

512

7

Э 32

Эйлер Л.

Универсальная
арифметика

Т. 2

Золотой век

(1707-1783) 17882

ГРАЖДАНСКИЙ ШРИФТ

Handwritten text in Cyrillic script, likely a title or description, possibly mentioning "МД" and "XXIII".

Handwritten number: $\frac{\text{с. № (XI) 85}}{2271}$

Handwritten text in Cyrillic script, possibly a name or title, partially obscured by other markings.



LEONARDO EUGENIO

ACADEMIA RETROROLICA

Handwritten signature or initials.

ЧКТПБ

морской Академии

1788 года.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИΘΜΕΤΙΚΑ

Г. Леонгарда Ейлера,

переведенная съ Нѣмецкаго подлинника

Академіи Наукъ адъюнктомъ Петромъ

Иноходцовымъ

и студентомъ Иваномъ Юдинымъ.

ТОМЪ ВТОРЫЙ,

въ которомъ предлагаются задачи

рѣшенія уравненій,

и Діофанскій образъ рѣшить вопросы



Вторымъ тисненіемъ.

482945

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ,

при Императорской Академіи Наукъ

1788 года.

РОСПИСЬ МАТЕРІАМЪ.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

*объ Алгебраическихъ уравненіяхъ и
ихъ рѣшеніи.*

ГЛАВА	I.	о рѣшеніи задачъ вообще-стран.	1
— — —	II.	объ уравненіи первой степени и ихъ рѣшеніи - - - - -	8
— — —	III.	о рѣшеніи нѣкоторыхъ принадлежа- щихъ сюда вопросовъ - - -	15
— — —	IV.	о разрѣшеніи двухъ или больше ура- вненій первой степени - - -	34
— — —	V.	о рѣшеніи чистыхъ квадратныхъ ура- вненій - - - - -	53
— — —	VI.	о рѣшеніи смѣшенныхъ квадратныхъ уравненій - - - - -	65
— — —	VII.	о извлеченіи корней изъ многоуголь- ныхъ чиселъ - - - - -	82
— — —	VIII.	о извлеченіи квадратныхъ корней изъ биномія , или двучленного числа - - - - -	90
— — —	IX.	о свойствахъ квадратныхъ уравне- ній - - - - -	106
— — —	X.	о разрѣшеніи чистыхъ кубическихъ уравненій - - - - -	118

) (

— —

ГЛАВА	XI.	о разрѣшеніи полныхъ кубичныхъ уравненій	- - - -	127
— — —	XII.	о правилѣ Кардана, или Сципіона Феррея	- - - -	146
— — —	XIII.	о разрѣшеніи уравненій четвертой степени, кои также и биквадратныя называются	- - - -	158
— — —	XIV.	о Помбеліевоиѣ правилѣ биквадрат- ныя уравненія приводить въ кубич- ныя	- - - -	171
— — —	XV.	о новомѣ рѣшеніи биквадратныхъ уравненій	- - - -	178
— — —	XVI.	о разрѣшеніи уравненій чрезъ при- ближеніе	- - - -	189

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

О неопредѣленной Аналитикѣ.

ГЛАВА	I.	о разрѣшеніи такихъ уравненій, въ ко- торыхъ больше нежели одно неизвѣ- стное число находится.	-	206
— — —	II.	о правилѣ такъ называемомѣ слѣпомѣ, гдѣ изъ двухъ уравненій три или больше неизвѣстныхъ чиселъ опре- дѣляются	- - - -	231
— — —	III.	о составныхъ неопредѣленныхъ ура- вненіяхъ, въ которыхъ первая шолько		III

степень неизвѣстнаго числа нахо-
дится - - - - - 241

ГЛАВА IV. о способѣ неизвлекаемую формулу
 $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ сдѣлать извлека-
емую - - - - - 249

— — — V. о случаяхъ, въ которыхъ формула
 $a+bx+cx^2$ никогда квадратомъ быть
не можетъ - - - - - 274

— — — VI. о случаяхъ, въ которыхъ формула
 ax^2+b будетъ квадратъ въ цѣлыхъ
числахъ - - - - - 290

— — — VII. о особливомъ способѣ формулу ax^2+1
сдѣлать квадратомъ въ цѣлыхъ чи-
слахъ - - - - - 308

— — — VIII. о способѣ неизвлекаемую формулу
 $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ сдѣлать раціо-
нальною - - - - - 323

— — — IX. о способѣ неизвлекаемую формулу
 $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$ сдѣлать
извлекаемою - - - - - 338

— — — X. о способѣ формулу $\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+dx^3)}$
сдѣлать раціональною - 358

— — — XI. о разрѣшеніи на множителей форму-
лы $ax^2+bx+cy$ - - - 373

— — — XII. о превращеніи формулы ax^2+cy въ
квадраты, или вышшія степени - 393

— — — XIII. о нѣкоторыхъ формулахъ сего рода
 ax^4+by^4 , коихъ квадратами сдѣлать
не можно - - - - - 411

ГЛАВА XIV.	разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ принадлежащихъ до сей части Ана- литики.	- - - -	430
— — — XV.	о разрѣшеніи вопросовъ, въ которыхъ требуется кубы .	- - -	498

Конецъ рослиси.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ,

о б ѣ а л г е б р а и т е с к и х ѣ у р а в н е н і я х ѣ
и о и х ѣ р ѣ ш е н і и .

Г Л А В А I.

О рѣшеніи задачъ вообще.

565.

Главное намяреніе алгебры, такъ какъ и пропчихъ частей маатематики, клонится студа, чптобъ опредѣлить величину неизвѣстныхъ количествъ, что дѣлается изъ подробнаго разсмотрѣнія обстоятельствъ въ вопросѣ предписанныхъ, и означенныхъ извѣстными количествами. Чего ради алгебру опредѣлить можно и симъ образомъ, то есть, что въ ней показывается, какимъ образомъ изъ данныхъ или извѣстныхъ количествъ находить неизвѣстные.

564.

Сіе сходствуєтъ со всѣмъ тѣмъ, что по сіе мѣсто уже предложено было ; ибо вездѣ изъ данныхъ количествъ исканы бы-
Томъ II. А ли

ли такіе , которые прежде какъ неизвѣстные мы брали. Первой тому примѣръ дастъ сложеніе , гдѣ данныхъ двухъ или больше чиселъ находили мы сумму , то есть такое число , которое даннымъ числамъ вмѣстѣ взятымъ равно было.

Въ вычитаніи искали мы число равное разности двухъ данныхъ чиселъ.

Самое по же примѣчается въ умноженіи , дѣленіи , въ возвышеніи до степеней и извлеченіи корней , гдѣ всегда изъ данныхъ чиселъ находится неизвѣстное.

565.

Въ послѣдней части разрѣшили уже мы нѣкоторые вопросы , при чемъ всегда искали такое число , которое изъ другихъ данныхъ чиселъ по нѣкоторымъ обстоятельствамъ опредѣлить должно было.

Чего ради всѣ вопросы клонятся туда , чтобъ изъ данныхъ нѣкоторыхъ чиселъ находить новое , состоящее съ прежними въ нѣкоемъ союзѣ , которой опредѣляется по нѣкоторымъ обстоятельствамъ или свойствамъ принадлежащимъ къ искомому числу.

566.

Во всякомъ вопросѣ искомое число означається послѣдними буквами алфавита, и смотришься на предписанныя въ немъ обстоятельства, которые даютъ уравненіе между двумя числами. Изъ такого уравненія должно по томъ опредѣлить величину искомага числа, чрезъ что разрѣшится и самой вопросъ. Случаются иногда вопросы, гдѣ ищется больше нежели одно число, но что равнымъ образомъ чрезъ уравненія совершается.

567.

Сіе можно лучше изъяснить самымъ примѣромъ. Представь себѣ вопросъ такой:

20 человекъ мущины и женщины вмѣстѣ ѣдятъ въ пракширѣ, мущина платитъ 8 грош., а женщина 7 грош. вся же сумма денегъ, которую они хозяину заплатили, дѣлается 6 талеровъ; спрашивается, сколько мущинъ и сколько женщинъ въ томъ числѣ было?

Для рѣшенія сего вопроса положи число мущинъ $=x$, и поступай съ нимъ

А 2

такъ

такъ какъ съ извѣстнымъ количествомъ, то есть, какъ будто бы хотѣлъ опробовать рѣшится ли заданной вопросъ, ежели число мужчинъ положится x , когда же мужчины и женщины вмѣстѣ дѣлають 20 человекъ, то можно отсюда опредѣлить и число женщинъ, которое выдстъ, ежели число мужчинъ вычтется изъ 20, по чему число женщинъ $= 20 - x$. Каждой мужчина платитъ 8 грошей, слѣдов. x мужчинъ заплатятъ $8x$ грошей. Каждая женщина платитъ 7 грош., то $20 - x$ женщинъ заплатятъ $140 - 7x$ грош. слѣдовательно мужчины и женщины вмѣстѣ платятъ $140 + x$ грош.; а мы знаемъ, сколько они испратили, то есть 6 рейхспалеровъ, которые въ грошахъ дѣлають 144, чего ради будемъ мы имѣть сіе уравненіе $140 + x = 144$, откуда ясно видно, что $x = 4$.

И такъ въ трактирѣ было 4 мужчины и 16 женщинъ.

568.

Другой подобной сему вопросъ.

20 человекъ женщины и мужчины вмѣстѣ были въ трактирѣ; мужчины платятъ

пять 24 гулдена, и женщины также 24 гулдена, при чемъ извѣстно, что каждой мушнна долженъ былъ платить одинъ гулденъ больше нежели женщина, спрашивается, сколько было мушннъ и сколько женщинъ?

Пусть будетъ число мушннъ $= x$, то число женщинъ будетъ $= 20 - x$ и когда x мушннъ вмѣстѣ испратили 24 гулдена, то каждой изъ нихъ заплатилъ $\frac{24}{x}$ гулд.

$20 - x$ женщинъ испратили 24 гулдена, то каждая изъ нихъ издержала $\frac{24}{20 - x}$ гулд. и поелику сія издержка женщины однимъ гулденомъ меньше, нежели издержка мушнны, то сжали изъ заплаченной суммы денегъ мушнною вычтется 1 гулденъ, останется издержка женщины, откуда получится уравненіе $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20 - x}$, и изъ сего уравненія надлежитъ искать величину x , которую не такъ легко здѣсь вывести можно, какъ въ первомъ вопросѣ. Но въ слѣдующихъ увидимъ, что $x = 8$ сходствуесть съ найденнымъ уравненіемъ $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{20 - 8}$; $2 = 2$.

569.

Въ каждомъ вопросѣ главное дѣло состоятъ въ томъ, чтобъ означивъ буквами неизвѣстныя или искомыя количества рассмотреть починя обстоятельства вопроса, и изъ нихъ вывести уравненіи; потомъ разрѣшить найденное уравненіе, или сыскать величину неизвѣстныхъ чиселъ, о чемъ въ сей части говорено будетъ.

570.

Самые вопросы разнятся также между собою, ибо въ нѣкоторыхъ ищется только одно число, а въ иныхъ 2 или больше; и въ семъ послѣднемъ случаѣ требуется столькожъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ или искомыхъ количествъ въ немъ будетъ, которые всѣ выводить надобно изъ обстоятельствъ вопроса.

571.

И такъ уравненіе состоитъ изъ двухъ членовъ, изъ коихъ одинъ другому равенъ полагается; а что бы изъ уравненія опредѣлить величину неизвѣстнаго количества, потребны бывають часто весьма

мно-

многія перемѣны, кои всѣ основаніе свое имѣютъ на томъ, что когда количества равны между собою, равны будутъ также, ежели къ обѣимъ изъ нихъ одинакія величины придадутся, или изъ нихъ вычтутся; равнымъ образомъ, ежели они оба на одно какое нибудь число умножатся или раздѣлятся, ежели они до одинакой степени возвысятся, или одинакіе корни изъ нихъ извлекутся, и наконецъ ежели обоимъ ихъ возмуться логарифмы, что уже и въ прежней части учинено было.

572.

Тѣ уравненія, въ которыхъ кромѣ первой степени неизвѣстнаго числа не находится, весьма легко рѣшаются, и называются уравненіями первой степени. Потомъ слѣдуютъ уравненія, въ которыхъ вторая степень или квадратъ неизвѣстнаго количества находится, и называются квадратныя уравненія, или уравненія второй степени; уравненія третьей степени, гдѣ кубъ неизвѣстнаго количества находится, и такъ далѣе, о чемъ въ сей части объявлено будетъ.

А 4

ГЛАВА

Г Л А В А II.

Объ уравненіяхъ первой степени и ихъ рѣшеніи.

573.

Если неизвѣстное, или искомое количество означится буквою x , и найденное уравненіе будетъ уже на одной сторонѣ знака $=$ имѣть одно только x , а на другой всѣ данныя числа, какъ $x=25$, то искомая величина x уже дѣйствительно имѣется; и всегда стараться надобно дойти до сей формулы, какъ бы смѣшено ни было первое уравненіе. На сей конецъ въ слѣдующихъ предпишутся правила.

574.

Начнемъ сперва съ самыхъ легкихъ случаевъ, и положимъ, что нѣкто дошелъ до сего уравненія:

$x+9=16$, то видно, что $x=7$.

Пусть будетъ вообще $x+a=b$; гдѣ a и b означаютъ данныя числа, какія бы они ни были. Здѣсь должно съ обѣихъ сторонъ вычестъ a , и получится уравненіе $x=b-a$, которое опредѣляетъ намъ величину x .

575.

575.

Ежели найденное уравненіе будетъ $x - a = b$, то придай съ обѣихъ сторонъ a , и будетъ $x = b + a$, что означаетъ величину x .

Точно также поступать надлежитъ, ежели первое уравненіе будетъ $x - a = aa + 1$: ибо тогда $x = aa + a + 1$, изъ уравненія $x - 8a = 20 - 6a$ получится $x = 20 - 6a + 8a$ или $x = 20 + 2a$, а изъ $x + 6a = 20 + 5a$ найдемъ $x = 20 + 5a - 6a$, или $x = 20 - 3a$.

576.

Когда же найденное уравненіе будетъ $x - a + b = c$, то здѣсь можно съ обѣихъ сторонъ придать a , и выдѣсть $x + b = c + a$, по томъ вычѣсть съ обѣихъ сторонъ b , и будетъ $x = c + a - b$. Можно также съ обѣихъ сторонъ придать вдругъ $+a - b$, и будетъ $x = c + a - b$: такъ въ слѣдующихъ примѣрахъ, когда $x - 2a + 5b = 0$, то будетъ $x = 2a - 5b$; когда $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, то будетъ $x = 25 + 4a$, и когда $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, то $x = 34 - 4a$.

577.

Ежели найденное уравненіе имѣть будетъ формулу $ax = b$, то раздѣли съ

А 5

обѣихъ

обѣихъ сторонъ на a , и будетъ $x = \frac{b}{a}$. А когда $ax + b = c$, то должно сперва то, что при ax находится, отнять прочь, то есть приписать съ обѣихъ сторонъ $-b$, и будетъ $ax = c - b$, сего ради $x = \frac{c-b}{a}$.

Пусть будетъ $2x + 5 = 17$, то выдѣтъ $2x = 12$, и $x = 6$

$3x - 8 = 7$ выдѣтъ $3x = 15$, и $x = 5$

$4x - 5 = 3a = 15 + 9a$, выдѣтъ $4x = 20 + 12a$

и $x = \frac{20 + 12a}{4} = 5 + 3a$.

578.

Когда уравненіе будетъ $\frac{x}{a} = b$, то помножь съ обѣихъ сторонъ на a и будетъ $x = ab$; и когда $\frac{x}{a} + b = c$, то сперва будетъ $\frac{x}{a} = c - b$ и по томъ $x = (c - b)a = ac - ab$.

Пусть будетъ $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, то будетъ $\frac{1}{2}x = 7$, и $x = 14$

— $\frac{1}{2}x - 1 + 2a = 3 + a$; $\frac{1}{2}x = 4 - a$, и $x = 8 - 2a$

— $\frac{x}{a-1} - 1 = a$ — $\frac{x}{a-1} = a + 1$; $x = (a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$.

579.

Ежели уравненіе будетъ $\frac{ax}{b} = c$, то умножь съ обѣихъ сторонъ на b , и будетъ

дествъ $ax = cb$, и $x = \frac{cb}{a}$. Когда же $\frac{ax}{b} - c = d$, то
будеть $\frac{ax}{b} = d + c$, и $ax = bd + bc$. слѣдств.
 $x = \frac{bd + bc}{a}$. Пусть будетъ $\frac{3}{4}x - 4 = 1$, то $\frac{3}{4}$
 $x = 5$, $3x = 15$ и $x = \frac{15}{3}$, то есть $7\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, то будетъ $\frac{1}{4}x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, $3x$
 $= 18$ и $x = 6$.

580.

