УДК 517.923

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЛИУВИЛЛЯ

Килбас А.А., Жуковская Н.В.

Исследуются линейные дифференциальные уравнения с конечным числом дробных производных Лиувилля, являющиеся аналогами обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера. Применяя прямое и обратное интегральные преобразования Меллина и используя теорию вычетов, устанавливаются решения в замкнутой форме рассматриваемых уравнений в терминах обобщенных функций Райта и обобщенных гипергеометрических функций.

SOLUTION OF LINEAR NONHOMOGENEOUS EQUATIONS WITH THE LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVES

Kilbas A.A., Zhukovskaya N.V.

Linear differential equations with a finite number of Liouville fractional derivatives, being analogous of the Euler ordinary differential equations, are investigated. Using the direct and inverse Mellin integral transforms and the residue theory, solutions in closed form of the considered equations are established in terms of generalized Wright and generalized hypergeometric functions.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k x^{\alpha+k} \left(D_{0+}^{\alpha+k} y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad n \in \mathbb{N}; \ A_{n-1} \neq 0), \quad (1)$$

с $\alpha > 0$ и комплексными постоянными $A_0, ..., A_{n-1} \in \mathbb{C}$ на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$. Здесь $(D_{0+}^{\alpha} y)(x)$ – левосторонняя дробная производная Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1, (5.8)]:

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \ (x > 0; \ n = [\alpha]+1), \quad (2)$$

$\Gamma(n-\alpha)$ гамма-функция Эйлера [2, раздел 1.1] и $[\alpha]$ есть целая часть $\alpha > 0$.

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то $D_{0+}^{m} y = y^{(m)}$ и уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным Эйлера, и поэтому мы называем (1) уравнением типа Эйлера.

Мы решаем уравнение (1) методом прямого и обратного преобразований Меллина $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$:

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)dt \quad (s \in \mathbb{C}),$$

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}g(s)ds \quad (\gamma = \Re(s)).$$

Этот метод, примененный в [4, раздел 5.4.2] для уравнения (1) с двумя дробными производными (n=2), основан на соотношении

$$\left(\mathcal{M}x^{\alpha+k}D_{0+}^{\alpha+k}y\right)(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)}(\mathcal{M}y)(s), \tag{3}$$

которое справедливо для подходящих функций $y(x)$; см. [1, раздел 7.3].

Применяя преобразование Меллина к (1) и учитывая (3), имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha-k)} = (\mathcal{M}f)(s). \tag{4}$$

Используя соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{5}$$

для гамма-функции Эйлера $\Gamma(z)$ [2, формула 1.2(1)], перепишем (4) в виде

$$P_\alpha(s)(\mathcal{M}y)(s) = (\mathcal{M}f)(s), \tag{6}$$

$$P_\alpha(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s-\alpha)}\left[A_0+A_1(-s-\alpha)+...+A_{n-1}(-s-\alpha)...(2-n-s-\alpha)\right]. \tag{7}$$

Применяя обратное преобразование Меллина к (6) и используя равенство $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}f = f$, справедливое для подходящих f, получим решение (1) в виде

$$y(x) = \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\mathcal{M}f(s)}{P_\alpha(s)}\right]\right)(x). \tag{8}$$

Введя функцию

$$G(x) = \left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{1}{P_\alpha(1-s)}\right]\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}}\left(\mathcal{M}^{-1}\left[\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_{n-1})}\right]\right)(x), \tag{9}$$

где s_1, s_2, ..., s_{n-1} - нули многочлена $A_0+A_1(s-\alpha-1)+...+A_{n-1}(s-\alpha-1)...(s-\alpha+1-n)$ степени $n-1$, и применяя свойство свертки Меллина

$$\left(\mathcal{M}\int_0^\infty K(t)f(xt)dt\right)(s)=(\mathcal{M}K)(1-s)(\mathcal{M}f)(s), \qquad (10)$$

получим решение уравнения (1) в виде:

$$y(x)=\int_0^1 G(t)f(xt)dt=\int_0^x G\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{x}, \qquad (11)$$

где в соответствии с (9)

