дугласа*

Функция представляет собой типичную производственную функцию, в которой труд и капитал могут замещаться не полностью.

$Q = A * K^a * L^b$ , где  $Q$  – общий продукт,  $K$  – единицы капитала,  $L$  – единицы труда,  $A$  – общая факторная производительность,  $a$  и  $b$  – эластичность выпуска капитала и труда соответственно [2].

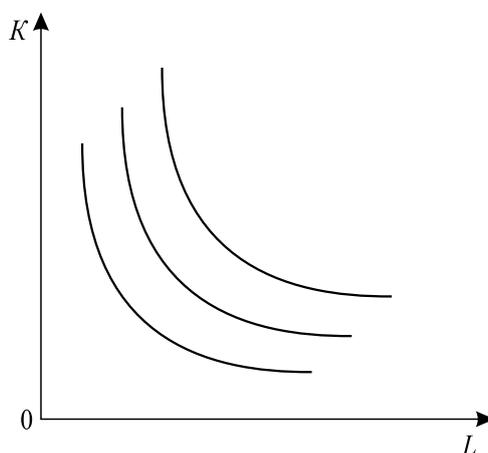


Рис. 6. Производственная функция Кобба-Дугласа

– *Производственная функция CES*

Функция является обобщением производственных функций Кобба — Дугласа, Леонтьева и линейной, она обладает постоянной эластичностью замещения факторов производства (т. е. постоянное изменение одного фактора вызывает одинаковое изменение другого).

$Q = [aL^{\frac{1}{\rho}} + (1-\alpha)K^{\frac{1}{\rho}}]^{\rho}$ , где  $Q$  – общий продукт,  $K$  и  $L$  – соответственно единицы капитала и труда,  $\alpha$  – параметр, который указывает на долю труда в производственном процессе,  $\rho$  ( $\rho \neq 0$ ) – параметр, который определяет эластичность замещения между трудом и капиталом [3].

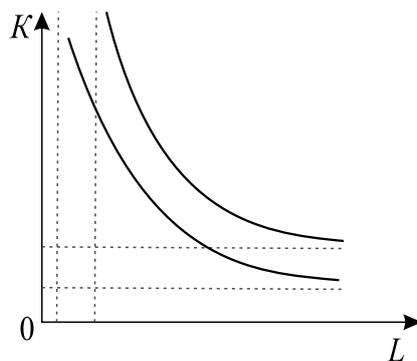


Рис. 7. Производственная функция CES

*Свойства производственной функции:*

1. Существует предел для роста объема выпуска, который может быть достигнут ростом затрат одного ресурса при прочих равных условиях. Например, если наняли слишком большое количество рабочих в 1 помещении, то не всем хватит мест.

2. Факторы производства могут быть взаимодополняющими или взаимозаменяемыми. Взаимодополняющие факторы работают лучше вместе (рабочий и его инструмент), а взаимозаменяемые могут быть использованы для достижения одного и того же объема выпуска (замена живой рабочей силы роботами) [4].

3. Техническая эффективность способа производства определяется его более эффективным использованием одного или нескольких ресурсов по сравнению с другими способами (энергосберегающая лампочка для создания такого же освещения использует меньше электричества, чем обычная лампочка).

4. Если один способ использует ресурсы в большем, а другой – в меньшем количестве, то оба способа могут быть технически эффективными, и выбор между ними зависит от соотношения цен на ресурсы и критериев экономической эффективности (один способ производства футболки требует меньше ткани, чем другой способ, но выбор между ними зависит от стоимости ткани и экономических факторов).

Выберем одну из функций и рассмотрим ее подробнее.

Производственная функция Кобба-Дугласа является одной из наиболее распространенных и широко используемых моделей производственной функции в экономической теории. Она была предложена американскими экономистами Дугласом Коббом и Полом Дугласом в 1928 году. Производственная функция Кобба-Дугласа описывает связь между входами (факторами производства) и выходом (продукцией) в процессе производства [5].

