Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024;1:86–92
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2024;1:86–92

УДК 517.977

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. Г. АГАМАЛИЕВ[1)]***, К. Б. МАНСИМОВ***[1), 2)]***, Р. О. МАСТАЛИЕВ***[2), 3)]

[1)]*Бакинский государственный университет,*
ул. Академика Захида Халилова, 23, AZ 1148, г. Баку, Азербайджан
[2)]*Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики,*
ул. Бахтияра Вагабзаде, 68, AZ 1141, г. Баку, Азербайджан
[3)]*Университет Азербайджана, ул. Джейхуна Гаджибейли, 71, AZ 1007, г. Баку, Азербайджан*

Аннотация. Рассмотрена краевая задача для одного класса линейных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. С помощью аналогов матрицы Коши и резольвенты получены представления решения исследуемой краевой задачи.

Ключевые слова: линейное гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение; представление решений; аналог матрицы Коши; уравнения Вольтерры второго рода.

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за очень полезные замечания.

REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF FIRST ORDER LINEAR CANONICAL HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. G. AGAMALIYEV[a]***, K. B. MANSIMOV***[a, b]***, R. O. MASTALIYEV***[b, c]

[a]*Baku State University, 23 Akademik Zahid Khalilov Street, Baku AZ 1148, Azerbaijan*
[b]*Institute of Control Systems, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan,*
68 Bakhtiyar Vahabzadeh Street, Baku AZ 1141, Azerbaijan
[c]*Azerbaijan University, 71 Jeyhun Hajibeyli Street, Baku AZ 1007, Azerbaijan*
Corresponding author: R. O. Mastaliyev (rashad.mastaliyev@au.edu.az)

Образец цитирования:
Агамалиев АГ, Мансимов КБ, Масталиев РО. Представления решения линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:86–92.
EDN: VSDRMZ

For citation:
Agamaliyev AG, Mansimov KB, Mastaliyev RO. Representations of solutions of first order linear canonical hyperbolic integro-differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:86–92. Russian.
EDN: VSDRMZ

Авторы:
Агамали Гулу Агамалиев – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики механико-математического факультета.
Камил Байрамали Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики[1)], заведующий лабораторией методов управления сложными динамическими системами[2)].
Рашад Огтай Масталиев – кандидат математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник лаборатории методов управления сложными динамическими системами[2)], заведующий кафедрой математики и информатики факультета информационных и коммуникационных технологий[3)].

Authors:
Agamly G. Agamaliyev, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of higher mathematics, faculty of mechanics and mathematics.
mastaliyevrashad@gmail.com
Kamil B. Mansimov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of applied mathematics and cybernetics[a], and head of the laboratory of methods of control of complex dynamic systems[b].
kamilbmansimov@gmail.com
Rashad O. Mastaliyev, PhD (mathematics), docent; leading researcher at the laboratory of methods of control of complex dynamic systems[b] and head of the department of mathematics and informatics, faculty of imformation and communication technologies[c].
rashad.mastaliyev@au.edu.az

Abstract. In this paper, we consider the boundary value problem for one class of linear hyperbolic integro-differential equations of the first order. With the help of analogies of the Cauchy matrix and the resolvent, representations of the solution of the considered boundary value problem are obtained.

Keywords: linear hyperbolic integro-differential equations; representation of solutions; analog of the Cauchy matrix; second order Volterra equations.

Acknowledgements. The authors express their deep gratitude to the reviewer for his very useful comments.

Введение

Различные вопросы биологии, физики, техники предполагают исследование интегро-дифференциальных уравнений и постановку для них определенных краевых условий [1; 2]. При качественном и конструктивном исследовании задач оптимального управления существенную роль играют представления решений линейных или линеаризованных уравнений, описывающих рассматриваемые задачи оптимального управления [3–6].

В работе [7] найдены в явном виде интегральные представления решений краевой задачи для системы линейных гиперболических уравнений первого порядка. В публикации [8] аналогичная задача рассмотрена для системы разностных уравнений типа Россера [9].

В дальнейшем установленные представления были применены как удобный математический аппарат для исследования нелинейных задач оптимального управления, описываемых подобными гиперболическими уравнениями первого порядка (см. [10]).