Статься можетъ, что больше неже-
ли одинъ членъ уравненія содержать въ
себѣ букву x , и стоятъ на одной или на
обѣихъ сторонахъ знака равенства. Ежели
они будутъ на одной сторонѣ, какъ $x + \frac{1}{2}$
 $x + 5 = 11$, то будетъ $x + \frac{1}{2}x = 6$, $3x = 12$,
и $x = 4$. Пусть будетъ $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, что
будеть x ? умножь сперва на 3 и выдешь
 $4x + \frac{1}{2}x = 132$, по томъ умножь еще на 2
и будетъ $11x = 264$, слѣд. $x = 24$; но сн
три числа могутъ вдругъ соединены быть
въ одинъ членъ, какъ $\frac{1}{8}x = 44$, раздѣли съ
обѣихъ сторонъ на 11; и выдешь $\frac{1}{8}x = 4$,
и $x = 24$.

Положи $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$, что соединивъ
въ одинъ членъ дасъ $\frac{1}{2}x = 1$, и $x = 2$;
также когда $ax - bx + cx = d$, то сие будетъ
поже

тоже что и $(a-b+c)x=d$, откуда выйдетъ $x=\frac{d}{(a-b+c)}$.

581.

Когда же x находится въ обѣихъ частяхъ уравненія, какъ $3x+2=x+10$, то должно x съ одной стороны, гдѣ оно умножено на меньшее число, перенести на другую: чего ради вычти съ обѣихъ сторонъ x , и выйдетъ $2x+2=10$, и $2x=8$, слѣд. $x=4$. Пусть будетъ еще $x+4=20-x$, то $2x+4=20$, $2x=16$ и $x=8$.

Положи $x+8=32-3x$, то будетъ $4x+8=32$, и $4x=24$, слѣд. $x=6$.

Также $15-x=20-2x$, то $15+x=20$, слѣд. $x=5$.

Пусть будетъ $1+x=5-\frac{1}{2}x$, то $1+\frac{1}{2}x=5$; $\frac{1}{2}x=4$, откуда $x=\frac{8}{2}=2\frac{1}{2}$.

— — $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}x$; придай $\frac{1}{3}x$, выйдетъ $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{7}{12}x$; вычти $\frac{1}{3}$, будетъ $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$, умножь на 12 и получишся $7x=2$, и $x=\frac{2}{7}$.

Также $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, придай $\frac{2}{3}x$, выйдетъ $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{5}{6}x$; вычти $\frac{1}{4}$, будетъ $\frac{5}{6}x=1\frac{1}{4}$; умножь на 6, получишся $7x=7\frac{1}{2}$; раздьли на 7, и будетъ $x=1\frac{1}{14}$ или $x=1\frac{1}{14}$.

582.

582.

Если найдешь такое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное число въ знаменателѣ дроби содержится, то должно тогда сію дробь исключить изъ уравненія, умноживъ оное на помянутого знаменателя.

Такъ когда найдется $\frac{100}{x} - 8 = 12$,
то придай 8, и выдешь $\frac{100}{x} = 20$,
умножь на x — — $100 = 20x$,
раздѣли на 20, будетъ $x = 5$.
Пусть еще будетъ $\frac{5x+3}{x-1} = 7$,
умножь на $x-1$, выдешь $5x+3 = 7x-7$,
вычти $5x$, будетъ $3 = 2x-7$,
придай 7, выдешь $10 = 2x$, и слѣд. $x = 5$.

583.

Иногда въ уравненіи попадаются также и коренные знаки, но уравненіе не смотря на то надлежитъ до первой степени, какъ напр. когда ищется число x меньше 100 такое, чтобъ квадратной корень изъ $100-x$ равенъ былъ 8, или чтобъ $\sqrt{100-x} = 8$, то возми съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ $100-x = 64$, придай x , выдешь $100 = 64+x$, вычти 64,
оста-

14 объ алгебраическ. уравненїяхъ

останется $x=36$, или можно бы было въ семь случаѣ поступить и такимъ образомъ, когда $100-x=64$, то вычти 100 и останется $-x=-36$, умножь на -1 , произойдетъ $x=36$.

584.

Иногда неизвѣстное число x находится въ показателѣ, какіе примѣры мы уже выше сего видѣли, и въ семь случаѣ должно прибѣжище имѣть къ логарифмамъ.

Такъ когда найдется $2^x=512$, то берущся съ обѣихъ сторонъ логарифмы, и будетъ x лог. $2=$ лог. 512 , раздѣли на лог. 2 выдешъ $x=\frac{\text{лог. } 512}{\text{лог. } 2}$, что по таблицахъ найдется такъ:

$$x=\frac{2,7092700}{0,3010300}=\frac{27092700}{3010300}, \text{ слѣд. } x=9$$

пусть будетъ $5 \cdot 3^{2x}-100=305$, то придай 100, и будетъ $5 \cdot 3^{2x}=405$, раздѣли на 5, выдешъ $3^{2x}=81$, взявъ логарифмы $2x$ лог. $3=$ лог. 81 , раздѣли на 2 лог. 3 и выдешъ $x=\frac{\text{лог. } 81}{2 \text{ лог. } 3}$ или $x=\frac{\text{лог. } 81}{\text{лог. } 9}$.

По

По таблицамъ будетъ $x = \frac{1,9084850}{0,9542425} =$
 $\frac{19084850}{9542425}$, по чему $x=2$.

Г Л А В А III.

*О рѣшеніи нѣкоторыхъ принадлежащихъ сюда
вопросовъ.*

585.

Вопросъ: раздѣли число 7 на 2 части такъ, чтобъ большая часть была 3мя больше нежели меньшая.

Пусть будетъ большая часть $=x$, то меньшая $=7-x$, и по обстоятельству вопроса должно быть $x=7-x+3$, или $x=10-x$, придай x , будетъ $2x=10$, раздѣли на 2, найдется $x=5$.

Отвѣтъ: большая часть $=5$, а меньшая $=2$.

То же.

Общей вопросъ. Раздѣлитъ a на двѣ части такъ, чтобъ большая часть превышала меньшую числомъ b ?

По.

Положи большую часть $=x$, то будетъ меньшая $=a-x$; чего ради $x=a-x+b$; придай съ обѣихъ сторонъ x , и будетъ $2x=a+b$, раздѣли на 2, получится $x=\frac{a+b}{2}$.

Второе рѣшеніе. Пусть будетъ большая часть $=x$, и когда она меньшую часть превышаетъ числомъ b , то меньшая часть числомъ b будетъ меньше большей, и по сему меньшая часть $=x-b$, обѣ сїи части вмѣстѣ должны составить число a , по чему $2x-b=a$, придай b , и будетъ $2x=b+a$, раздѣли на 2, выйдетъ $x=\frac{a+b}{2}$ большая часть, а меньшая $=\frac{a+b}{2}-b$ или $\frac{a+b}{2}-\frac{2b}{2}$ или $\frac{a-b}{2}$.

586.

Вопросъ. Послѣ отца осталось при сына и 1600 рейхсталеровъ денегъ, а по оставленной имъ духовной старшей сынъ долженъ взять изъ сей суммы 200 талеровъ, больше средняго, средней 100 талеровъ

ровъ больше нежели меньшей сынъ, спрашивается сколько каждой изъ нихъ возмездъ?

Положи наслѣдственную часть претяго сына $=x$, то будетъ часть втораго $=x+100$, перваго $=x+300$, и всѣ сии при части сложенныя вмѣстѣ должны дѣлать 1600 талеровъ, чего ради $3x+400=1600$, вычти 400, и будетъ $3x=1200$, раздѣли на 3, выдесть $x=400$.

Отвѣтъ. Третій сынъ возмездъ 400, второй 500, а первой 700 талеровъ.

587.

Вопросъ. По смерти отца осталось 4 сына и 8600 талеровъ, а по завѣту покойнаго деньги сии между сыновьями должны быть раздѣлены такъ, чтобъ первой сынъ взялъ въ двое больше нежели второй безъ 100 талеровъ; второй въ трое больше нежели третьей безъ 200 талер.; третьей въ четверо больше нежели четвертой безъ 300 талеровъ, ищется сколько каждой взялъ?

Наслѣдственная часть четвертаго будетъ x , претяго $4x-300$, втораго

Томъ II.

Б

12

482945

18 *объ алгебраическ. уравненіяхъ.*

$12x - 1100$, первого $24x - 2300$, и когда сумма всѣхъ сихъ частей должна составлять 8600 талеровъ, то получимъ мы уравненіе :

$41x - 3700 = 8600$, придай 3700, и выдешь $41x = 12300$, раздѣли на 41, частное дастъ $x = 300$.

Отвѣтъ. 4той сынъ возьметъ 300 талер., 5тей 900 талер., 2рой 2500 талер., первой 4900 талеровъ.

588.

Вопросъ. Нѣкто по смерти своей оставилъ 11000 талеровъ, жену, двухъ сыновей и трехъ дочерей, кои оставшесся имѣніе должны по силѣ духовной раздѣлить такъ, чтобъ жена покойнаго взяла вдвое больше сына, сынъ въ двое больше нежели дочь, спрашивается сколько каждому изъ нихъ достанется?

Наслѣдственную часть одной дочери положи $= x$, часть одного сына будетъ $= 2x$, и часть вдовы $= 4x$; слѣдственно все наследство будетъ $3x + 4x + 4x$, или $11x = 11000$: раздѣли на 11, выдешь $x = 1000$.

Отвѣтъ. Одна дочь получитъ 1000 тал.
одинъ

одинъ сынъ — —	2000	— —
а мать возмездъ —	4000	— —
слѣдств. 3 дочери возмездъ	3000	
2 сына —————	4000	
мать —————	4000	
сумма = 11000 талер.		

589.

Вопросъ. Одинъ отецъ оставилъ по смерти своей трехъ сыновей, которые оставшееся послѣ него имѣніе должны раздѣлить между собою такъ, чтобъ первой сынъ взялъ 1000 талеровъ меньше нежели половина всего наслѣдства, второй 800 талеровъ меньше нежели третей всего наслѣдства, третей 600 талеровъ меньше четвертой доли всего наслѣдства, спрашивается сколь велико было наслѣдство, и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи все наслѣдство = x

то первой сынъ взялъ $\frac{1}{2}x - 1000$

второй ——— ——— $\frac{1}{3}x - 800$

третей ——— ——— $\frac{1}{4}x - 600$.

Слѣдовательно всѣ при сына взяли $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, которая сумма должна быть равна всему наслѣдству x , и такъ

Б 2

урав-

20 *объ алгебраическ. уравненій*

уравненіе будетъ $\frac{11}{12}x - 2400 = x$

вычти x и будетъ $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$

придай 2400 — $\frac{1}{12}x = 2400$

помножь на 12, $x = 28800$.

Отвѣтъ. Все наслѣдство было 28800
рсихсп. изъ чего

первой сынъ взялъ 15400

второй — — — — 8800

третей — — — — 6600

Всѣ при = 28800 талеро́въ.

590.

Вопросъ. Оставшіеся по смерти отца
4 сына наслѣдство ихъ между собою дѣ-
лять такъ, что первой взялъ 5000 мень-
ше половины всего наслѣдства, другой
1000 меньше нежели $\frac{1}{2}$ наслѣдства, тре-
тій точно $\frac{1}{4}$ всего наслѣдства, четвертой
600 талеро́въ и еще $\frac{1}{4}$ наслѣдства, спра-
шивается, сколь велико было наслѣдство,
и сколько каждой сынъ взялъ?

Положи все наслѣдство $= x$

то взялъ первой $\frac{1}{2}x - 5000$

второй $\frac{1}{4}x - 1000$

третей $\frac{1}{4}x$

четвер. $\frac{1}{4}x + 600$

всѣ

всѣ 4 вмѣстѣ возмуть $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, что должно быть $= x$, чего ради уравненіе

$$\frac{1}{2}x - 3400 = x$$

вычти x и будетъ $\frac{1}{2}x - 3400 = 0$

$$\text{придай } 3400 - - \frac{1}{2}x = 3400$$

$$\text{раздѣли на } 17 - - \frac{1}{34}x = 200$$

$$\text{умножь на } 60 - - x = 12000$$

Отвѣтъ. Все наслѣдство было 12000 тал.

изъ коего первой сынъ возьметъ 3000 тал.

— — — второй — — — — — 3000

— — — третьей — — — — — 3000

— — — четвертой — — — — — 3000

591.

Вопросъ. Найди число, къ которому ежели придастся его половина, сумма бы столько превышала 60, сколько самое число недостаетъ до 65?

Пусть будетъ искомое число $= x$, то будетъ

$$x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$$

$$\text{придай } x, \text{ выдесть } \frac{3}{2}x - 60 = 65$$

$$\text{придай } 60 - - - \frac{3}{2}x = 125$$

$$\text{раздѣли на } 5 - - \frac{1}{2}x = 25$$

$$\text{умножь на } 2 - - x = 50$$

Отвѣтъ. Искомое число есть 50.

Б 3

592.

592.

Вопросъ. Раздѣлитъ число 32 на двѣ части такъ, что ежели меньшая часть раздѣлится на 6, а большая на 5, сумма бы частныхъ равна была 6?

Пусть меньшая часть будетъ $=x$, то большая $=32-x$ меньшая часть раздѣленная на 6, даетъ $\frac{x}{6}$, а большая раздѣленная на 5, въ частномъ даетъ $\frac{32-x}{5}$, чего ради будетъ $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$
 умножь на 5, выйдетъ $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$
 или $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$,
 придай $\frac{1}{6}x$, будетъ $32 = 30 + \frac{1}{6}x$,
 вычти 30 — — — $2 = \frac{1}{6}x$
 умножь на 6 — — — $x = 12$.

Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ 12, а большая $= 20$.

593.

Вопросъ. Сыскать число, которое ежели умножится на 5, произведеніе столько недостатало до 40, чѣмъ самое число меньше 12?

Положи искомое число $=x$, котораго недостатокъ до 12 есть $12-x$, и числа сама-

самого умноженного на 5, то есть, $5x$ недостатковъ до 40 есть $40 - 5x$, что должно быть равно $12 - x$;

чего ради $40 - 5x = 12 - x$,

придай $5x$, то будетъ $40 = 12 + 4x$,

вычти 12 — — — — $28 = 4x$,

раздѣли на 4 — — — — $x = 7$,

Отвѣтъ: искомое число есть 7.

594.

Вопросъ. Число данное 25 раздѣлить на двѣ части такъ, чтобъ большая часть была въ 49 разъ больше меньшей?

Пусть будетъ меньшая часть $= x$, то большая $= 25 - x$, и сію большую часть раздѣливъ на меньшую, въ частномъ должно выйти 49; чего ради $\frac{25-x}{x} = 49$

Помножь на x и выдешъ $25 - x = 49x$,

придай x — — — — $25 = 50x$,

раздѣли на 50 и будетъ $x = \frac{1}{2}$

Отвѣтъ. Меньшая часть будетъ $= \frac{1}{2}$, а большая $= 24\frac{1}{2}$, которую когда раздѣлишь на $\frac{1}{2}$, то есть помножишь на 2, выдешъ 49.

595.

Вопросъ. Данное число 48 раздѣлить на 9 частей такъ, чтобъ каждая часть послѣдующая превышала свою предыдущую ?

Пусть будетъ первая и самая меньшая часть x , то вторая будетъ $x + \frac{1}{2}$, третья $x + 1$, 4тая $x + 1\frac{1}{2}$ и такъ далѣе, понеже части сѣи дѣлають прогрессію арифметическую, которой первой членъ $= x$, разность $\frac{1}{2}$, по чему 9той членъ будетъ $x + 4$, къ которому приложивъ первой членъ x и сумму $2x + 4$ умноживъ на число членовъ 9, произойдетъ $18x + 36$ двойная сумма прогрессіи, слѣд. самая сумма будетъ $9x + 18$, копорая должна быть равна 48, по чему $9x + 18 = 48$

вычти 18, и будетъ $9x = 30$,

раздѣли на 9 — — $x = 3\frac{1}{3}$.

Опвѣтъ. Первая часть будетъ $3\frac{1}{3}$, а всѣ 9 частей суть такіе $3\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3} + 6\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} + 7\frac{1}{3}$, коихъ всѣхъ сумма $= 48$.

596.

596.

Вопросъ. Сыскать арифметическую прогрессию, которой первой членъ $= 5$, послѣдней $= 10$, сумма $= 60$? Здѣсь не дано ни разности ни числа членовъ прогрессіи; но посылку изъ перваго и послѣдняго членовъ можно бы было найти сумму всѣхъ, ежели бы число членовъ извѣстно было, то положи оное $= x$, и сумма прогрессіи будетъ $\frac{1}{2}x = 60$, раздѣли на 15, будетъ $\frac{1}{3}x = 4$, умножь на 2, выйдетъ $x = 8$. Когда число членовъ $= 8$, то положи разность оныхъ $= z$, по сему будетъ второй членъ $= 5 + z$, третей $= 5 + 2z$, осьмой $= 5 + 7z$, которой долженъ быть 10,

слѣдовательно $5 + 7z = 10$,

вычти 5 — — $7z = 5$,

раздѣли на 7 — — $z = \frac{5}{7}$.

Отвѣтъ. Разность прогрессіи есть $\frac{5}{7}$, а число членовъ 8, чего ради самая прогрессія будетъ:

$$\overset{1}{5} + \overset{2}{5\frac{5}{7}} + \overset{3}{6\frac{1}{7}} + \overset{4}{7\frac{1}{7}} + \overset{5}{7\frac{6}{7}} + \overset{6}{8\frac{1}{7}} + \overset{7}{9\frac{1}{7}}$$

$+ \overset{8}{10}$, коихъ сумма $= 60$.