Математическое выражение производственной функции Кобба-Дугласа имеет следующий вид:  $Y = A * (K^\alpha) * (L^\beta)$ , где:  $Y$  – выход (продукция),  $A$  – технический прогресс, представляющий технологический уровень и инновации,  $K$  – вход капитала (например, оборудование, машины, здания),  $L$  – вход труда (например, количество работников, часы работы),  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, отражающие эластичность производственных факторов (эластичность капитала и эластичность труда соответственно). Рассмотрим конкретный пример.

Допустим, есть следующие данные: количество входа капитала ( $K$ ) = 10, количество входа труда ( $L$ ) = 5, параметр  $\alpha$  (эластичность капитала) = 0,3, параметр  $\beta$  (эластичность труда) = 0,7. Надо найти выход (продукцию)  $Y$ , используя производственную функцию Кобба-Дугласа. Математическое выражение этой функции выглядит следующим образом:  $Y = A * (K^\alpha) * (L^\beta)$ , где  $A$  – технический прогресс.

Для решения задачи, нужно подставить известные значения в формулу и вычислить выход  $Y$ :  $Y = A * (10^{0,3}) * (5^{0,7})$ . Допустим, у нас также есть дополнительная информация, что технический прогресс  $A$  равен 2. Подставим это значение:  $Y = 2 * (10^{0,3}) * (5^{0,7})$ . Теперь можно вычислить значение выхода  $Y$ , используя указанные значения:  $Y = 2 * (10^{0,3}) * (5^{0,7}) \approx 2 * 2,1544 * 3,1305 \approx 13,9306$ .

Таким образом, при данных значениях входов и параметров производственной функции, ожидаемый выход (продукция) составляет около 13,9306.

### *Применение производственных функций в целом:*

Аппарат производственных функций широко используется в экономическом анализе для моделирования производственных процессов. Он помогает оценить эффективность системы и использования производственных факторов, а также изучить влияние масштаба производства и инноваций на процессы производства.

1. Производство автомобилей: функция определяет, как лучше сочетать рабочую силу, оборудование, сырье и энергию для достижения наибольшей производительности при минимальных затратах.

2. Сельское хозяйство: функция помогает определить, сколько земли, труда, удобрений и других ресурсов нужно для достижения оптимального уровня сельскохозяйственного производства.

3. Производство электроэнергии: функция выявляет наилучшие сочетания генераторов, топлива и оборудования для максимизации производства электроэнергии при минимальных затратах.

4. Производство компьютерных чипов: функция помогает оптимизировать использование сырья, технического оборудования и труда для достижения наилучшей производительности и качества чипов.

5. Производство товаров на массовом производстве: функция определяет наилучший масштаб производства, эффективного использования рабочей силы и оборудования для достижения максимальной эффективности и снижения издержек.

### **Список использованных источников**

1. Однофакторные производственные функции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://studizba.com/lectures/jekonomika-i-finansy/matematicheskie-metody-v-jekonomike/43212-odnofaktornye-proizvodstvennye-funkcii.html>. – Дата доступа: 05.11.2023.

2. Производственная функция: понятие, примеры и разновидности [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://sprintinvest.ru/proizvodstvennaya-funkciya-ponyatie-primery-i-raznovidnosti>. – Дата доступа: 05.11.2023.

3. Виды производственных функций [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://studme.org/302060/ekonomika/vidy\\_proizvodstvennyh\\_funktsiy](https://studme.org/302060/ekonomika/vidy_proizvodstvennyh_funktsiy). – Дата доступа: 05.11.2023.

4. Производственная функция [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://www.economicportal.ru/ponyatiya-all/production\\_function.html](https://www.economicportal.ru/ponyatiya-all/production_function.html). – Дата доступа: 05.11.2023.

5. Материалы межвузовской конференции «Математика в экономике» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [https://auspublishers.com.au/ru/nauka/conference\\_article/3211/view](https://auspublishers.com.au/ru/nauka/conference_article/3211/view). – Дата доступа: 05.11.2023.