В предлагаемой работе получены представления решения краевой задачи для системы линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

Постановка задачи

В области $D=[t_0,\ t_1]\times[x_0,\ x_1]$ рассмотрим систему линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered}
z_t(t,\ x)=A_1(t,\ x)z+A_2(t,\ x)y+\\
+\int_{t_0}^{t}\big(A_3(\tau,\ x)z(\tau,\ x)+A_4(\tau,\ x)y(\tau,\ x)\big)d\tau+f_1(t,\ x)+\int_{t_0}^{t}f_2(\tau,\ x)d\tau,\ (t,\ x)\in D,\\
y_x(t,\ x)=B_1(t,\ x)z+B_2(t,\ x)y+\\
+\int_{x_0}^{x}\big(B_3(t,\ s)z(t,\ s)+B_4(t,\ s)y(t,\ s)\big)ds+g_1(t,\ x)+\int_{x_0}^{x}g_2(t,\ s)ds,\ (t,\ x)\in D
\end{gathered}\tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered}
z(t_0,\ x)=a(x),\ x\in X\in[x_0,\ x_1],\\
y(t,\ x_0)=b(t),\ t\in T\in[t_0,\ t_1].
\end{gathered}\tag{2}$$

Здесь $f_1(t,\ x)$, $g_1(t,\ x)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных n- и m-мерные вектор-функции; $A_i(t,\ x)$, $B_i(t,\ x)$, $i=\overline{1,\ 4}$, – заданные непрерывные по совокупности переменных матричные функции соответствующих размерностей; $f_2(\tau,\ x)$, $g_2(t,\ s)$ – заданные непрерывные по совокупности аргументов скалярные функции; $a(x)$, $b(t)$ – заданные непрерывные n- и m-мерные вектор-функции.

Целью настоящей работы является нахождение представления решения краевой задачи (1), (2).

Формула для представления решения краевой задачи

Интерпретируя первое уравнение системы (1) как обыкновенное линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение, относительно $z(t,\ x)$ аналогично формуле Коши (см., например, [11, с. 17]) имеем

$$z(t, x) = F(t, t_0, x) z(t_0, x) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau, x) A_2(\tau, x) y(\tau, x) d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} F(t, \alpha, x) A_4(\alpha, x) d\alpha \right] y(\tau, x) d\tau + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau, x) f_1(\tau, x) d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} F(t, \alpha, x) f_2(\alpha, x) d\alpha \right] d\tau. \tag{3}$$

Здесь $F(t, \tau, x) - (n \times n)$-мерная матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial F(t, \tau, x)}{\partial \tau} = -F(t, \tau, x) A_1(\tau, x) + \int_{\tau}^{t} F(t, \alpha, x) A_3(\alpha, x) d\alpha,$$
$$F(t, t, x) = E_1,$$

где $E_1 - (n \times n)$-мерная единичная матрица.

Решение $y(t, x)$ второго уравнения системы (1) допускает представление

$$y(t, x) = \Phi(x, x_0, t) y(t, x_0) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x, s, t) B_1(t, s) z(t, s) ds +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \left[\int_{s}^{x} \Phi(x, \beta, t) B_3(t, \beta) d\beta \right] z(t, s) ds + \int_{x_0}^{x} \Phi(x, s, t) g_1(t, s) ds +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \left[\int_{s}^{x} \Phi(x, \beta, t) g_2(t, \beta) d\beta \right] ds. \tag{4}$$

Здесь $\Phi(x, s, t) - (m \times m)$-мерная матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(x, s, t)}{\partial s} = -\Phi(x, s, t) B_2(t, s) + \int_{s}^{x} \Phi(x, \beta, t) B_4(t, \beta),$$
$$\Phi(x, x, t) = E_2,$$

где $E_2 - (m \times m)$-мерная единичная матрица.