597.

Вопросъ. Сыскать число, которое ежели умножится на 2, изъ произведенія вычтется 1, изъ удвоеннаго остатка вычтется еще 2, и остатокъ раздѣлится на 4, чтобъ въ частномъ вышло число единицею меньше искомаго?

Пусть будетъ искомое число x , умножь на 2, выйдетъ $2x$, вычти изъ сего 1, останется $2x-1$, сей остатокъ умножь на 2, будетъ $4x-2$, вычти 2, останется $4x-4$, сей остатокъ раздѣли на 4, частное число $=x-1$, что должно быть 1 меньше нежели x .

По сему $x-1=x-1$, сие показываетъ намъ, что x совсѣмъ опредѣлить не лзя, но вмѣсто его каждое число по изволению брать можно.

598.

Вопросъ. Нѣкто купилъ нѣсколько локтей сукна давъ за каждые 5 локтей 7 талеровъ, продаетъ опять и беретъ за каждые 7 локтей 11 талеровъ, отъ всего сукна барыша получаетъ 100 талер. Спрашивается сколько было всего сукна?

Поло-

Положимъ, что сукна было x локтей, и сперва смотрѣть должно, сколько оно въ покупкѣ стоило, что по слѣдующей тройной посылкѣ сыщется:

5 локтей стоятъ 7 талер., что стоятъ x локтей? Отвѣтъ $\frac{7}{5}x$ талера, столько денегъ выдалъ онъ за сукно. Теперь посмотримъ, сколько онъ за него взялъ, по сему тройному правилу 7 локтей стоятъ въ продажѣ 11 талер. что будутъ стоять x локтей? Отвѣтъ. $\frac{11}{7}x$ талер.; и сія будетъ взятая за сукно сумма, которая 100 талерами больше нежели выданная, чего ради уравненіе будетъ $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$,

вычти $\frac{7}{5}x$, останется $\frac{4}{35}x = 100$,
умножь на 35, выйдетъ $6x = 3500$,
раздѣли на 6, будетъ $x = 583\frac{1}{3}$.

Отвѣтъ. Слѣдовательно всего сукна было $583\frac{1}{3}$ локтя, которые куплены за $816\frac{2}{3}$ талера, и по томъ проданы за $916\frac{2}{3}$ талера, по чему барышь будетъ 100 талеровъ.

599.

Вопросъ. Нѣкто купилъ за 140 талеровъ 12 кусковъ сукна, въ семь числѣ были

были 2 куска бѣлые, 3 черные и 7 синихъ; кусокъ черного сукна стоить 2 талера больше нежели бѣлаго, а синяго каждой кусокъ стоить 3 талера больше нежели черного, спрашивается сколь дорого каждое изъ нихъ?

Положи, что кусокъ бѣлаго сукна стоить x , и слѣд. 2 куска бѣлаго стоятъ будутъ $2x$ талер :

Кусокъ черного стоятъ будетъ $x+2$, слѣдов. 3 куска черного стоятъ $3x+6$ талеровъ.

Кусокъ синяго стоить $x+5$, слѣд. 7 кусковъ синяго стоятъ $7x+35$ талер.

Всѣ 12 кусковъ стоятъ $12x+41$; въ самомъ же дѣлѣ даны они 140 талер., чего ради получимъ мы

уравненіе $12x + 41 = 140$,
вычти 41, останется $12x = 99$,
раздѣли на 12, будетъ $x = 8\frac{1}{4}$.

Отвѣтъ. Кусокъ бѣлаго сукна стоить
8 $\frac{1}{4}$ талер.

черного — — — — 10 $\frac{1}{4}$

синяго — — — — 13 $\frac{1}{4}$

600.

600.

Вопросъ. Нѣкто купилъ мушкатныхъ орѣховъ, и говоритъ, что цѣна 3хъ орѣховъ столько же превосходитъ 4 гроша, сколько цѣна 4хъ орѣховъ пресыщаетъ 10 грошей, спрашивается сколь дороги они были?

Говори когда 3 орѣха стоятъ $x+4$ гроша, то 4 орѣха стоятъ будутъ $x+10$ грошей; по тройному жъ правилу найдемъся, сколько 4 орѣха по первому положенію стоятъ будутъ, т. е. 3 орѣха стоятъ $x+4$ грош. $= 4$ орѣх. Отвѣтъ.

$\frac{4x+16}{3}$, и такъ будетъ, $\frac{4x+16}{3} = x+10$

или $4x+16=3x+30$,

вычти, $3x$ останется $x+16=30$,

вычти 16, будетъ $x=14$.

Отвѣтъ. 3 орѣха стоятъ 18 грошей, а 4 стоятъ 24 гроша; слѣд. одинъ орѣхъ стоитъ 6 грошей.

601.

Вопросъ. Нѣкто имѣетъ 2 серебряныхъ стакана и одну крышку: первой стаканъ вѣситъ 12 лотовъ, но когда положи-

ложится на него крышка, то вѣситъ онъ въ двое больше противъ другаго, естъли же наложится крышка на другой стаканъ, то вѣситъ онъ въ трое больше противъ перваго, спрашивается сколь тяжела крышка и другой стаканъ?

Положи что крышка вѣситъ x лотовъ, то первой стаканъ вмѣстѣ съ крышкой тянетъ $x+12$ лотовъ, и понеже сей вѣсъ въ двое больше противъ другаго стакана, то другой стаканъ вѣситъ $\frac{1}{2}x+6$ лотовъ; и когда наложится на него крышка, то вѣситъ онъ $\frac{1}{2}x+6$ лот., что должно быть 3. 12 лотовъ или 36; откуда получится уравненіе $\frac{1}{2}x+6=36$ или $\frac{1}{2}x=30$, и $\frac{1}{2}x=10$, слѣд. $x=20$

Отвѣтъ. Крышка вѣситъ 20 лотовъ и другой стаканъ 16,

602.

Вопросъ. Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя двухъ сортовъ монеты, перваго сорта на одинъ талеръ идетъ a монетъ, а другаго на тотъ же талеръ идетъ b монетъ. Нѣкто желаетъ у него взять на талеръ c монетъ, спрашивается сколько обмѣн-

обмѣнщикъ долженъ ему дать изъ каждаго сорта?

Положимъ, что перваго сорта даетъ ему обмѣнщикъ x монеть, слѣд. другаго $c-x$, но понеже оныя x монеть равны $\frac{x}{a}$ талер. ибо

$a : 1 = x : \frac{x}{a}$; а $c-x$ монеть равны $\frac{c-x}{b}$ талер. ибо $b : 1 = c-x : \frac{c-x}{b}$ слѣд. должно быть $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, или $\frac{bx}{a} + c-x = b$, или $bx + ac - ax = ab$, по томъ $bx - ax = ab - ac$; слѣдов. $x = \frac{ab-ac}{b-a} = \frac{a(b-c)}{b-a}$, отсюда будетъ $c-x = \frac{bc-ab}{b-a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$

Отвѣтъ. Перваго сорта даетъ обмѣнщикъ на талеръ $\frac{a(b-c)}{b-a}$ монеть, а другаго $\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Примѣчаніе. Снѣ оба числа легко можно найти по тройному правилу; первое находится $b-a : b-c = a : \frac{ab-c}{b-a}$, другое $b-a : c-a = b : \frac{bc-ba}{b-a}$. При семъ примѣчать надлежитъ, что b больше нежели a , и c меньше нежели b , а больше нежели a , какъ самое дѣло требуетъ.

603.

Вопросъ. Одинъ обмѣнщикъ имѣетъ у себя два сорта денегъ, перваго сорта идутъ

идутъ 10 монеть на талеръ, другаго 20, а требуетъ у него нѣкто 17 монеть на талеръ, спрашивается сколько получить онъ изъ каждаго сорта?

Въ семъ случаѣ $a=10$, $b=20$, $c=17$, откуда выдутъ слѣдующія тройныя правила:

I. $10:3=10:3$, слѣд. перваго сорта возьметъ 3; II. $10:7=20:14$, другаго возьметъ онъ 14.

604.

Вопросъ. Нѣкто оставилъ по смерти своей нѣсколько дѣшей и имѣніе, которое дѣши дѣлятъ между собою такъ, что первой изъ нихъ беретъ 100 талер. и еще десятую часть остальнаго имѣнія. Второй беретъ 200 талер. и сверхъ того все-третей --- --- 300 } гда 10тую часть
четвертой --- 400 } остальнаго имѣнія.
и такъ далѣе, и по семъ дѣлежѣ находится, что все имѣніе раздѣлено было равно между ими; спрашивается сколько было имѣніе, сколько дѣшей было, и сколько каждой изъ нихъ взялъ.

Сей вопросъ совсѣмъ особливаго рода, и для того онъ достоинъ примѣчанія. Дабы его удобнѣе разрѣшить можно было,

ло, то положи все наслѣдство $=z$. палерамъ: и понеже всѣ дѣти берутъ по ровну, то положи одного часть $=x$, откуда видно, что число дѣтей было $\frac{z}{x}$, и по сему учредимъ мы рѣшеніе слѣдующимъ образомъ:

дѣл. деньги дѣти	каждаго часть	разности
z	первой $x = 100 + z - 100$	
$z - x$	второй $x = 200 + z - x - 200$	
$z - 2x$	третей $x = 300 + z - 2x - 300$	
$z - 3x$	четвер. $x = 400 + z - 3x - 400$	
$z - 4x$	пятой $x = 500 + z - 4x - 500$	$= 200 - x - 100$
$z - 5x$	шестой. $x = 600 + z - 5x - 600$	10
$z - 6x$	седьмой $x = 700 + z - 6x - 700$	
$z - 7x$	осьмой $x = 800 + z - 7x - 800$	

и такъ далѣе

Въ послѣднемъ столбцѣ поставлены разности, которыя происходятъ, когда каждая часть вычтешь изъ наслѣдственной части слѣдующаго; но понеже всѣ сии части равны между собою, то каждая изъ сихъ разностей должна быть $= 0$,

и когда по щастію нашлось, что всѣ упомянутыя разности равны между собою, то довольно одну изъ нихъ положить $=0$, откуда получимъ мы сіе уравненіе: $100 - \frac{x-100}{10} = 0$, умножь на 10, и будетъ 1000

$-x-100=0$, или $900-x=0$, слѣд. $x=900$.

Отсюда знаемъ уже мы, что каждого наслѣдственная часть $=900$ талер.; возми теперь одно которое нибудь уравненіе въ 3-емъ столбцѣ, то первое будетъ $900=100 + \frac{z-100}{10}$, изъ котораго z найти надобно; чего ради помножь его на 10 и будетъ $9000=1000+z-100$, или $9000=900+z$, слѣд. $z=8100$ и $\frac{z}{x}=9$.

Отвѣтъ. Число дѣшей было 9, оставленное имѣніе 8100 талеровъ, изъ кося каждой взялъ 900 талеровъ.

Г Л А В А IV.

О разрѣшеніи двухъ или больше уравненій первой степени.

605.

Часто случается, что 2 или больше нецвѣстныхъ чисель, означенныхъ буква-

ми x , y , z и проч. въ выкладку входящъ, и тогда по числу неизвѣстныхъ количествъ, въ задачѣ предложенныхъ, столько же требуется и уравненій, по которымъ каждое неизвѣстное число опредѣлить должно. Здѣсь станемъ разсматривать мы только такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстное число не больше, какъ первой степени находится; при томъ гдѣ также ни одно ни другое не помножено, такъ что каждое уравненіе имѣть будетъ видъ $ax+by+cx=d$.

606.

И такъ начнемъ мы отъ двухъ уравненій, изъ коихъ два неизвѣстныхъ числа x и y опредѣлять станемъ; и дабы сіе вообще показать, то пусть будутъ данныя уравненія I) $ax+by=c$ II) $fx+gy=h$, гдѣ буквы a , b , c , и f , g , h положены вмѣсто извѣстныхъ количествъ, и спрашивается, какимъ образомъ изъ сихъ двухъ данныхъ уравненій опредѣлить неизвѣстныхъ числа x и y .

607.

Самой легкой къ тому способъ, изъ каждаго уравненія опредѣлить величину

В 2

одного

одного неизвѣстнаго числа, какъ напр. x , по тѣмъ уравнивъ объ сии величины между собою, получишь одно уравненіе, въ которомъ одно только неизвѣстное число y находится, которое по выше показаннымъ правиламъ опредѣлить можно, а найдъ y положи только вмѣсто его самого найденную величину въ которомъ нибудь изъ данныхъ уравненій, и получишь x .

608.

Въ силу сего правила изъ перваго уравненія найдется $x = \frac{c-by}{a}$, а изъ другаго $x = \frac{a-fy}{f}$, уравняй объ сии величины числа x , и получишь $\frac{c-by}{a} = \frac{a-fy}{f}$, умножь на a и будетъ $c-by = \frac{ha-agy}{f}$; умножь на f получится $cf-fby = ha-agy$, придай agy произойдетъ $fc+agy-fby = ah$, вычти fc будетъ $agy-fby = ah-fc$ или $(ag-fb)y = ah-fc$, раздѣли на $ag-fb$, выдесть $y = \frac{ah-fc}{ag-fb}$; и ежели сию величину количества положимъ въ одну изъ найденныхъ для x вмѣсто y , то получится x .

Возми первую, и будетъ $-by = \frac{abb+fte}{ag-fb}$

$$c-by = c - \frac{abb+fbf}{ag-fb}$$

ИЛИ

или $\frac{acg-fcb-abh+fbg}{ag-b}$, сіе $c-by = \frac{a:g-abh}{ag-fb}$ раздѣли на a , и будешь $\frac{c-by}{a} = \frac{g-bb}{ag-fb} = x$.

609.

Что бы изъяснить сіе примѣромъ, то пусть будетъ заданъ сей вопросъ: сыскать два числа, которыхъ сумма $= 15$, а разность $= 7$?

Положи большее число $= x$, меньшее $= y$, то будетъ I) $x+y=15$, II) $x-y=7$.

Изъ перваго уравненія найдется $x=15-y$, а изъ другаго $x=7+y$, откуда происходитъ сіе новое уравненіе

$$15-y=7+y,$$

придай y и будешь $15=7+2y$

вычти 7 — — — — — $8=2y$

раздѣли на 2, будешь $y=4$ и $x=11$.

Отвѣтъ. Меньшее число $= 4$, а большее $= 11$.

610.

Сей вопросъ можно разрѣшить вообще, то есть найти два числа, коихъ сумма $= a$, а разность $= b$?

Пусть будетъ большее число $= x$, а меньшее $= y$, то будетъ I) $x+y=a$; II) $x-y=b$.

В 5

Изъ

Изъ перваго уравненія получится $x = -y$, а изъ другаго $x = b + y$, откуда про-
изходитъ сіе уравненіе $a - y = b + y$; при-
дай y и будетъ $a = b + 2y$
вычти b , выдетъ $a - b = 2y$
раздѣли на 2, будетъ $y = \frac{a-b}{2}$
и по сему $x = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2}$

Отвѣтъ. Слѣдовательно большее число
 $x = \frac{a+b}{2}$, а меньшее $y = \frac{a-b}{2}$, или $x = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$;
 $y = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. Отсюда получается слѣдующее
правило: большее число равно половинѣ
суммы сложенной съ половиною разности;
а меньшее равно разности между полови-
ною суммы и половиною разности.

611.

Сей вопросъ можно еще разрѣшить
и такъ: когда оба уравненія суть $x + y = a$ и $x - y = b$, то сложи ихъ вмѣстѣ, и
будетъ $2x = a + b$, слѣд. $x = \frac{a+b}{2}$, по, томъ
вычти изъ перваго уравненія второе, по-
лучится $2y = a - b$ и $y = \frac{a-b}{2}$ какъ и прежде.

612.

612.

Вопросъ. Лошакъ и осель каждой не-
сешь на хребтѣ своемъ по нѣскольку мѣш-
ковъ, осель на свою тяжесть жалуясь го-
ворить къ лошаку, естли бы ты изъ
своихъ мѣшковъ далъ мнѣ еще одинъ,
тобъ у меня было въ двое больше твоего;
на что лошакъ отвѣтствуетъ ему гово-
ря, естли бы ты изъ твоихъ мѣшковъ
далъ мнѣ еще одинъ, тобъ было у меня
въ трое больше твоего; спрашивается
сколько мѣшковъ имѣлъ на себѣ каждой
изъ нихъ?

Положимъ, что на лошакѣ было x
мѣшковъ, а на ослѣ y ; и когда лошакъ
ослу дастъ одинъ мѣшокъ, то у осла бу-
детъ $y+1$ мѣшокъ, а у лошака останет-
ся $x-1$, и поелику въ семъ случаѣ на ослѣ
будетъ, въ двое больше мѣшковъ нежели
на лошакѣ, то выдетъ $y+1=2x-2$.