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i A_{n-1}}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_{n-1})}x^{-s}ds \quad (\gamma=\Re(s)). \qquad (12)$$

Вычислим интеграл в (12), используя теорию вычетов. Известно (см., например, [2, раздел 1.1]), что функция $\Gamma(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением простых полюсов $s=-n$ $(n\in\mathbb{N})$ с вычетом $\frac{(-1)^n}{n!}$, и

$$\Gamma(z)\sim\frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \quad (z\to -n,\ n\in\mathbb{N}_0). \qquad (13)$$

Поэтому подынтегральная функция в правой части (12)

$$g(s)=\frac{\Gamma(s-\alpha)}{\Gamma(s)(s-s_1)...(s-s_{n-1})}x^{-s} \qquad (14)$$

для любого фиксированного $x\neq 0$ есть аналитическая функция от s за исключением полюсов $s=s_1$, $s=s_2,...,$ $s=s_{n-1}$ и $s=\alpha-n$ $(n\in\mathbb{N}_0)$. Следовательно, $G(x)$ в (12) будет иметь различные значения в $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ случаях.

Непосредственно доказывается, что во всех случаях $G(x)$ выражается в терминах обобщенной функции Райта ${}_p\Psi_q[z]$ и обобщенной гипергеометрической функции ${}_pF_q[z]$, определяемых при $a_i, b_j\in\mathbb{C}$ и $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$ $(i=1,...,p,\ j=1,...,q)$ соответственно степенными рядами

$${}_p\Psi_q[z]\equiv{}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c}(a_1,\alpha_1),...,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),...,(b_q,\beta_q)\end{array}\Big|\, z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^p\Gamma(a_i+\alpha_i k)}{\prod_{j=1}^q\Gamma(b_j+\beta_j k)}\frac{z^k}{k!}, \qquad (15)$$

$${}_pF_q[z]\equiv{}_pF_q\left[\begin{array}{c}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{array}\Big|\, z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!}. \qquad (16)$$

Здесь $(z)_k$ символ Похгаммера, определенный для $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ как

$$(z)_0 = 1,\ (z)_k = z(z+1)\cdots(z+k-1) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{17}$$

Условия сходимости рядов (15) и (16) установлены в [3, теорема 2] и [2, раздел 4.1].

Следующая теорема дает явное решение уравнения (1) в простейшем случае, когда все полюсы в подынтегральной функции (14) простые.

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$ и $A_0, ..., A_{n-1} \in \mathbb{C}$ $(A_{n-1} \neq 0)$, и пусть корни s_1, $s_2, ...,$ s_{n-1} такие, что $s_1 \neq s_2 \neq ... \neq s_{n-1} \neq \alpha - k$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда*

$$G(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_{n-1}}\, {}_{n-1}\Psi_n\left[\begin{matrix}(\alpha - s_1, -1), ..., (\alpha - s_{n-1}, -1)\\ (\alpha, -1), (\alpha - s_1 + 1, -1), ..., (\alpha - s_{n-1} + 1, -1)\end{matrix}\Big| -x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(s_k-\alpha)x^{-s_k}}{\prod_{j=1, j\neq k}^{n-1}(s_k - s_j)\Gamma(s_k)} = \tag{18}$$

$$= \frac{x^{-\alpha}}{A_{n-1}(\alpha - s_1)...(\alpha - s_{n-1})\Gamma(\alpha)}\, {}_nF_{n-1}\left[\begin{matrix}1-\alpha, s_1 - \alpha, ..., s_{n-1} - \alpha\\ s_1 - \alpha + 1, ..., s_{n-1} - \alpha + 1\end{matrix}\Big| x\right] +$$

$$+\frac{1}{A_{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma(s_k-\alpha)x^{-s_k}}{\prod_{j=1, j\neq k}^{n-1}(s_k - s_j)\Gamma(s_k)}. \tag{19}$$

Частное решение $y(x)$ уравнения (1) задается (11) при условии, что интегралы в правых частях (11) сходятся.

Доказательство.