Из представлений (3) и (4) ясно, что

$$z(t, s) = F(t, t_0, s) z(t_0, s) + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau, s) y(\tau, s) d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} F(t, \tau, s) f_1(\tau, s) d\tau + \int_{t_0}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} F(t, \alpha, s) f_2(\alpha, s) d\alpha \right] d\tau, \tag{5}$$

$$y(\tau, x) = \Phi(x, x_0, \tau) y(\tau, x_0) + \int_{x_0}^{x} M(x, s, \tau) z(\tau, s) ds +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \Phi(x, s, \tau) g_1(\tau, s) ds + \int_{x_0}^{x} \left[\int_{s}^{x} \Phi(x, \beta, \tau) g_2(\tau, \beta) d\beta \right] ds. \tag{6}$$

Здесь по определению

$$K(t, \tau, s) = F(t, \tau, s) A_2(\tau, s) + \int_{\tau}^{t} F(t, \alpha, s) A_4(\alpha, s) d\alpha,$$

$$M(x, s, \tau) = \Phi(x, s, \tau) B_1(\tau, s) + \int_{s}^{x} \Phi(x, \beta, \tau) B_3(\tau, \beta) d\beta.$$

Учитывая формулы (5) и (6), в представлениях (3) и (4) соответственно будем иметь

$$z(t,\, x) = F(t,\, t_0,\, x)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\, \tau,\, x) f_1(\tau,\, x)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} F(t,\, \alpha,\, x) f_2(\alpha,\, x)d\alpha\right]d\tau + \int_{t_0}^{t} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, x_0,\, \tau)b(\tau)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,\, \tau,\, x)M(x,\, s,\, \tau)z(\tau,\, s)dsd\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, s,\, \tau)g_1(\tau,\, s)dsd\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{s}^{x} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, \beta,\, \tau)g_2(\tau,\, \beta)d\beta\right]dsd\tau, \tag{7}$$

$$y(t,\, x) = \Phi(x,\, x_0,\, t)b(t) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x,\, s,\, t)g_1(t,\, s)ds +$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left[\int_{s}^{x} \Phi(x,\, \beta,\, t)g_2(t,\, \beta)d\beta\right]ds + \int_{x_0}^{x} M(x,\, s,\, t)F(t,\, t_0,\, s)a(s)ds +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} M(x,\, s,\, t)K(t,\, \tau,\, s)y(\tau,\, s)dsd\tau + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} M(x,\, s,\, t)F(t,\, \tau,\, s)f_1(\tau,\, s)dsd\tau +$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} M(x,\, s,\, t)F(t,\, \alpha,\, s)f_2(\alpha,\, s)d\alpha\right]dsd\tau. \tag{8}$$

Полагая, что

$$q(t,\, x) = F(t,\, t_0,\, x)a(x) + \int_{t_0}^{t} F(t,\, \tau,\, x) f_1(\tau,\, x)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} F(t,\, \alpha,\, x) f_2(\alpha,\, x)d\alpha\right]d\tau + \int_{t_0}^{t} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, x_0,\, \tau)b(\tau)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, s,\, \tau)g_1(\tau,\, s)dsd\tau + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{s}^{x} K(t,\, \tau,\, x)\Phi(x,\, \beta,\, \tau)g_2(\tau,\, \beta)d\beta\right]dsd\tau,$$

$$r(t,\, x) = \Phi(x,\, x_0,\, t)b(t) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x,\, s,\, t)g_1(t,\, s)ds +$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left[\int_{s}^{x} \Phi(x,\, \beta,\, t)g_2(t,\, \beta)d\beta\right]ds + \int_{x_0}^{x} M(x,\, s,\, t)F(t,\, t_0,\, s)a(s)ds +$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t} M(x,\, s,\, t)F(t,\, \tau,\, s)f_1(\tau,\, s)dsd\tau + \int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} M(x,\, s,\, t)F(t,\, \alpha,\, s)f_2(\alpha,\, s)d\alpha\right]dsd\tau,$$

перепишем равенства (7) и (8) соответственно в виде

$$z(t,\, x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,\, \tau,\, x)M(x,\, s,\, \tau)z(\tau,\, s)dsd\tau + q(t,\, x), \tag{9}$$

$$y(t,\, x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} M(x,\, s,\, t)K(t,\, \tau,\, s)y(\tau,\, s)dsd\tau + r(t,\, x). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) являются двумерными линейными неоднородными интегральными уравнениями типа Вольтерры второго рода.