Когда же осель дастъ лошаку одинъ
изъ своихъ мѣшковъ, то у лошака будетъ
 $x+1$, а у осла $y-1$ мѣшковъ, и поелику
лошакъ тогда имѣетъ въ трое больше,
нежели осель, то выдетъ $x+1=3y-3$.

В 4

Слѣдо-

Слѣдовательно два уравненія наши будутъ I) $y+1=2x-2$; II) $x+1=3y-3$, изъ перваго найдемся $x=\frac{y+3}{2}$, изъ втораго $x=3y-4$, откуда производить сѣ новое уравненіе.

$\frac{y+3}{2}=3y-4$, которое умноживъ на 2 будетъ $y+3=6y-8$.

вычти y получишся $5y-8=3$

придай 8 выдѣтъ $5y=11$

слѣд. $y=\frac{11}{5}$ или $2\frac{1}{5}$, откуда $x=2\frac{1}{5}$.

Отвѣтъ. Лошакъ имѣетъ $2\frac{1}{5}$, а оселъ $2\frac{1}{5}$ мѣшка.

613.

Ежели въ вопросѣ случатся 3 неизвѣстныя количества и столькожъ уравненій, какъ напр. I) $x+y+z=8$, II) $x+z-y=9$; III) $y+z-x=10$, то подобнымъ образомъ изъ каждаго уравненія найдемся величина x какъ слѣд. I) $x=8-y+z$; II) $x=9+y-z$; III) $x=y+z-10$. Уравни сперва первое знаменованіе x со вторымъ, а по томъ съ третьимъ, отъ чего произойдутъ сѣи два уравненія I) $8+z-y=9+y-z$; II) $8+z-y=y+z-10$, изъ перваго будетъ $2z-2y=1$, а изъ другаго $2y=18$

по

по чему $y=9$; которую величину поставя въ предыдущей вмѣсто y даетъ $2x-18=1$, $2x=19$ и слѣд. $x=9\frac{1}{2}$; отсюда найдется также $x=8\frac{1}{2}$.

Здѣсь случилось, что въ послѣднемъ уравненіи буква x пропала, и для того можно было легко опредѣлить изъ него букву y . Но ежели бы x въ немъ еще остался, то было бы два уравненія между x и y , которыя бы по прежнимъ правиламъ рѣшить должно было.

614.

Пусть найдено будетъ 3 слѣдующія уравненія: I) $3x+5y-4z=25$; II) $5x-2y+3z=46$; III) $3y+5z-x=62$; ищи изъ cadaго величину x , и будетъ I) $x=\frac{25-5y+4z}{3}$, II) $x=\frac{46+2y-3z}{5}$; III) $x=3y+5z-62$; сравняй теперь сіи три величины между собою, то I и III дастъ $\frac{25-5y+4z}{3}=3y+5z-62$, или помножа на 3 $25-5y+4z=9y+15z-186$

придай 186, и будетъ $211-5y+4z=9y+15z$
придай $5y$ — — — — $211+4z=14y+15z$,
слѣд. изъ I и III будетъ $211=14y+11z$.

II и III дастъ $\frac{46+12-12}{5} = 5y + 5z - 62$ или
 $46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$, а изъ сего
 найдется $356 = 13y + 28z$.

Изъ каждого сихъ двухъ уравненій ищи
 величину y . I) $211 = 14y + 11z$, вычти $11z$,
 останется

$$14y = 211 - 11z \text{ и } y = \frac{211-11z}{14}$$

II) $356 = 13y + 28z$; вычти $28z$, останется

$$13y = 356 - 28z, \text{ и } y = \frac{356-28z}{13};$$

сїи два знаменованія буквы y уравнивъ
 между собою дадутъ $\frac{211-11z}{14} = \frac{356-28z}{13}$:

умножь на 13. 14 будетъ $2743 - 143z = 4984$
 $- 392z$

придай $392z$, будетъ $2743 + 249z = 4984$
 вычти $2743 - - 249z = 2241$, и $z = 9$,
 отсюда найдутся $y = 8$ и $x = 7$.

615.

Ежели бы въ задачѣ было больше 3хъ
 неизвѣстныхъ чиселъ, и столько же ура-
 вненій, то рѣшеніе можно бы учинить по-
 добнымъ прежнему образомъ; но сіе бы
 ввело насъ въ скучнѣйшія выкладки.

Однако во всѣхъ сихъ случаяхъ ока-
 зываются средства, помощію которыхъ
 сіе рѣшеніе облегчается: сіе дѣлается вво-
 дя

дя въ выкладку сверхъ главныхъ неизвѣстныхъ чиселъ еще нѣкоторыя произвольныя, какъ напр. сумму ихъ всѣхъ, что легко усмотрѣть можетъ тотъ, которой въ такихъ выкладкахъ уже довольно утражнялся; на сей конецъ предложимъ мы нѣсколько примѣровъ.

616.

Вопросъ. Трое играютъ вмѣстѣ: въ первую игру проигралъ первой изъ нихъ обоимъ другимъ столько, сколько каждой изъ нихъ имѣлъ; въ другую игру проигралъ второй первому и третьему сколько каждой изъ нихъ имѣетъ; въ третью игру проигралъ третьей первому и второму столько, сколько каждой изъ нихъ имѣлъ, и по окончаніи игры нашлось, что всѣ они по ровному числу имѣютъ, а именно 24 флорена; спрашивается, сколько каждой изъ нихъ имѣлъ съ начала?

Положи, что первой имѣлъ x флореновъ, 2рой y флор. 3тей z флор. сверхъ сего положи сумму всѣхъ $x + y + z = s$. И когда въ первую игру первой столько проигрываетъ, сколько пропчіе два имѣютъ,

ютъ, первой же имѣетъ x , то оба другіе $s-x$, и такое число теряетъ первой, слѣдовательно останется у него еще $2x-s$, второй имѣетъ будетъ $2y$, а третей $2z$. Чего ради по окончаніи первой игры каждаго сумма будетъ I) $2x-s$; II) $2y$; III) $2z$.

Во вторую игру проигрываетъ другой, которой теперь имѣетъ $2y$, обѣимъ другимъ столько сколько, они имѣютъ; но они имѣютъ $s-2y$, слѣд. у другаго еще останется $4y-s$; другіе же оба будутъ теперь имѣть въ двое больше прежняго, слѣд. по окончаніи другой игры суммы ихъ I) $4x-2s$; II) $4y-s$; III) $4z$; въ третью игру третей, которой имѣетъ $4z$, проигрываетъ обоимъ другимъ столько, сколько они имѣютъ, то есть $s-4z$, слѣд. у третьяго останется $8z-s$, прочіе же два получаютъ теперь въ двое больше, нежели они имѣли, слѣд. по окончаніи третьей игры суммы ихъ будутъ I) $8x-4s$; II) $8y-2s$; III) $8z-s$. Поелику теперь каждой изъ нихъ имѣетъ 24 флорена, то будутъ у насъ при уравненія такого состоянія, что изъ перваго тотчасъ найти можно x , изъ другаго y , а изъ третьяго

пьяго x , особливо когда s также намъ извѣстно; ибо при концѣ игры всѣ вмѣстѣ имѣютъ 72 флорена, что само по себѣ найдется, а выкладка будетъ слѣдующая:

$$\text{I)} \quad 8x - 4s = 24, \text{ или } 8x = 24 + 4s \text{ и } x = 3 + \frac{1}{2}s$$

$$\text{II)} \quad 8y - 2s = 24, \text{ или } 8y = 24 + 2s \text{ и } y = 3 + \frac{1}{4}s$$

$$\text{III)} \quad 8z - s = 24, \text{ или } 8z = 24 + s \text{ и } z = 3 + \frac{1}{8}s;$$

сложи всѣ сіи величины вмѣстѣ, то получится $x + y + z = 9 + \frac{1}{4}s$,

и понеже $x + y + z = s$, то будетъ $s = 9 + \frac{1}{4}s$, вычти $\frac{1}{4}s$, останется $\frac{3}{4}s = 9$ и $s = 72$.

Отвѣтъ. Съ начала игры первой имѣлъ 39 флор. второй 21 флор. третьей 12 флор.

Изъ сего рѣшенія видно, что помощію суммы трехъ неизвѣстныхъ чиселъ, всѣ выше упомянутыя трудности изъ выкладки вышли.

617.

Сколь ни труденъ сей вопросъ быть кажется, однакожь можно его рѣшить и безъ алгебры. Начни только его съ конца; ибо когда три игрока по окончаніи третьей игры равное число денегъ имѣютъ,

то

то есть 24 флорена каждой, при томъ въ третью игру первой и второй деньги свои удвоили, то предъ третьей игрою имѣли они суммы слѣдующіе I) 12; II) 12; III) 48.

Во вторую игру первой и третьей суммы свои удвоили, слѣдственно предъ второю игрою имѣли они

I) 6, II) 42, III) 24.

Въ первую игру удвоили свои деньги второй и третьей, слѣд. предъ первою игрою имѣли они

I) 39; II) 21; III) 12,

столько же какъ и прежде мы нашли.

618.

Вопросъ. Два человека должны 29 талеровъ, у каждого изъ нихъ есть деньги, однако не столько, чтобъ одинъ которой нибудь могъ заплатить сей долгъ; чего ради первой другому говорить, естьли ты мнѣ дашь $\frac{1}{2}$ твоихъ денегъ, то я въ состояніи буду заплатить одинъ весь долгъ. Другой ему говорить, ежели ты мнѣ дашь $\frac{1}{4}$ твоихъ денегъ, то я заплачу одинъ весь долгъ; спрашивается, сколько у каждого изъ нихъ было денегъ?

По-

Положи, что первой имѣлъ x шалер. другой y .

то въ первыхъ будетъ $x + \frac{2}{3}y = 29$

и во вторыхъ — — — $y + \frac{1}{3}x = 29$;

изъ перваго найдется $x = 29 - \frac{2}{3}y$, а изъ втораго $x = \frac{116 - 2y}{3}$.

Изъ обѣихъ сихъ изображеній x , выходитъ уравненіе $29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 2y}{3}$ откуда $y = 14\frac{1}{2}$ и $x = 19\frac{1}{2}$.

Отвѣтъ. Первой имѣлъ $19\frac{1}{2}$, другой $14\frac{1}{2}$ шалер.

619.

Вопросъ. Трое купили домъ за 100 шалеровъ: первый проситъ у другаго $\frac{1}{2}$ его денегъ, и тогда бы онъ могъ одинъ заплатить за весь домъ; другой проситъ у третьяго $\frac{1}{3}$ его денегъ, чтобы ему одному можно было заплатить за весь домъ; третьей проситъ у перваго $\frac{1}{4}$ его денегъ, и тогда онъ въ состояніи будетъ заплатить за весь домъ; спрашивается, сколько денегъ у каждаго изъ нихъ было?

Положи что первой имѣлъ x , другой y , а третьей z , то получатся слѣдующія уравненія:

I) $x + \frac{1}{2}y = 100$; II) $y + \frac{1}{2}z = 100$; III) $z + \frac{1}{2}x = 100$
и величина x найдется I) $x = 100 - \frac{1}{2}y$; II)
 $x = 400 - 4z$,

изъ втораго уравненія x опредѣлить не
льзя, двѣ же найденныя его величины да-
ютъ уравненіе

$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$, или $4z - \frac{1}{2}y = 300$, кото-
рое соединить надлежитъ со вторымъ ура-
вненіемъ, чтобы найти опшуда y и z ; а
второе уравненіе было $y + \frac{1}{2}z = 100$, изъ
кото $y = 100 - \frac{1}{2}z$, а изъ уравненія $4z - \frac{1}{2}y$
 $= 300$ получится $y = 8z - 600$, откуда вы-
ходитъ сіе послѣднее уравненіе:

$100 - \frac{1}{2}z = 8z - 600$; слѣд. $8\frac{1}{2}z = 700$, или z
 $z = 700$ и $z = 84$; отсюда получится y
 $= 100 - 28 = 72$; $x = 64$.

Отвѣтъ. Первой имѣль 64 талер. дру-
гой 72 и третей 84 талера.

620.

Понеже въ семъ примѣрѣ въ каждомъ
уравненіи больше двухъ неизвѣстныхъ чи-
сель не находится, то рѣшеніе его спо-
собнѣ можетъ учиниться такъ:

Ищи изъ перваго уравненія $y = 200$
 $- 2x$, которой чрезъ x опредѣлился, и сію
най-

найденную величину поставь во второмъ уравненіи вмѣсто y ; и будетъ $200 - 2x + \frac{1}{2}z = 100$, вычти 100, останется $100 - 2x + \frac{1}{2}z = 0$, или $\frac{1}{2}z = 2x - 100$; и $z = 6x - 500$, слѣд. и z опредѣленъ также чрезъ x ; сію величину поставь въ третьемъ уравненіи вмѣсто z , и будетъ $6x - 500 + \frac{1}{2}x = 100$, гдѣ одни только x содержатся, умножь на 4

и будетъ $25x - 1600 = 0$; слѣд. $x = 64$

$$y = 200 - 128 = 72$$

$$z = 384 - 500 = -116.$$

621.

Равнымъ образомъ поступать надлежитъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда такихъ уравненій много будетъ.

Такъ вообще

I) $u + \frac{x}{a} = n$, II) $x + \frac{y}{b} = n$; III) $y + \frac{z}{c} = n$; IV) $z + \frac{u}{d} = n$ или исключивъ дроби

I) $au + x = an$; II) $bx + y = bn$; III) $cy + z = cn$; IV) $dz + u = dn$. Въ семъ случаѣ изъ первой будетъ $x = an - au$, что поставя вмѣсто x во второмъ уравненіи получимъ $abn - abu + y = bn$; слѣд. $y = bn - abn + abu$; сіе поставивъ вмѣсто y въ третьемъ уравненіи

Томъ II.

Г

вненіи

вненіи будетъ $cbn - abcn + abcu + z = cn$;
 слѣд. $z = cn - bcn + abcn - abcu$, наконецъ по-
 ложивъ въ четвертомъ уравненіи сію для
 z означенную величину , произойдетъ
 $cdn - bcdn + abcdn - abcdn + u = dn$, слѣд. будетъ
 $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdn + u$, или
 $(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$

$$\begin{aligned} u &= \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} \\ &= \frac{n(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1} \end{aligned}$$

Отсюда найдутся уже прочія величины
 такъ :

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = \frac{n(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

622.

Вопросъ. Одинъ капитанъ имѣетъ 3
 роты салдатъ: первая состоитъ изъ Швей-
 царовъ , другая изъ Швабовъ , а третья
 изъ Саксонцовъ ; съ сими намѣренъ онъ
 осадить

осадить городъ, и въ награжденіе за то
обѣщаютъ имъ дать 901 талеръ, которые
онъ между ими такъ раздѣлитъ намѣренъ:

Каждой салдатъ изъ той роты, ко-
торая осаду начнетъ, получитъ 1 талеръ,
а остальные деньги раздѣлитъ между про-
чими поровну. Но въ семь случаѣ на-
шлось, что естли бы Швейцарцы осаду
начали, тобъ каждой изъ обѣихъ другихъ
ротъ получилъ $\frac{1}{2}$ талера. Когда же бы оса-
ду начали Швабы, тобъ каждой изъ про-
чихъ получилъ $\frac{1}{3}$ талера; и наконецъ еже-
ли бы Саксонцы оной штурмъ начали,
тобъ каждой салдатъ изъ прочихъ двухъ
ротъ получалъ $\frac{1}{4}$ талера; спрашивается,
сколько было салдатъ въ каждой ротѣ?

Положи что число Швейцаровъ было
 x , Швабовъ y , а Саксонцовъ z
По томъ положи сумму всѣхъ $x + y + z$
 $= f$, ибо напередъ видѣть можно, что
сею суммою выкладка облегчится. Когда
осаду начнутъ дѣлать Швейцары, коихъ
число x , то число обѣихъ остальныхъ
 $= f - x$, и когда каждой изъ первыхъ воз-
метъ 1 талеръ, сн напротивъ того $\frac{1}{2}$
Г 2 талер.,

палер., то будетъ $x + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}x = 901$, или $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}f = 901$.

Равнымъ образомъ, когда осаду начнутъ Швабы, то будетъ $y + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}y = 901$, или $\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}f = 901$, когда же осаждаютъ станутъ Саксонцы, то будетъ $z + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}z = 901$; или $\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}f = 901$, изъ сихъ трехъ уравненій каждую букву x , y , z , опредѣлить можно,

ибо изъ перваго получится $x = 1802 - s$

изъ втораго — — — — $2y = 2703 - s$

изъ третьяго — — — — $3z = 3604 - s$,

напиши ихъ теперь другъ подъ другомъ, сыскавъ напередъ величины $6x$, $6y$, $6z$,

$$\text{такъ } 6x = 10812 - 6s$$

$$6y = 8109 - 3s$$

$$6z = 7208 - 2s$$

сложи вмѣстѣ будетъ $6s = 26129 - 11s$; или $17s = 26129$, откуда $s = 1537$, что показываетъ сумму всѣхъ людей въ 3хъ ротахъ находящихся.

Отсюда найдутся

$$x = 1802 - 1537 = 265$$

$$2y = 2703 - 1537 = 1166 \text{ и } y = 583$$

$$3z = 3604 - 1537 = 2067 \text{ и } z = 689.$$

Отвѣтъ.