Из условий теоремы следует, что простые полюса $s = s_1$, $s = s_2, ...,$ $s = s_{n-1}$ и $s = \alpha - k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ подынтегральной функции (14) в (12) не совпадают. Выбрав $\gamma > \max[\Re(s_1), \Re(s_2), ..., \Re(s_{n-1}), \alpha]$, и принимая во внимание (13), имеем

$$G(x) = \frac{1}{A_{n-1}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{res}_{s=\alpha-k}g(s) + \mathrm{res}_{s=s_1}g(s) + \mathrm{res}_{s=s_2}g(s) + ... + \mathrm{res}_{s=s_{n-1}}g(s)\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{s\to\alpha-k}\frac{(s-\alpha+k)(-1)^k}{A_{n-1}k!(s-\alpha+k)(s-s_1)...(s-s_{n-1})\Gamma(s)}x^{-s} +$$

$$+\lim_{s\to s_1}\frac{(s-s_1)\Gamma(s-\alpha)}{A_{n-1}(s-s_1)...(s-s_{n-1})\Gamma(s)}x^{-s} +$$

$$+\lim_{s\to s_2}\frac{(s-s_2)\Gamma(s-\alpha)}{A_{n-1}(s-s_1)...(s-s_{n-1})\Gamma(s)}x^{-s} + ... + \lim_{s\to s_{n-1}}\frac{(s-s_{n-1})\Gamma(s-\alpha)}{A_{n-1}(s-s_1)...(s-s_{n-1})\Gamma(s)}x^{-s} =$$

$$= \frac{1}{A_{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\alpha+k}}{k!(\alpha-k-s_1)...(\alpha-k-s_{n-1})\Gamma(\alpha-k)} +$$

$$+ \frac{\Gamma(s_1-\alpha)}{A_{n-1}(s_1-s_2)...(s_1-s_{n-1})\Gamma(s_1)} x^{-s_1} + ...$$

$$... + \frac{\Gamma(s_{n-1}-\alpha)}{A_{n-1}(s_{n-1}-s_1)...(s_{n-1}-s_{n-2})\Gamma(s_{n-1})} x^{-s_{n-1}}. \qquad (20)$$

Используя соотношение (5), находим

$$G(x) = \frac{x^{-\alpha}}{A_{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha-k-s_1)...\Gamma(\alpha-k-s_{n-1}) x^k}{k!\Gamma(\alpha-k-s_1+1)...\Gamma(\alpha-k-s_{n-1}+1)\Gamma(\alpha-k)} +$$

$$+ \frac{1}{A_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(s_k-\alpha) x^{-s_k}}{\prod_{j=1, j\neq k}^{n-1} (s_k-s_j)\Gamma(s_k)}, \qquad (21)$$

что доказывает (18). Используя лемму 1(б) из [3], непосредственно проверяется, что функция ${}_{n-1}\Psi_n[-x]$ в (18) существует. Далее, используя формулы

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} = \frac{(-1)^k (1-\alpha)_k}{\Gamma(\alpha)} \quad (\alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0), \qquad (22)$$

$$\Gamma(z+k) = \Gamma(z)(z)_k \quad (z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0), \qquad (23)$$

из (21) получаем (19). Таким образом, теорема доказана.

В случаях, когда некоторые из полюсов $s = s_1$, $s = s_2, ...$, $s = s_{n-1}$ и $s = \alpha - n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) подынтегральной функции $g(s)$ в (14) совпадают, явные решения уравнения (1) имеют более сложный вид.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований (проект Ф08МС-018).

Список литературы

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

[2] A.Erdelyi, W.Magnus, F.Oberhettinger and F.G.Tricemi, *Higher Transcendental Functions*, Vol.I. McGraw-Hill, New York (1953); Reprinted: Krieger, Melbourne-Florida (1981).

[3] A.A.Kilbas, M.Saigo and J.J.Trujillo, On the generalized Wright function, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **5** (2002), *no. 4*, 437-460.

[4] A.A.Kilbas, M.M.Strivastava and J.J.Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, etc. (2006).

Белорусский государственный университет
г. Минск,
e - mail: anatolykilbas@gmail.com
e -mail: nataljazhukovskaya@gmail.com