Полагая, что

$$Q_1(t, x; \tau, s) = K(t, \tau, x) M(x, s, \tau),$$

$$Q_2(t, x; \tau, s) = M(x, s, t) K(t, \tau, s),$$

запишем уравнения (9) и (10) в виде

$$z(t, x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_1(t, x; \tau, s)\, z(\tau, s)\, ds d\tau + q(t, x), \tag{11}$$

$$y(t, x) = \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_2(t, x; \tau, s)\, y(\tau, s)\, ds d\tau + r(t, x). \tag{12}$$

Пусть $R_1(t, x; \tau, s)$ и $R_2(t, x; \tau, s)$ – соответственно $(n \times n)$-мерная и $(m \times m)$-мерная матричные функции, являющиеся решениями матричных интегральных уравнений

$$R_1(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s)\, d\alpha d\beta - Q_1(t, x; \tau, s),$$

$$R_2(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x} Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta; \tau, s)\, d\alpha d\beta - Q_2(t, x; \tau, s).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Решения $z(t, x)$, $y(t, x)$ интегральных уравнений (11) и (12) допускают представления*

$$z(t, x) = q(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s)\, ds d\tau, \tag{13}$$

$$y(t, x) = r(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s)\, ds d\tau \tag{14}$$

соответственно.

Доказательство. Нужно показать, что представления (13) и (14) удовлетворяют равенствам

$$z(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s)\, ds d\tau - q(t, x) = 0, \tag{15}$$

$$y(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s)\, ds d\tau - r(t, x) = 0 \tag{16}$$

соответственно.

Докажем справедливость равенства (15). Подставляя представление (13) в равенство (15), имеем

$$z(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s)\, ds d\tau - q(t, x) =$$

$$= q(t, x) - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s)\, ds d\tau -$$

$$- \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_1(t, x; \tau, s) \left[q(\tau, s) - \int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{s} R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q(\alpha, \beta)\, d\alpha d\beta \right] ds d\tau - q(t, x) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s)\, ds d\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} Q_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s)\, ds d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{s}Q_1(t,\,x;\,\tau,\,s)R_1(\tau,\,s;\,\alpha,\,\beta)q(\alpha,\,\beta)d\alpha d\beta\right]dsd\tau=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[R_1(t,\,x;\,\tau,\,s)+Q_1(t,\,x;\,\tau,\,s)\right]q(\tau,\,s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}Q_1(t,\,x;\,\alpha,\,\beta)R_1(\alpha,\,\beta;\,\tau,\,s)q(\tau,\,s)d\alpha d\beta\right]dsd\tau=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[R_1(t,\,x;\,\tau,\,s)+Q_1(t,\,x;\,\tau,\,s)-\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}Q_1(t,\,x;\,\alpha,\,\beta)R_1(\alpha,\,\beta;\,\tau,\,s)d\alpha\,d\beta\right]q(\tau,\,s)dsd\tau=0.$$

Теперь докажем справедливость равенства (16). Подставляя представление (14) в равенство (16), имеем

$$y(t,\,x)-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)y(\tau,\,s)dsd\tau-r(t,\,x)=$$

$$=r(t,\,x)-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,\,x;\,\tau,\,s)r(\tau,\,s)dsd\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)\left[r(\tau,\,s)-\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{s}R_2(\tau,\,s;\,\alpha,\,\beta)r(\alpha,\,\beta)d\alpha d\beta\right]dsd\tau-r(t,\,x)=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_2(t,\,x;\,\tau,\,s)r(\tau,\,s)dsd\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)r(\tau,\,s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{t_0}^{\tau}\int_{x_0}^{s}Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)R_2(\tau,\,s;\,\alpha,\,\beta)r(\alpha,\,\beta)d\alpha d\beta\right]dsd\tau=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[R_2(t,\,x;\,\tau,\,s)+Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)\right]r(\tau,\,s)dsd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}Q_2(t,\,x;\,\alpha,\,\beta)R_2(\tau,\,s;\,\alpha,\,\beta)d\alpha d\beta\right]r(\alpha,\,\beta)dsd\tau=$$

$$=-\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[R_2(t,\,x;\,\tau,\,s)+Q_2(t,\,x;\,\tau,\,s)-\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}Q_2(t,\,x;\,\alpha,\,\beta)R_2(\alpha,\,\beta;\,\tau,\,s)d\alpha d\beta\right]r(\tau,\,s)dsd\tau=0.$$

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, найдено представление решения краевой задачи для линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, носящее конструктивный характер.