Отвѣтъ. Въ ротѣ Швейцаровъ было 265 человекъ, въ ротѣ Швабовъ 583, а въ ротѣ Саксонцовъ было 689 человекъ.

ГЛАВА V.

О рѣшеніи гнстныхъ квадратныхъ уравненій.

623.

Квадратное уравненіе называется, въ которомъ квадратъ или вторая степень неизвѣстнаго количества находится, и сверхъ того никакой вышшей степени нѣтъ; ибо если бы въ томъ же уравненіи находилась и третья степень неизвѣстнаго числа, то бы оно уже надлежало къ кубическому уравненію, котораго рѣшеніе особливыхъ правилъ требуетъ.

624.

Въ квадратномъ уравненіи три вещи примѣчать надлежитъ: во первыхъ такіе члены, въ которыхъ неизвѣстнаго числа нѣтъ, или которые изъ извѣстныхъ только количествъ состоятъ.

Во вторыхъ тѣ члены, въ которыхъ неизвѣстное число первой степени находится,

и въ третѣхъ тѣ члены, въ которыхъ содержится квадратъ неизвѣстнаго количества.

Такъ когда x означаетъ неизвѣстное число, а буквы a , b , c , d представляютъ извѣстныя, то члены перваго рода имѣютъ форму a , втораго рода bx , и третьяго рода члены имѣютъ формулу xx .

625.

Выше сего показано было, что два или больше члена одного рода могутъ соединены быть въ одинъ, или почестъся за одинъ членъ; такъ формула $axx - bxx + cxx$ можетъ почтена быть за одинъ членъ, и представляется $(a - b + c)xx$, потому что $a - b + c$ въ самомъ дѣлѣ извѣстное число означаетъ.

Когда такіе члены находятся будутъ по обѣимъ сторонамъ знака $=$, то видѣли мы какъ они на одну сторону переносятся и въ одинъ членъ соединяются.

Такъ когда случится уравненіе $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$, то вычти сперва $2xx$, и получится $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$,

при-

придай $8x$, и будетъ $5x + 4 = 3xx + 11$,
вычти 11, останется $3xx = 5x - 7$.

626.

Можно также всѣ члены перенести на одну сторону знака $=$, такъ что на другой сторонѣ останется 0; при чемъ примѣчать надлежитъ, что когда члены съ одной стороны знака $=$, на другую переносятся, то знаки ихъ перемѣнять надлежитъ.

Такъ прежнее уравненіе получить такой видъ $3xx - 5x + 7 = 0$; вообще каждое квадратное уравненіе въ сей формулѣ заключаться будетъ какъ: $axx \pm bx \pm c = 0$, гдѣ знакъ $\pm$ плюсь и минусъ изъявляющіеся, дабы чрезъ то показать, что сии члены могутъ быть иногда положительныя, а иногда отрицательныя.

627.

Какой бы видъ съ начала не имѣло квадратное уравненіе, то всегда можно его привести въ формулу, которая имѣетъ только 3 члена; такъ когда бы кто съ начала дошелъ до сего уравненія, какъ

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$, то прежде всего надле-
житъ изъ него исключить дробь, и для то-
го умножь на $cx+d$ и получится $ax+b$
 $\frac{cexx+cfx+edx+fd}{gx+h}$, по сему умножь еще

на $gx+h$ и будетъ

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+edx+fd.$$

Сие есть квадратное уравненіе и можетъ
быть приведено въ слѣдующіе три члена,
если они всѣ перенесутся на одну сто-
рону и напишутся другъ подъ другомъ
такъ:

$$\begin{aligned} 0 &= agxx + bgx + bh \\ &\quad - cexx + ahx - fd \\ &\quad \quad - cfx \\ &\quad \quad - edx \end{aligned}$$

или что бы еще яснѣе представить, то
напиши $0 - (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - cd)x + bh - fd$.

628.

Такое квадратное уравненіе, въ кото-
ромъ всѣхъ трехъ родовъ члены находят-
ся, называется полное квадратное ура-
вненіе, и рѣшеніе его большимъ трудно-
стямъ подвержено; для сей причины ста-

станемъ мы сперва разсматривать такія уравненія, въ коихъ одного изъ сихъ трехъ членовъ недостаетъ. Правда, ежели въ уравненіи не будетъ члена xx , то его не можно причислить къ квадратному уравненію, но къ уравненіямъ перваго рода, или ежели бы не было въ немъ члена изъ извѣстныхъ количествъ состоящаго, то оно было бы $ax + b = 0$, которое раздѣливъ на x выдетъ $a + \frac{b}{x} = 0$, которое опять принадлежитъ къ роду простыхъ уравненій.

629.

Но когда въ уравненіи недостаетъ средняго члена, содержащаго первую степень x , то оно имѣетъ видъ $axx + c = 0$, или $axx = c$, какой бы знакъ при c ни былъ $+$ или $-$, такое уравненіе называется чистое квадратное уравненіе, для того что рѣшеніе его никакой трудности не имѣетъ; ибо раздѣли его только на a , то получится $xx = \frac{c}{a}$, и взявъ съ обыкновенъ сторонъ квадратные корни будетъ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$, чрезъ что уравненіе разрѣшится.

630.

Здѣсь надлежитъ разсмотрѣть три случая :

1. Когда $\frac{c}{a}$ будетъ квадратное число , ко-
его корень дѣйствительно изъяснить
можно , и величина x опредѣлится пог-
да раціональнымъ числомъ , какое бы
оно ни было , цѣлое или ломаное. Такъ
изъ уравненія $xx=144$ получится x
 $=12$, а изъ $xx=\frac{9}{16}$ будетъ $x=\frac{3}{4}$.
2. Если $\frac{c}{a}$ будетъ не квадратное число,
то тогда довольствоваться должно
кореннымъ закономъ $\sqrt{}$.

Такъ когда $xx=12$, то будетъ $x=\sqrt{12}$,
кого величину можно опредѣлить при-
ближеніемъ , какъ уже выше сего пока-
зано было.

3. Если $\frac{c}{a}$ будетъ отрицательное число,
то величина x будетъ совсѣмъ невоз-
можная или мнимая , и показывастъ ,
что вопросъ , приведшей насъ къ сему
уравненію , самъ по себѣ не возможенъ.

631.

Прежде нежели мы далѣе пойдемъ
надлежитъ примѣнить , что какъ скоро
изъ

изъ какого нибудь числа квадратной корень извлекать должно будетъ, то всегда имѣеть оной двоякое знаменованіе, то есть, какъ положительное, такъ и отрицательное, какъ уже прежде упомянуто было.

Такъ ежели дойдемъ до уравненія $xx = 49$, то величина x будетъ не только $+7$, но также и -7 ; и для того она всегда означается $x = +7$, откуда явствуется, что всѣ сии вопросы имѣють двоякое рѣшеніе; но во многихъ случаяхъ, гдѣ напр. спрашивается о нѣкомъ числѣ людей, отрицательная величина мѣсша уже не имѣеть.

632.

Равнымъ образомъ и въ прежнемъ случаѣ, гдѣ только недостаетъ однихъ извѣстныхъ чиселъ, какъ $axx = bx$, x всегда двоякое имѣеть знаменованіе, не смотря на то что одно только остается, ежели уравненіе на x раздѣлится. Ибо ежели будетъ уравненіе $xx = 3x$, гдѣ такое x сыскать надлежитъ, чтобъ xx равенъ былъ $3x$; то учинится сіе положивъ

x

$x=3$, которая величина выходитъ ежели данное уравненіе раздѣлится на x . Но сверхъ сего вопросъ рѣшится также, когда положишь $x=0$, ибо тогда будетъ $xx=0$ и $3x=0$. Вообще при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ примѣчать надлежитъ, что они всегда имѣютъ два рѣшенія; напротивъ того простыя не больше одного.

Изъяснимъ теперь сіи чистыя квадратныя уравненія нѣсколькими примѣрами.

633.

Вопросъ. Сыскашь такое число, котораго половина умноженная на $\frac{1}{2}$ сего самаго, въ произведеніи дастъ 24?

Пусть будетъ сіе число $=x$, то произведеніе $\frac{1}{2}x$ на $\frac{1}{2}x$ должно дать 24; слѣдовательно будетъ $\frac{1}{4}xx=24$.

Умножь на 6, выдешъ $xx=144$, и извлеки квадратной корень получится $x=\pm 12$; ибо ежели $x=\pm 12$, то $\frac{1}{2}x=6$ и $\frac{1}{2}x=4$, конхъ произведеніе $=24$. Равнымъ образомъ когда $x=-12$, то $\frac{1}{2}x=-6$ и $\frac{1}{2}x=-4$, сихъ чисель произведеніе будетъ также ± 24 .

634.

634.

Вопросъ. Ищется число, къ которому есѣли приложится 5 и то же число изъ него вычтется, то сумма первая умноженная на сію разность произведетъ 96.

Пусть будетъ оное число $= x$, то $x + 5$ умноженное на $x - 5$ въ произведеніи должно дать 96, по чему уравненіе будетъ $x^2 - 25 = 96$.

Придай 25, то будетъ $x^2 = 121$, извлеки квадратн. корень, выдесть $x = 11$, ибо $x + 5 = 16$, и $x - 5 = 6$ и $6 \cdot 16 = 96$.

635.

Вопросъ. Сыскать число, которое когда придастся къ 10, и по томъ изъ 10 вычтется, сумма бы умноженная на разность произвела число 51?

Искомое число положи $= x$, то $10 + x$ на $10 - x$ умноженное должно въ произведеніи дать 51; по чему уравненіе будетъ $100 - xx = 51$, придай xx и вычти 51, то выдесть $xx = 49$, и извлеки квадратной корень найдется $x = 7$.

636.

636.

Вопросъ. Трое имѣютъ у себя деньги, сколько разъ первой имѣеть 7 талеровъ, столько разъ имѣеть другой 3 талера, и сколько разъ другой имѣеть 17 талеровъ, столько разъ третей 5 талеровъ; а когда я сумму денегъ перваго, на сумму втораго, сумму денегъ втораго на сумму третьяго, и наконецъ сумму денегъ и третьяго на сумму перваго помножу, и по томъ всѣ сн три произведенія сложу въ одну сумму, въ суммѣ выйдетъ 3830; спрашивается, сколько у каждаго изъ нихъ денегъ было?

Положи, что у перваго было x талеровъ, и когда сказано, что сколько разъ первой имѣеть 7 талеровъ, столько разъ другой 3 талера, то сіе значитъ тоже, что деньги перваго къ деньгамъ втораго содержатся какъ 7:3, и такъ положи $7:3 = x$ къ деньгамъ другаго $\frac{3x}{7}$, по томъ деньги втораго къ деньгамъ третьяго какъ 17:5, то будетъ $17:5 = \frac{3x}{7}$ къ деньгамъ третьяго $\frac{15x}{119}$.

Те-

Теперь умножь деньги перваго x , на сумму денегъ втораго $\frac{3x}{7}$, въ произведеніи будетъ $\frac{3xx}{7}$. По томъ деньги втораго $\frac{3x}{7}$ умножь на деньги третьяго $\frac{15x}{119}$ въ произведеніи $\frac{45xx}{812}$, наконецъ деньги третьяго $\frac{15}{119} x$ умножь на деньги перваго x , выдесть $\frac{15}{119} xx$. Сии три произведенія $\frac{3}{7}xx + \frac{45}{812}xx + \frac{15}{119}xx$ приведенные къ одному знаменателю, дадутъ $\frac{307}{1521}xx$, что должно быть равно числу 3830 $\frac{1}{2}$.

Чего ради положивъ $\frac{307}{1521}xx = 3830\frac{1}{2}$, умножь на 3 и выдесть $\frac{921}{1521}xx = 11492$, умножь еще на 833 $1521xx = 9572836$, раздѣли на 1521, выдесть $xx = \frac{9572836}{1521}$, извлеки квадратной корень и будетъ $x = \frac{3094}{39}$, гдѣ раздѣливъ числителя и знаменателя на 13, выдесть $x = \frac{238}{3}$ или $x = 79\frac{1}{3}$, и слѣд. $\frac{3}{7}x = 34$, а $\frac{15}{119}x = 10$.

Отвѣтъ. Первой имѣеть 79 $\frac{1}{3}$ талера, второй 34, третьей 10 талеровъ.

Примѣчаніе. Сію выкладку можно здѣлать еще легче, разрѣшивъ находящіяся въ оной числа на ихъ множителей, и замѣтивъ особенно ихъ квадраты. Такъ $507 = 3 \cdot 169$ гдѣ 169 есть квадратъ 13; по

по томъ $833=7.119$, а $119=7.17$ слѣд.
 $833=49.17$. Но найдено $\frac{3}{5} \cdot \frac{169}{17} x x = 3850\frac{1}{2}$,
 по умножь на 3 и выдешь $\frac{9}{5} \cdot \frac{169}{17} x x = 11492\frac{1}{2}$;
 сіе число разѣши на множителей, изъ
 коихъ первой 4 потчасъ найдется, такъ
 что $11492=4.2873$, число 2873 можно
 раздѣлить еще на 17 ибудеть $2873=17.169$;
 по чему уравненіе наше получить
 видъ $\frac{9}{17} \cdot \frac{169}{17} x x = 4.17.169$, которое раздѣ-
 ливъ на 169 выдешь $\frac{9}{17 \cdot 17} x x = 4.17$, и по
 томъ умноживъ на 17.49 и раздѣливъ на
 9 выдешь $x x = \frac{4 \cdot 229 \cdot 49}{9}$, гдѣ всѣ множители
 суть квадратныя числа, и корень ихъ бу-
 деть $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$, то же что и прежде.

637.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ вмѣстѣ
 наняли фактора и послали его въ Ан-
 дорфъ торговать, къ чему каждой поло-
 жилъ въ 10 разъ больше талеровъ, неже-
 ли сколько ихъ въ компаніи было; такимъ
 образомъ отпращенной факторъ получилъ
 барыша на 100 талеровъ въ двое больше
 числа людей компанію составляющихъ;
 ежели же $\frac{1}{3}$ всего вытрыша умножишь
 на 2, то въ произведеніи выдешь число
 куп-

купцовъ; спрашивается, сколько ихъ всѣхъ было?

Положи число купцовъ было $= x$, и когда каждой положилъ въ компанію 10 x , то весь капиталъ былъ 10 xx талеровъ. Факторъ выигрываетъ на 100 талеровъ 2 x талера, следовательно на весь капиталъ 10 xx выигралъ онъ $\frac{1}{5}x^2$, и сѣмая часть сего выигрыша, то есть $\frac{1}{15}x^2$ умноженная на 2 $\frac{2}{3}$, то есть на $\frac{20}{9}$, въ произведеніи дастъ $\frac{20}{45}x^2$ или $\frac{4}{9}x^2$ число равное числу купцовъ x .

И такъ уравненіе будетъ $\frac{4}{9}x^2 = x$ или $x^2 = 225x$, что кажется быть кубическое уравненіе; но поелику его раздѣлить можно на x : то выдѣсть изъ него сіе квадратное $xx = 225$ и $x = 15$.

Отвѣтъ. Число всѣхъ купцовъ было 15 и каждой положилъ 150 талеровъ.

Г Л А В А VI.

О рѣшеніи смѣшанныхъ квадратныхъ уравненій.

638.

Смѣшанное квадратное уравненіе называется, въ которомъ находятся члены

Толѣ II.

Д

трехъ

трехъ родовъ: первое такіе, которые содержатъ въ себѣ квадратъ неизвѣстнаго количества, какъ axx : второе, такіе, въ которыхъ неизвѣстное первой степени находится, какъ bx : и наослѣдокъ такіе, кои составлены изъ извѣстныхъ чиселъ. Если два или больше члена одного роду соединятся въ одинъ, и перенесутся на одну сторону знака $=$, то форма такого уравненія будетъ $axx \pm bx \pm c = 0$.

Какимъ образомъ изъ такихъ уравненій величина x находится, въ сей главѣ изъяснено быть должно, и къ чему имѣемъ мы два способа.

639.

Такое уравненіе помощію дѣленія можно разпорядить такъ, что первой его членъ состоятъ будетъ только изъ квадрата неизвѣстнаго количества xx , второй членъ оставъ на той же сторонѣ, гдѣ и xx , а извѣстное число перенеси на другую сторону, отъ чего формула наша переимѣнится въ сію $xx + px = \pm q$, гдѣ p и q означаютъ извѣстныя какъ положитель-

жительныя, такъ и отрицательныя числа. Теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ сыскать величину x ; здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что есть-ли бы $xx + px$ былъ почной квадра-тъ, то и рѣшеніе бы не имѣло ни малой трудности, ибо тогдабъ ничего больше не требовалось, какъ только съ обѣихъ сторонъ взять квадратные корни.

640.