Библиографические ссылки

1. Нахушев АМ. *Уравнения математической биологии.* Москва: Высшая школа; 1995. 301 с.
2. Нахушев АМ. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* Москва: Наука; 2006. 287 с.
3. Островский ГМ, Волин ЮМ. *Моделирование сложных химико-технологических схем.* Москва: Химия; 1975. 312 с.

4. Васильев ОВ, Терлецкий ВА. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами. В: Медведев ГА, редактор. *Оптимизация динамических систем.* Минск: БГУ; 1978. с. 26–30.
5. Егоров АИ, Знаменская ЛН. *Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами.* Санкт-Петербург: Лань; 2017. 292 с.
6. Фурсиков АВ. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения.* Новосибирск: Научная книга; 1999. XII, 352 с. (Университетская серия; том 5).
7. Агамалиев АГ, Мансимов КБ, Масталиев РО. О представлении решений линейных канонических гиперболических уравнений первого порядка. *Вестник Бакинского университета. Серия физико-математических наук.* 2017;3:14–20.
8. Кадырова СШ, Мансимов КБ. Об одном представлении решений системы управления типа Россера. *Доклады Национальной академии наук Азербайджана.* 2014;70(1):15–18.
9. Roesser R. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1975;20(1): 1–10. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100844.
10. Кадырова СШ, Мансимов КБ. Об оптимальности квазиособых управлений в одной граничной задаче управления дискретными системами типа Россера. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* 2019;49:4–13. DOI: 10.17223/19988605/49/1.
11. Габасов РФ, Кириллова ФМ. *Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа.* Богданов ЮС, редактор. Минск: Издательство БГУ имени В. И. Ленина; 1973. 248 с.

References

1. Nakhushev AM. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of the mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola; 1995. 301 p. Russian.
2. Nakhushev AM. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [The mixed problem for the partial differential equations]. Moscow: Nauka; 2006. 287 p. Russian.
3. Ostrovskii GM, Volin YuM. *Modelirovanie slozhnykh khimiko-tekhnologicheskikh skhem* [Modelling of complex chemical-technological schemes]. Moscow: Khimiya; 1975. 312 p. Russian.
4. Vasil'ev OV, Terletskii VA. [On the optimisation of controlled systems with distributed parameters]. In: Medvedev GA, editor. *Optimizatsiya dinamicheskikh system* [Optimisation of dynamic systems]. Minsk: Belarusian State University; 1978. p. 26–30. Russian.
5. Egorov AI, Znamenskaya LN. *Vvedenie v teoriyu upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Introduction to the theory of control systems with distributed parameters]. Saint Petersburg: Lan'; 2017. 292 p. Russian.
6. Fursikov AV. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal control of distributed systems. Theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga; 1999. XII, 352 p. (Universitetskaya seriya; volume 5). Russian.
7. Agamaliyev AG, Mansimov KB, Mastaliyev RO. On the representation of the solution of the first order linear canonical hyperbolic equations. *News of Baku University. Series of Physico-mathematical Sciences.* 2017;3:14–20. Russian.
8. Gadirova SSh, Mansimov KB. [On response formula solution the Roesser type equations]. *Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan.* 2014;70(1):15–18. Russian.
9. Roesser R. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 1975;20(1): 1–10. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100844.
10. Gadirova SSh, Mansimov KB. About optimality quasi-singular controls in one boundary control problem of Roesser type discrete system. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 2019;49:4–13. Russian. DOI: 10.17223/19988605/49/1.
11. Gabasov RF, Kirillova FM. *Optimizatsiya lineinykh sistem. Metody funktsional'nogo analiza* [Optimisation linear systems. Functional analysis methods]. Bogdanov YuS, editor. Minsk: Izdatel'stvo BGU imeni V. I. Lenina; 1973. 248 p. Russian.

Получена 22.08.2023 / исправлена 15.02.2024 / принята 15.02.2024.
Received 22.08.2023 / revised 15.02.2024 / accepted 15.02.2024.