Но видно, что $xx + px$ не почной квадра-тъ; ибо прежде сего видѣли мы, что ежели корень состоитъ изъ двухъ членовъ, какъ $x + n$, то квадра-тъ его будетъ имѣть 3 части, то есть сверхъ квадра-товъ каждой части еще двойное произ-ведение обѣихъ частей, такъ что квад-ра-тъ изъ $x + n$ будетъ $xx + 2nx + nn$; ко-гда же мы на одной сторонѣ имѣемъ $xx + px$, то xx почестся можетъ какъ квадра-тъ первой части корня, а px двой-ное произведе-ніе первой части x на вто-рую, слѣдов. другая часть должна быть $\frac{1}{2}p$, какъ и въ самомъ дѣлѣ квадра-тъ изъ $x + \frac{1}{2}p$ находится $xx + px + \frac{1}{4}p^2$.

Д 2

641.

641.

Поеліку $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ есть дѣйстви-
 тельной квадрапъ, коего корень $x + \frac{1}{2}p$, то
 въ нашемъ уравненіи $xx + px = q$ прибавимъ мы
 только съ обѣихъ сторонъ $\frac{1}{4}pp$, и получится
 $xx + px + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$, гдѣ на одной сторонѣ
 стоитъ дѣйствишельной квадрапъ; а на дру-
 гой только извѣстныя числа: и такъ ежели
 мы съ обѣихъ сторонъ возьмемъ квадратные
 корни, то получится $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$,
 вычли псперь $\frac{1}{2}p$, и будетъ $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$;
 а поеліку каждой квадратной
 корень можетъ быть какъ положительной,
 пакъ и отрицательной, того ради для x
 найдутся двѣ величины содержащіяся въ
 формулѣ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

642.

Въ сей формулѣ содержится прави-
 ло, по которому всѣ квадратныя уравне-
 нія рѣшатся, и что бы не всегда нужно
 было повторять прежне дѣйствіе, то
 довольно одно только содержаніе сей
 формулы имѣть въ памяти; а уравненіе
 можно разпорядить такъ, что на одной
 еіо сторонѣ находится будепъ только
 xx ,

xx , чего ради прежнее уравненіе будетъ имѣть такой видъ $xx = -px + q$, изъ коего величина x означится такъ $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q}$.

643.

Отсюда выводится общее правило для разрѣшенія уравненія $xx = -px + q$.

А именно, здѣсь видно, что не извѣстное число x равно будетъ половинѣ числа, которымъ x помножено на другой сторонѣ и сверхъ того еще $+$ или $-$ квадратной корень изъ квадрата числа теперь объявленнаго, и изъ простаго числа претей членъ уравненія составляющаго.

Такъ когдабъ случилось уравненіе $xx = 6x + 7$, тобъ было $x = 3 \pm \sqrt{(9+7)} = 3 \pm 4$; слѣд. обѣ величины x будутъ
I) $x = 7$; II) $x = -1$.

А когда уравненіе будетъ $xx = 10x - 9$, то $x = 5 \pm \sqrt{(25-9)} = 5 \pm 4$ и два знаменованія x суть $x = 9$ и $x = 1$.

644.

Къ лучшему уразумѣнію сего правила можно различать слѣдующіе случаи:

Д 3

I)

I) когда p будетъ четное число, II) когда p не четное, III) когда p ломанное число.

Пусть будетъ I) p четное число, и уравнение такое: $xx = 2px + q$, то будетъ $x = p \pm \sqrt{(pp + q)}$. II) ежели p не четное число и уравненіе такое: $xx = px + q$, откуда $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$, и когда $\frac{1}{4}pp + q = \frac{p+q}{4}$, и изъ знаменателя 4 можно извлечь корень квадратной, то будетъ:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp + q)}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{(pp + q)}}{2}.$$

645.

Ежели же III) p будетъ дробь, то рѣшеніе учинится такъ: пусть будетъ квадратное уравненіе $axx = bx + c$, или $xx = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$, то по объявленному правилу $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4a} + \frac{ac}{a})}$ или $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb + 4ac)}}{2a}$ или $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4a} + \frac{c}{a})}$; ибо когда $\frac{bb}{4a} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4a}$ и знаменатель квадратное число, то $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb + 4ac)}}{2a}$.

646.

Другой путь, которой насъ ведетъ къ сему же рѣшенію, соспоитъ въ томъ, что бы такое смѣшанное квадратное уравненіе какъ $xx = px + q$ преобразить въ дру-

другое чистое; что сдѣлается введя въ выкладку вмѣсто неизвѣстнаго числа x другое y , такъ чтобъ $x = y + \frac{1}{2}p$; ибо когда найдешь y , то изъ него получится и величина x .

Такъ ежели $y + \frac{1}{2}p$ поставишь вмѣсто x , то будетъ $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ и $px = py + \frac{1}{2}pp$, и по сему уравненіе будетъ $yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q$, вычти здѣсь сперва py , и будетъ $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, вычти еще $\frac{1}{4}pp$, останется $yy = \frac{1}{2}pp + q$, и сіе есть чистое уравненіе, откуда $y = \sqrt{(\frac{1}{2}pp + q)}$.

Но понеже $x = y + \frac{1}{2}p$, то $x = \frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{2}pp + q)}$; что уже и прежде найдено было. И такъ здѣсь болѣе ничего не остается, какъ только сіе правило изъяснить примѣрами.

647.

Вопросъ. Найди два числа, изъ коихъ одно. другое превышаетъ бтью, произведеніе же ихъ равно 91?

Пусть будетъ меньшее число x , то большее

$x + 6$, и произведеніе ихъ $xx + 6x = 91$, вычти $6x$, и выйдетъ $xx = -6x + 91$,

Д 4

и

и по правилу показанному $x = -5 \pm \sqrt{9+91}$
 $= -5 \pm 10$; слѣд. $x=7$, или $x=-13$.

Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣетъ два рѣ-
 шенія: по первому находится меньшее чѣ-
 сло $x=7$, а большее $x+6=13$; по вто-
 рому меньшее число $x=-13$, а большее
 $x+6=-7$.

648.

Вопросъ. Найди число, изъ квадрата
 коего если вычту 9, остатокъ тѣмъ же
 бы превышалъ 100, чѣмъ искомое число
 недостаетъ до 25?

Искомое число пусть будетъ x , то
 $xx-9$ превышаетъ 100 числомъ $xx-109$,
 а искомое число до 25 недостаетъ числомъ
 $25-x$, откуда производимъ уравненіе
 $xx-109=25-x$,

придай 109, будетъ $xx=-x+132$, и по
 правилу данному $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}+132\right)}$
 $= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$; слѣд. $x=11$ или
 $x=-12$.

Отвѣтъ. Если требуется отвѣтъ
 положительной, то искомое число $=11$,
 коего квадратъ уменьшенной 9-тью дастъ
 112, что превышаетъ 100 12-тью, и най-
 денное

денное число 11 столько же недостаетъ до 23.

649.

Вопросъ. Найти число, котораго ежели $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ между собою умножатся, и къ произведенію придастся $\frac{1}{2}$ искомага числа, тобъ вышло 30?

Пусть будетъ сіе число x , то $\frac{1}{2}$ умноженная на $\frac{1}{3}$ его дастъ $\frac{1}{6}xx$, къ чему приложивъ $\frac{1}{2}x$ получится $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x$, что должно быть $= 30$,

умножь на 6, получится $xx + 3x = 180$, или $xx = -3x + 180$, откуда найдется $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 180} = -\frac{3}{2} \pm \frac{27}{2}$

слѣд. $x = 12$, или $x = -15$.

650.

Вопросъ. Найти два числа, въ удвоенной пропорціи, коихъ сумму ежели сложишь съ ихъ произведеніемъ, тобъ вышло 90?

Искомое число положа x , большее будетъ $2x$, произведеніе изъ $2xx$, къ сему приложи сумму $3x$, выдетъ 90.

Слѣдовательно $2xx + 3x = 90$, вычти $3x$, останется $2xx = -3x + 90$, раздѣли на 2, будетъ $xx = -\frac{3}{2}x + 45$,

Д. 5

отку-

откуда $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{16} + 45\right)} = -\frac{1}{4} \pm \frac{17}{4}$.

По сему x будетъ или 6, или $-7\frac{1}{4}$.

651.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадь за не-
извѣстное число талеровъ, а продасть ее
опять за 119 талеровъ, при чемъ полу-
чается на 100 талеровъ столько выигрыша,
чего вся лошадь стоила; спрашивается,
сколько онъ за нее далъ?

Положи что лошадь ему стоила x
талер., и понеже онъ на нее выигралъ x
процентовъ, то положи, что на 100 та-
леровъ выигрываетъ онъ x , сколько на x
барыша получится? Отвѣтъ $\frac{xx}{100}$; и когда
онъ барыша получилъ $\frac{xx}{100}$, а заплатилъ самъ
 x талер., то долженъ онъ взять за нее
 $x + \frac{xx}{100}$, и по тому будетъ $x + \frac{xx}{100} = 119$,
вычти x , и будетъ $\frac{xx}{100} = -x + 119$,
умножь на 100, получится, $xx = -100x$
 $+ 11900$,

откуда $x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50$
 $+ \sqrt{14400} = -50 + 120$.

Отвѣтъ. Лошадь стоила ему 70 та-
леровъ, и поелику онъ выигралъ на оные
70 процентовъ; слѣд. барышъ его будетъ

49 талеровъ. По чему долженъ онъ ее продать за $70 + 49$, то есть за 119 талеровъ.

352.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ себѣ нѣсколько суконъ, одно за 2 талера, другое за 4 талер. третіе за 6 талер. увеличивая всегда двумя талерами цѣну каждаго слѣдующаго сукна, а за всѣ сукна заплатилъ онъ 110 талеровъ; спрашивается, сколько всѣхъ суконъ было?

Пусть число суконъ было x , и сколько онъ заплатилъ за каждое, покажетъ слѣдующее представленіе:

за 1, 2, 3, 4, 5, — — — x

платилъ 2, 4, 6, 8, 10, ... $(x-1)2 + 2 = 2x$.

И что бы найти цѣну всѣхъ суконъ, то должно арифметическую прогрессію 2, 4, 6, 8, 10 — — $2x$ состоящую изъ x членовъ сложить въ одну сумму, чего ради по вышеобъявленному правилу сложи первой членъ съ послѣднимъ, и будетъ $2x + 2$, сумму умножь на число членовъ x , въ произведеніи $2xx + 2x$ произшедшую, двойную сумму прогрессіи раздѣли на 2, и полу-

получится искомая сумма прогрессіи $xx + x$, которая должна быть равна 110.

Вычлм x , то будетъ $xx = -x + 110$; слѣд. $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 110)}$ или $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$.

Опвѣтъ. Всѣхъ суконъ куплено было 10 кусковъ.

653.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ нѣсколько суконъ за 180 талер., и ежели бы за тѣ же деньги можно было взять еще три куска, тобъ каждой кусокъ пришелъ ему дешевле 3 мя талерами; спрашивается, сколько всѣхъ суконъ онъ купилъ?

Число суконъ пусть будетъ x , то каждой кусокъ дѣйствительно стоилъ $\frac{180}{x}$ талеровъ, а ежели бы онъ получилъ $x + 3$ куска за 180 талер. тобъ каждой кусокъ обошелся въ $\frac{180}{x+3}$ талер., которая цѣна 3 мя талерами меньше, нежели самая настоящая; чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$, умножь на x и будетъ $180x = 180 - 3x$,

$x+3$

раздѣ-

раздѣли на 3, выйдетъ $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$,

умножь на $x+3$, получится $60x = 60x + 180 - xx - 3x$,

придай xx , будетъ $xx + 60x = 180 + 57x$
вычти $60x$, выйдетъ $xx = -3x + 180$;

откуда $x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 180}$ или $-\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Отвѣтъ. За 180 талеровъ куплено 12 суконъ, по чему каждое стоило 15 талеровъ; еслили же бы онъ взялъ 3 куска больше, то есть 15 за 180 талеровъ, тобъ каждое стоило 12 талеровъ, то есть тремя меньше, нежели въ самомъ дѣлѣ.

654.

Вопросъ. Двое положили въ торгъ 100 талеровъ: первый оставляетъ деньги свои на 3 мѣсяца, а другой только на 2 въ компаніи, и каждой изъ нихъ взялъ 99 талеровъ вмѣстѣ съ капиталомъ и барышемъ; спрашивается: сколько каждой изъ нихъ положилъ?

Если первый положилъ x талеровъ, то другой $100 - x$, и когда первый беретъ 99 талеровъ, то барышъ его $= 99 - x$, которой онъ получилъ въ 3 мѣсяца на капиталъ x ; другой беретъ также 99 талеровъ

леровъ, и выигрышъ его $= 99 - 100 + x = x - 1$, которой онъ приобрѣлъ въ 2 мѣсяца на капиталъ $100 - x$, на сей же самой капиталъ $100 - x$ въ три мѣсяца можно бы получить $\frac{x-1}{2}$, слѣд. снн выигрыши капиталамъ пропорціональны, то есть, перваго капиталъ содержишься къ его выигрышу, такъ какъ капитала втораго къ своему выигрышу, такъ:

$x : 99 - x = 100 - x : \frac{x-1}{2}$ положивъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ равными будетъ $\frac{xx-1}{2} = 9900 - 199x + xx$, умножь на 2, будетъ $3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx$, вычти $2xx$, остан. $xx - 3x = 19800 - 398x$, придай $3x$ — — — $xx = -395x + 19800$; по чему $x = -\frac{395}{2} + \frac{\sqrt{(150025 + 79200)}}{4}$ или $x = -\frac{395}{2} + \frac{415}{2} = \frac{80}{2} = 45$.

Отвѣтъ. По сему первой положилъ 45 талеровъ, а другой 55; 45 тью талерами въ 3 мѣсяца выигралъ первой 54 талера, и слѣд. въ одинъ бы мѣсяць получилъ прибыли 18 талеровъ.

Другой съ 55 тью талерами въ 2 мѣсяца получаетъ прибыли 44 талера, слѣд.

слѣд. въ одинъ бы мѣсяцъ досталъ 22 талера, что съ барышемъ перваго также сходно; ибо когда на 45 талер. въ 1 мѣсяцъ выигрываетъ 18 талер., то на 55 въ то же время получится 22 талера.

655.

Вопросъ. Двѣ крестьянки несутъ на рынокъ 100 яицъ, у одной больше нежелли у другой; денегъ же выручаютъ поровну. Первая говоритъ другой: ежели бы твои яйца были у меня, то бы выручила я 15 крейцеровъ; на что другая отвѣствуетъ: а ежели бы твои яйца имѣла я, тобы я за нихъ взяла $6\frac{1}{2}$ крейцера; спрашивается, сколько у каждой было?

Положимъ, что первая имѣла x яицъ, то другая $100-x$; чего ради ежели бы первая $100-x$ продала за 15 крейцеровъ, то поставь тройное правило

$100-x : 15 = x : \frac{15x}{100-x}$ крейцеровъ: подобнымъ образомъ надлежитъ поступать и въ другомъ случаѣ, то есть, когда другая x яицъ продать хотѣла за $6\frac{1}{2}$ крейцера, найти можно, сколько она за свои $100-x$ яицъ выручила, а именно:

$x :$

$$x : \frac{20}{1} = 100 - x : \frac{2000 - 20x}{3x} \text{ крейцер.}$$

и послѣку объ крестьянки выручили поровну, то будетъ у насъ уравненіе

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{2000-20x}{3x}, \text{ которое умножь на } 3x$$

$$\text{будетъ } \frac{45xx}{100-x} = 2000 - 20x$$

умножь еще на $100-x$, получится $45xx = 200000 - 4000x + 20xx$,
 $= 200000 - 4000x + 20xx$,
 вычт. $20xx$, останется $25xx = 200000 - 4000x$
 раздѣли на 25, выйдетъ $xx = -160x + 8000$,
 и слѣдовательно $x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)}$
 или $x = -80 + 120 = 40$.

Отвѣтъ. У первой было 40 яицъ, а у другой 60, и каждая изъ нихъ выручила 10 крейцеровъ.

656.

Вопросъ. Двое продали нѣсколько локтей бархату, второй 3 локтя больше перваго, а выручаютъ вмѣстѣ 35 талеровъ; первой другому говоритъ: за твоя бархатъ могъ бы я взять 24 талера; другой ему отвѣтствуетъ: а я бы за твоя взялъ 12 талера; спрашивается, сколько локтей каждой изъ нихъ имѣлъ?

По-

Положи, что у первого было x локтей, то у другого $x+3$ локтя, и когда бы первой за $x+3$ локтя взялъ 24 талера, слѣд. свои x локтей продавъ онъ за $\frac{24x}{x+3}$ талера, и когда другой x локтей хочетъ продать за $12\frac{1}{2}$ талера, то свои $x+3$ локтя продавъ онъ за $\frac{25x+75}{2x}$,

и оба вмѣстѣ выручили они $\frac{24x}{x+3}$

$$+\frac{25x+75}{2x}=35,$$

$$\text{или } \frac{48xx+25x+75}{x+3}=70x,$$

$$\text{или } \frac{48xx}{x+3}=45x-75,$$

умножь на $x+3$, $48xx=45xx+60x-225$,
вычти $45xx$, $3xx=60x-225$,

$$\text{или } xx=20x-75;$$

$$\text{откуда } x=10 \pm \sqrt{(100-75)}=10 \pm 5.$$

Отвѣтъ. Сей вопросъ имѣеть два рѣшенія, по первому первой имѣеть 15 локтей, а другой 18; и понеже первой 18 аршинъ хотѣлъ продать за 24 тал., то за свои 15 взялъ онъ 20 талер. другой за 15 локтей хотѣлъ взять $12\frac{1}{2}$ тал.,

то за свои 18 взялъ онъ 15 талер.; и оба взяли 35 тал.

По второму рѣшенію, первой имѣеть 5 локтей, а другой 8, первой продалъ бы 8 локтей за 24 талера, то свои 5 продалъ за 15 талер. другой 5 локтей перваго продалъ бы за 12½ талер. слѣд. за свои 8 выручилъ онъ 20 талеровъ и оба вмѣстѣ 35 талеровъ.

Г Л А В А VII.

Объ извлеченіи корней изъ многоугольныхъ чиселъ.

657.

Выше сего уже мы показали, какъ многоугольныя числа находятся, и что мы тамо бокомъ называли, то называется также и корнемъ. Ежели корни означатся буквою x , то многоугольныя числа найдутся слѣдующія:

Зугольное будетъ $\frac{xx+x}{2}$

4 " " " " " " " " xx

5 " " " " " " " " $\frac{3xx-x}{2}$

6 " " " " " " " " $2xx-x$

$$\begin{array}{ll}
 7 \text{ угольное будетъ } & \frac{5xx-3x}{2} \\
 8 \text{ " " " " " " " } & 3xx-2x \\
 9 \text{ " " " " " " " } & \frac{7xx-5x}{2} \\
 10 \text{ " " " " " " " } & 4xx-3x \\
 n \text{ " " " " " " " } & \frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}
 \end{array}$$

658.

Помощію сей формулы не трудно для каждаго бока или корня сыскать многоугольное число, сколь бы велико число угловъ ни было, о чемъ уже и выше сего упомянуто. Естьли же обратно дано будетъ многоугольное число нѣсколькихъ споронъ, то корень его или бокъ находить гораздо труднѣе; ибо для сего пребудетъся рѣшеніе квадратнаго уравненія. По чему матерія сія особливаго разсмотрѣнія достойна.

Начнемъ сперва съ преугольныхъ, а по томъ приступимъ и къ многоугольнымъ числамъ.

659.

Данное треугольное число пусть будетъ 91, сыскать его бокъ или корень?

Положи искомой корень $=x$, то должно быть $\frac{x+x}{2}=91$, умножь на 2, выдешъ $xx+x=182$, вычти x , останется $xx=-x+182$ и слѣдоват. $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}+182)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{365}{2}}=13$; слѣд:

искомой треугольника корень $=13$, потому что треугольникъ изъ $13=91$.

660.

Пусть будетъ вообще данное треугольное число a , котораго корень найди должно.

Искомой корень пусть будетъ $=x$, то $\frac{x+x}{2}=a$, или $xx+x=2a$, и $xx=-x+2a$, откуда $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{2}+2a)}$ или $x=-\frac{1+\sqrt{2a+1}}{2}$.

Отсюда получаемъ мы сіе правило: умножь данное треугольное число на 8, къ произведенію придай 1, изъ суммы извлеси квадратной корень, и изъ сего вычти единицу, остатокъ раздѣли на 2, частное дастъ искомой треугольника корень.

661.

661.

Отсюда явствуется, что всѣ треугольники имѣютъ сіе свойство, то есть, когда они на 8 умножаются и къ произведению придастся 1, въ суммѣ всегда выходитъ квадратное число, какъ изъ слѣдующей таблички видно:

3 уголн. | 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36 и пр.
8 разѣ + 1 | 9; 25; 49; 81; 121; 169; 225; 289 и пр.

Еслили же данное треугольное число a сего свойства не имѣетъ, то сіе значить, что оно не дѣйствительное треугольное число, или что корня его въ рациональныхъ числахъ показать не лзя.

662.

По сему правилу, что бы сыскать корень 3 угольнаго числа 210, будетъ $a=210$, $8a+1=1681$, коего квадратной корень 41; отсюда видно, что число 210 есть дѣйствительное треугольное число, коего корень $=\frac{1681-1}{8}=210$.

Еслили бы число 4 взято было какъ 3 угольное число, коего бы корень найти должно было, то оной былъ бы $\frac{\sqrt{11-1}}{2}$,

Е 3

слѣд.

86 обѣ алгебраическ. уравненіяхъ

слѣд. неизвлекаемой, какъ и дѣйствительной изъ сего корня 3 угольникъ найдется слѣдующимъ образомъ.

Понеже $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$, то $xx = \frac{12-\sqrt{13}}{2}$, к сему приложи x , будетъ $xx+x = \frac{16}{2} = 8$, и слѣд. треугольное число $\frac{x+x}{2} = 4$.

663.

Поелику четыреугольныя числа тоже самое суть, что и квадратныя, слѣдовательно не имѣютъ они ни малой трудности; ибо положивъ четыреугольное число $=a$, и слѣд. $x = \sqrt{a}$, по сему квадратныя и четыреугольныя корни одно значать.

664.

Приступимъ теперь къ пятиугольнымъ числамъ. Пусть будетъ 22 пятиугольное число, и корень его $=x$, то должно быть $\frac{xx-x}{2} = 22$ или $3xx-x=44$, или $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$, откуда найдется $x = \frac{1}{3} + \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{44}{3})}$, то есть: $x = \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{132}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 4$; слѣд. 4 есть искомой пятиугольной корень числа 22.

665.

665.

Пусть предложень будетъ вопросъ: даннаго пятиугольнаго числа a сыскапъ корень?

Искомой корень положи $=x$, и найдется уравненіе $\frac{3xx-x}{2}=a$, или $3xx-x=2a$, или $xx=\frac{1}{3}x+\frac{2a}{3}$, откуда $x=\frac{1}{3}+\sqrt{(\frac{1}{9}+\frac{2a}{3})}$, то есть: $x=\frac{1+\sqrt{1+6a}}{6}$; и такъ ежели a будетъ дѣйствительной пятиугольникъ, то $24a+1$ должно быть всегда квадратное число.

Пусть будетъ напр. 330 данной пятиугольникъ, то корень его $x=\frac{1+\sqrt{1+6\cdot 330}}{6}=\frac{1+37}{6}=15$.

666.

Даннаго шестиугольнаго числа a сыскапъ его корень?

Положи его $=x$, то будетъ $2xx-x=a$, или $xx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$, откуда $x=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a)}=\frac{1+\sqrt{1+2a}}{2}$; и такъ когда a есть дѣйствительной шестиугольникъ, то $8a+1$ долженъ быть квадратъ. Отсюда видно, что всѣ шестиугольныя числа содержатся въ треугольныхъ, корни же ихъ отъмѣннаго свойства.

Е 4

Пусть

Пусть будетъ напр. 6 тиугольное число 1225, то корень его $x = \frac{1 + \sqrt{5121}}{4} = \frac{1 + 99}{4} = 25$.

667.

Даннаго семиугольного числа a , най-ти его бокъ или корень?

Положи искомой корень $= x$, то бу-детъ $\frac{5xx - 1x}{2} = a$, или $5xx - 3x = 2a$, или $xx = \frac{1x}{5} + \frac{2a}{5}$, откуда $x = \frac{1}{5} + \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{2a}{5}} = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{10}$. И такъ всѣ семиугольныя чис-ла суть такого состоянія, что если они на 40 умножатся и къ произведенію придастся 9, сумма всегда должна быть квадрапное число.

Пусть будетъ напр. семиугольникъ 2059, то корень его найдется $x = \frac{1 + \sqrt{8219}}{10} = \frac{1 + 91}{10} = 29$.

668.

Даннаго осьмиугольного числа a сы-скасть корень x ?

Въ семь случаевъ будетъ $5xx - 2x = a$, или $xx = \frac{2x}{5} + \frac{a}{5}$, откуда $x = \frac{2}{5} + \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{a}{5}} = 1 + \sqrt{3a + 1}$.

По сему всѣ осьмиугольные числа имѣють свойство такое, что когда они умножаются на 3, и къ произведенію при-
дася 1, сумма всегда бывъ должна квад-
ратное число.

Пусть будетъ наприм. 8 угольное чи-
сло 3816, то корень его $x = \frac{1 + \sqrt{11449}}{3}$
 $= \frac{1 + 107}{3} = 36.$

669.

Наконецъ пусть будетъ дано n ,
угольное число a , сыскать его корень x ?
Въ семь случаѣ будетъ $\frac{(n-2)xx - (n-4)x}{2}$

$= a$, или $(n-2)xx - (n-4)x = 2a$, или
 $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$

откуда $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$
 $= \frac{(n-4)}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)}{4(n-2)^2} + 8a(n-2)\right)}$

сѣдов : $x = \frac{n-4 + \sqrt{8, (n-2)a + (n-4)^2}}{2(n-2)}$

Сія формула содержитъ въ себѣ об-
щее правило, изъ данныхъ чиселъ нахо-
дитъ всѣ возможные многоугольные корни.

А дабы сіе изъяснить примѣромъ, то пусть дано будетъ 24 угольное число 3009, и понеже здѣсь $a=3009$, $n=24$, $n-2=22$, $n-4=20$, то будетъ корень $x=\frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44}=\frac{20+728}{44}=17$.

Г Л А В А VIII.

О извлеченіи квадратныхъ корней изъ биномія, или двѣхъ членнаго числа.

670.

Биномій въ Алгебрѣ называется число изъ двухъ частей состоящее, изъ коихъ одна, или обѣ коренной знакъ при себѣ имѣють. Какъ $3+\sqrt{5}$ есть биноміи такъ же $\sqrt{3}+\sqrt{3}$; при томъ все равно, какимъ бы знакомъ сіи двѣ части ни соединены были, то есть: или знакомъ $+$, или $-$, слѣд. $3-\sqrt{5}$ будетъ также биномій называться, какъ и $3+\sqrt{5}$.

671.

Сіи биноміи особливо для того примѣчанія достойны, что при разрѣшеніи квадратныхъ уравненій такія формулы попадаютъ, ежели рѣшеніе не можетъ быть рационально.

Такъ

Такъ когда случится уравненіе $xx=6x-4$, то будетъ $x=3+\sqrt{5}$. Для сей прип-
чины такія формулы весьма часто попа-
даются въ Алгебраическихъ выкладкахъ, и
мы уже выше сего показали, какимъ обра-
зомъ обыкновенныя дѣйствія сложенія,
вычитанія, умноженія и дѣленія съ та-
кими числами дѣлаются; а теперь пока-
жемъ какимъ образомъ изъ такихъ фор-
мулъ и квадратной корень извлекать над-
лежитъ, ежели такое извлеченіе учинить-
ся можетъ; въ противномъ случаѣ при-
ставляется къ ней еще коренной знакъ,
то есть квадратной корень изъ $3+\sqrt{2}$
есть $\sqrt{3+\sqrt{2}}$.

672.

При семъ примѣчать надлежитъ, что
квадраты такихъ биноміевъ суть также
биноми, въ коихъ одна часть раціональна.

Ибо когда ищется квадратъ изъ $a+\sqrt{b}$, то будетъ оной $(aa+b)+2a\sqrt{b}$,
такъ что ежели изъ формулы $(aa+b)+2a\sqrt{b}$
потребуется опять квадратной
корень, то будетъ оной $a+\sqrt{b}$, которой
безспорно лучше уразумѣть можно, неже-
ли

ли когдабъ предъ прежнею формулою еще знакъ $\sqrt{}$ поставился. Равнымъ образомъ ежели формулы $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ возмется квадратъ, которой будетъ $(a+b) + 2\sqrt{ab}$, то обратно изъ формулы $(a+b) + 2\sqrt{ab}$ корень будетъ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, которая формула также простяе, какъ когда предъ прежнею знакъ $\sqrt{}$ поставленъ будетъ.

673.

Чего ради въ семь случаѣ нужно только сыскать карактеръ, по которому бы всегда узнавать можно было, имѣеть ли такой квадратной корень мѣсто или нѣтъ. На сей конецъ возьмемъ мы какую нибудь легкую формулу и рассмотримъ, можно ли изъ биномія $5 + 2\sqrt{6}$ симъ образомъ найти квадратной корень.

Положи, что сей корень $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$, коего квадратъ $= (x+y) + 2\sqrt{xy}$ и которой долженъ быть равенъ $5 + 2\sqrt{6}$; слѣд. раціональная часть $x+y$ должна быть $= 5$, а неизвлекаемая $2\sqrt{xy} = 2\sqrt{6}$, откуда производить $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, и взявъ съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ $xy = 6$; и когда $x+y=5$, то $y=5-x$, которую величину

чину положи въ уравненіе $xy=6$, выдешь $5x-xx=6$, или $xx=5x-6$ слѣд. $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$.

И такъ когда $x=3$, то $y=2$, и корень квадратной изъ $5+2\sqrt{6}$ будетъ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

674.

Имѣя здѣсь сіи два уравненія I.) $x+y=5$, II.) $xy=6$ покажемъ особливой путь, какъ, и откуда находить x и y , которой состоятъ въ слѣдующемъ:

Понеже $x+y=5$, то возми квадраты $xx+2xy+yy=25$, и замѣть, что $xx-2xy-yy$ есть квадратъ изъ $x-y$; изъ уравненія $xx+2xy+yy=25$ вычти $xy-6$ 4жды взятое, или $4xy=24$, то получится $xx-2xy+yy=1$, коего корень квадратной $x-y=1$, и поелику $x+y=5$, то будешь $x=3$, $y=2$; по сему искомой корень изъ $5+2\sqrt{6}$ есть $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

675.

Разсмотримъ теперъ сей общей биномій $a+\sqrt{b}$. Положа квадратной его корень $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ получишь уравненіе $(x+y)$
 $+2$

$+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, гдѣ $x+y=a$ и $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, или $4xy=b$ квадратъ изъ $x+y=a$ есть $xx+2xy+yy=aa$, вычти изъ него $4xy=b$, и будешь $xx-2xy+yy=aa-b$, ко-
его квадратной корень $x-y=\sqrt{(aa-b)}$, и
понеже $x+y=a$, то найдется $x=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$ и $y=\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$.

Слѣдовательно искомой квадратной
корень изъ $a+\sqrt{b}$ будешь $\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}$.

676.

Сія формула гораздо связнѣе, нежели
какъ когдабъ предъ даннымъ биноміемъ
 $a+\sqrt{b}$ поставленъ былъ просто коренной
знакъ $\sqrt{}$, то есть. $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Но она
облегчится, ежели числа a и b будутъ
такого состоянія, что $aa-b$ будетъ по-
чной квадратъ; ибо тогда $\sqrt{}$ позади ко-
ренного знака $\sqrt{}$ пропадетъ. Отсюда вид-
но, что только въ тѣхъ случаяхъ изъ би-
номія $a+\sqrt{b}$ квадратной корень извлечь
можно, когда $aa-b=cc$; и тогда искомой
квадратной корень будешь $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$;
когда же $aa-b$ не квадратное число, то
ква-

квадратнаго корня способѣе означить не
льзя, какъ кореннымъ знакомъ $\sqrt{}$.

677.

Отсюда получаемъ мы правило для
способнѣйшаго означенія квадратнаго кор-
ня изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$. Къ сему тре-
буется, чтобъ $aa - b$ было квадратное чи-
сло, и ежели оно $= cc$, то искомой ква-
дратной корень будетъ $\sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$;
при чемъ еще примѣчать надлежитъ, что
квадратной корень изъ $a - \sqrt{b}$ есть $\sqrt{\frac{a+c}{2}}$
 $-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; ибо ежели сей формулы возмемъ
квадратъ, то оной будетъ $a - 2\sqrt{\frac{aa - cc}{4}}$, а
поселику $cc = aa - b$, то $aa - cc = b$, слѣд.
сей квадратъ $= a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \sqrt{b} = a - \sqrt{b}$.

678.

И такъ когда изъ биномія $a \pm \sqrt{b}$
должно будетъ извлечь корень квадрат-
ной, то вычти квадратъ раціональной
части aa изъ квадрата ирраціональной
 b , изъ остатка извлеки корень квадрат-
ной, которой пусть будетъ c ; по сему
требуемой квадратной корень $= \sqrt{\frac{a+c}{2}}$
 $\pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

679.

679.

Ежели должно будетъ найти квадратной корень изъ $2+\sqrt{3}$, то будетъ $a=2$, $b=3$ и $aa-b=1$, коего корень $c=1$, слѣдоваѣ. искомой квадратной корень $=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Пусть будетъ еще биномъ $11+6\sqrt{2}$, то въ немъ $a=11$, $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$, и $b=36\cdot 2=72$ и $aa-b=49$, слѣд. $c=7$, и квадратной корень изъ $11+6\sqrt{2}$ будетъ $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.

Найти квадратной корень изъ $11-2\sqrt{30}$: здѣсь $a=11$, $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$, $b=120$ и $aa-b=1=c$ слѣд. искомой корень $=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

680.

Сіе правило имѣетъ также мѣсто, когда въ задачѣ случаются мнимыя или невозможныя числа.

Такъ ежели данъ будетъ сей биномъ $1+4\sqrt{-3}$, то $a=1$, $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$ и $b=16\cdot -3=-48$, $aa-b=49$; слѣд. $c=7$, и искомой квадратной корень будетъ $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Пусть

Пусть дано будетъ еще $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$,
то $a = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{b} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, и $b = \frac{1}{4} \cdot -3 = -\frac{3}{4}$;
откуда $aa - b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$; и $c = 1$, слѣд.
искомой квадратной корень $= \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{4}}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, или $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Слѣдующей примѣръ, въ которомъ
ищется квадратной корень изъ $2\sqrt{-1}$,
примѣчанія достойнъ. По сликъ здѣсь ра-
циональной части не находится, то $a = 0$,
 $\sqrt{b} = 2\sqrt{-1}$, и $b = -4$, а $aa - b = 4$ слѣд. $c = 2$;
по чему искомой корень будетъ $\sqrt{1} + \sqrt{-1}$
 $= 1 + \sqrt{-1}$, коего квадратъ $1 + 1\sqrt{-1} - 1$
 $= 2\sqrt{-1}$.

681.

Ежели бы надлежало разрѣшить ура-
вненіе такое, какъ $xx = a \pm \sqrt{b}$, и было
бы $aa - b = cc$, то величина x нашлася бы
 $x = \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)}$, что во многихъ слу-
чаяхъ имѣеть немалую пользу.

Пусть будетъ напр. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$,
то будетъ $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

682.

Сіе имѣеть мѣсто особливо при раз-
рѣшеніи уравненій четвертой степени,
Томъ II. Ж какъ

какъ $x^4 = 2axx + d$; ибо когда здѣсь положишь $xx = y$, то $x^4 = y^2$, слѣд. данное уравненіе переменится въ $yy = 2ay + d$, откуда найдется $y = a \pm \sqrt{a^2 + d}$, чего ради мѣсто перваго уравненія будетъ $xx = a \pm \sqrt{a^2 + d}$; откуда надлежитъ извлечь еще квадратной корень; понеже здѣсь $\sqrt{b} = \sqrt{aa + d}$ и $b = aa + d$, то будетъ $aa - b = -d$, и ежели $-d$ будетъ квадратъ, то есть: cc или $d = -cc$, то можно будетъ изъяснить и корень. По чему пусть будетъ $d = -cc$, или дано сіе уравненіе 4пой степени $x^4 = 2axx - cc$, то величина x изъ него найдется $x = \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - c}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a \mp \sqrt{a^2 - c}}{2}}$.

685.

Изъяснимъ теперъ сіе нѣсколькимъ примѣрами.

Сыскать два числа, коихъ произведеніе равно 105, а сумма ихъ квадратовъ равна 274?

Положи искомыя числа x и y , то получаются потчасъ два уравненія I) $xy = 105$; II) $x^2 + y^2 = 274$, изъ перваго находится $y = \frac{105}{x}$, что положи мѣсто y , во второмъ уравненіи будетъ $xx + \frac{105^2}{x^2} = 274$,
умножь

умножь на xx , и будетъ $x^2 + 105^2 = 274xx$, или $x^2 = 274xx - 105^2$; и естли сіе сравнимъ съ прежнимъ уравненіемъ, то будетъ $2a = 274$, и $a = 137$, $-cc = -105^2$, слѣдов. $c = 105$, откуда найдется $x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4$, слѣдовательно x равно или 15, или 7, въ первомъ случаѣ $y = 7$, а во второмъ $= 15$, по чему оба искомые числа суть 15 и 7.

684.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что выкладка сія еше легче здѣлана быть можетъ; ибо когда $xx + 2xy + yy$ и $xx - 2xy + yy$ суть квадраты, при томъ какъ $xx + yy$, такъ и xy извѣстны, то послѣднее надлежитъ только удвесить, и какъ къ первому приложитъ, такъ изъ него и вычестъ, какъ здѣсь видно:

$xx + yy = 274$, приложи сперва $2xy$ и будетъ $xx + 2xy + yy = 484$ и $x + y = 22$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx - 2xy + yy = 64$ и $x - y = 8$; отсюда будетъ $2x = 30$, и $x = 15$; $2y = 14$ и $y = 7$. Подобнымъ же образомъ можетъ разрѣшенъ быть и сей общей вопросъ. Сыскашь два числа,

конхъ произведеніе $=m$, и сумма ихъ квадратовъ $=n$?

Искомыя числа пусть будутъ x и y , то найдутся два слѣдующія уравненія: I) $xy=m$; II) $xx+yy=n$; $2xy=2m$, чего ради придавъ $2xy$ выдешъ $xx+2xy+yy=n+2m$, и $x+y=\sqrt{n+2m}$, потомъ вычти $2xy$, и будетъ $xx-2xy+yy=n-2m$, то $x-y=\sqrt{n-2m}$, отсюда $x=\frac{1}{2}\sqrt{n+2m}+\frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$, и $y=\frac{1}{2}\sqrt{n+2m}-\frac{1}{2}\sqrt{n-2m}$.

685.

Пусть предложенъ будетъ еще сей вопросъ: сыскать два числа, конхъ произведеніе $=35$, и разность квадратовъ ихъ $=24$?

Положи большее искомое число x , а меньшее y , и выдешъ два уравненія: I) $xy=35$; II) $x^2-y^2=24$, и по елику въ прежнемъ случаѣ употребленная выгода здѣсь мѣста не имѣетъ, то поступай обыкновеннымъ образомъ, и найдется изъ перваго уравненія $y=\frac{35}{x}$, что положивъ во второмъ уравненіи вмѣсто y дашъ $xx-\frac{1225}{x^2}=24$, умножь на xx и будетъ $x^4-1225=24xx$ или $x^4=24xx+1225$. По елику

слику здѣсь послѣдней членъ имѣеть знакъ плюсь, то прежняго уравненія здѣсь употребить не лзя, по тому что $cc = -1225$, и слѣд. c было бы не возможно.

Для сей причины кладется $xx = z$ и выходитъ $zz = 24z + 1225$, откуда $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ или $z = 12 \pm 37$, слѣдов. $xx = 12 \pm 37$, то естъ $xx = 49$ или $xx = -25$; по первому знаменованію будетъ $x = 7$ и $y = 5$; а по другому $x = \sqrt{-25}$, и $y = \sqrt{-\frac{35}{25}}$ или $= \sqrt{-\frac{1225}{25}}$ или $= \sqrt{-49}$.

686.

Въ заключеніе сей главы прибавимъ еще сей вопросъ:

Найти два числа, коихъ сумма, произведеніе и разность квадратовъ равны между собою?

Большее число пусть будетъ x , а меньшее y , то сіи три формулы должны быть равны между собою I) $x + y$; II) xy ; III) $xx - yy$; и ежели первая сравниется со второю, то будетъ $x + y = xy$, отсюда ищи x ; ибо $y = xy - x = x(y - 1)$, то $x = \frac{y}{y - 1}$, слѣд. $\frac{yy}{y - 1} = x + y$, и xy

Ж 5

=

$= \frac{yy}{y-1}$, и слѣд. сумма равная произве-

денію должна быть также равна разности квадратовъ, и при томъ будетъ х

$$-yy = \frac{yy}{yy-2y} + 1 - yy = \frac{-y^4 + 2y^3}{yy-2y+1}, \text{ что}$$

прежней величинѣ $\frac{yy}{y-1}$ равно ; того

ради будетъ $\frac{yy}{y-1} = \frac{-y^4 + 2y^3}{yy-2y+1}$, раздѣля

на yy и будетъ $\frac{1}{y-1} = \frac{-yy+2y}{yy-2y+1}$, по

семь умножь на $y-1$, выдѣтъ $1 = \frac{-yy+2y}{y-1}$, умножь еще на $y-1$, будетъ

$y-1 = -yy+2y$, слѣдов. $yy = y+1$, отсюда найдется $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)} =$

$\pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; чего ради $x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$;

а что бы здѣсь вывести коренной знакъ изъ знаменателя, то умножь сверху и

снизу на $\sqrt{5}+1$, и будетъ $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Отвѣтъ

Отвѣтъ. Большее искомое число $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, а меньшее $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; ихъ сумма $x+y=2+\sqrt{5}$, произведеніе $xy=2+\sqrt{5}$, и поелику $xx=\frac{7+5\sqrt{5}}{2}$ и $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, то разность квадратовъ $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

687.

Послику показанное рѣшеніе нѣсколько трудновато, то легче можно его здѣлать симъ образомъ: положи сперва $x+y$ равно разности квадратовъ $xx-yy$, то есть: $x+y=xx-yy$; и понеже здѣсь можно раздѣлить на $x+y$, по тому что $xx-yy=(x+y)(x-y)$, то получится $1=x-y$, откуда $x=1+y$, и слѣдовательно $x+y=2y+1$, и $xx-yy=2y+1$, что должно быть еще равно произведенію $xy=y^2+y$; по чему $y^2+y=2y+1$, откуда такъ какъ и прежде найдется $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

688.

Сіе ведетъ насъ еще къ слѣдующему вопросу: сыскать два числа, коихъ сумма, произведеніе и сумма ихъ квадратовъ равны между собою?

Искомыя числа пусть будутъ x и y , то слѣдующія три формулы равны между собою, то есть: I) $x+y$; II) xy ; III) $xx+yy$.

Ежели первая изъ нихъ уравниется со второй, то есть, положимъ $x+y = xy$, то найдется $x = \frac{y}{y-1}$, и $x+y =$

$\frac{yy}{y-1}$, что равно также xy , и отсюда

$xx+yy = \frac{yy}{yy-2y+1} + yy$, что положи

равно $\frac{yy}{y-1}$. Умножь на $(y-1)^2$, и бу-

детъ $y^2 - 2y^2 + 2yy = y^2 - yy$, или $y^2 = 3y^2 - 3yy$; раздѣли на yy , произойдетъ $y^2 = 3y - 3$ и $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 3} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}$,

отсюда $y-1 = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, слѣд. $x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{1 \pm \sqrt{-3}}$,

умножь

умножь сверху и снизу на $1-\sqrt{-3}$, то
будеть $x = \frac{6-2\sqrt{-3}}{4}$, или $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$

Отвѣтъ. Оба искомыя числа будутъ
 $x = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ и $y = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$; сумма ихъ
 $x+y=3$, произведеніе $xy=3$; и когда
 $xx = \frac{3-3\sqrt{-3}}{2}$ и $yy = \frac{3+3\sqrt{-3}}{2}$, то
будеть $xx+yy=3$.

689.

Сія выкладка не мало облегчиться
можетъ особливимъ къ тому средствомъ,
что такожде и въ другихъ случаяхъ упо-
треблять можно; а состоитъ оно въ томъ,
чтобъ искомыя числа не двумя разными
буквами, но суммою и разностию двухъ
другихъ изъявлено было.

Такъ въ первой задачѣ положи одно
искомое число $p+q$, а другое $p-q$, сум-
ма ихъ $=2p$, произведеніе $=pp-qq$, а
сумма изъ квадратовъ $2pp+2qq$; всѣ сіи
три части должны быть между собою
равны. Положи первую равну второй,
т. е. $2p=pp-qq$, отсюда $qq=pp-2p$. Сіе

Ж 5

зна-

знаменованіе положи въ третней формулѣ вмѣсто qq , то будетъ $4rr-4r$, что уравнивъ съ первой будетъ $2r=4rr-4r$, придай $4r$ и выдешъ $6r=4rr$ раздѣли на r , выдешъ $6=4r$ слѣдов. $r=\frac{3}{2}$.

Отсюда $qq=-\frac{1}{2}$ и $q=\sqrt{-\frac{1}{2}}$, слѣдов. искомыя числа будутъ $p+q=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$

и другое $p-q=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}$, какъ и прежде.

Г Л А В А IX.

О свойствахъ квадратныхъ уравненій.

690.

Изъ преждепоказаннаго видно было, что каждое квадратное уравненіе двоякимъ образомъ рѣшиться можетъ, которое свойство заслуживаетъ особливое примѣчаніе; ибо чрезъ то и вышшихъ степеней уравненіи не мало облегчаются. Чего ради рассмотримъ теперь, для чего каждое квадратное уравненіе двоякое рѣшеніе имѣетъ; поелику въ семъ важное свойство сихъ уравненій заключается.

691.

691.

Хотя уже извѣстно, что сіе двойное рѣшеніе начало свое имѣетъ отсюда, что изъ каждаго числа квадратной корень, какъ положительной, такъ и отрицательной взять быть можетъ. Но поелику причины сей при вышшихъ уравненіяхъ употребить не лзя, то не излишно будетъ, основаніе онаго показать еще инымъ образомъ, то есть: здѣсь изъяснить надобно, для чего квадратное уравненіе, какъ наприм. $xx = 12x - 35$ двоякимъ образомъ рѣшено быть можетъ, или что для x двѣ величины опредѣлены быть могутъ, изъ коихъ каждая рѣшитъ данной вопросъ. Такъ въ семъ примѣрѣ вмѣсто x можно взять какъ 5, такъ и 7; ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $xx = 12x - 35$.

692.

Для лучшаго изъясненія сего основанія, перенеси всѣ члены уравненія на одну сторону, такъ чтобъ на другой сторонѣ былъ 0; по чему прежнее уравненіе перемѣнится въ $xx - 12x + 35 = 0$. При чемъ требуется найти только такое число,

сло, которое естли поставится вмѣсто x , формула $xx - 12x + 35$ была бы дѣйствительно равна 0, а по томъ уже показать должно причину, для чего се двоякимъ образомъ учиниться можетъ.

693.

Вся сила состоятъ въ томъ, что бы показать, что формула $xx - 12x + 35$ можетъ почестся за произведение изъ двухъ множителей; какъ и дѣйствительно формула сія состоятъ изъ двухъ множителей $(x-5)(x-7)$; чего ради когда оная формула должна быть 0; то и произведение $(x-5)(x-7)$ должно быть такожде $= 0$; а произведеніе изъ сколькихъ бы множителей оно ни состояло, всегда будетъ 0, естли только одинъ множитель $= 0$; ибо сколько бы велико произведеніе изъ прочихъ множителей ни было, когда оно на 0 помножится, всегда выдетъ въ произведеніи 0; которую истинну и при вышшихъ уравненіяхъ наблюдать надобно.

694.

Отсюда видно, что произведеніе $(x-5)(x-7)$ въ двухъ случаяхъ будетъ $= 0$:
пер-

первое, когда первой множитель $x-5=0$ будетъ, и второе, когда второй $x-7=0$; первое учинится положивъ $x=5$, а второе положивъ $x=7$. Изъ сего видна подлинная причина, для чего уравненіе $xx-12x+35=0$ двумя образами рѣшиться можетъ, или для x двѣ величины опредѣлить можно, кои обѣ рѣшаютъ уравненіе. Она причина состоитъ въ томъ, что формула $xx-12x+35$ представлена быть можетъ, какъ произведеніе изъ двухъ множителей.

695.

Сіе обстоятельство имѣетъ мѣсто при всѣхъ квадратныхъ уравненіяхъ; ибо когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, то всегда получится такая формула, $xx-ax+b=0$, которая равнымъ образомъ почтена быть можетъ за произведеніе изъ двухъ множителей, кои мы изобразимъ такъ: $(x-p)(x-q)$, не имѣя нужды знать, что значать p и q ; и когда уравненіе наше требуетъ, чтобъ сіе произведеніе было 0, то извѣстно, что сіе двоякимъ образомъ учинено быть можетъ,

жеть: первое когда $x=p$, а второе когда $x=q$, что значить объ величины, по которымъ уравненіе разрѣшается.

696.

Посмотримъ какіе сїи множители быть должны, что бы ихъ произведеніе точно нашу формулу $xx-ax+b$ дѣлало. Умножь ихъ самымъ дѣломъ, и получатся $xx-(p+q)x+pq$; что когда съ формулою $xx-ax=b$ тоже быть должно, то видно, что $p+q$ должно быть равно a и $pq=b$, откуда познаемъ мы сїе знанное свойство, что такого уравненія, какъ $xx-ax+b=0$ объ величины суть такого состоянія, что сумма ихъ равна числу a , а произведеніе $=b$, по чему какъ скоро извѣстна будетъ одна величина, найдется и другая.

697.

Въ семъ случаѣ объ величины x имѣютъ знакъ положительной, и въ уравненіи второй членъ имѣлъ знакъ $-$, а третьей $+$. Разсмотримъ теперь и тѣ случаи, когда одна или объ величины x знакъ
опри

отрицательной имѣютъ; первое учинится, когда оба множителя уравненія будутъ такіа $(x-p)$ $(x+q)$, откуда произходятъ для x двѣ величины $x=p$ и $x=-q$, и самое уравненіе будетъ $xx + (q-p)x - pq = 0$, гдѣ второй членъ знакъ $+$ имѣетъ, то есть когда q больше нежели p , ежели же бы q меньше было нежели p , то бы при второмъ членѣ стоялъ знакъ $-$; третей же членъ имѣетъ здѣсь всегда знакъ $-$.

А когда оба множителя будутъ $(x+p)$ $(x+q)$, то обѣ величины x будутъ отрицательныя, т. е. $x=-p$, и $x=-q$; а самое уравненіе было бы $xx + (p+q)x + pq = 0$, гдѣ какъ второй, такъ и третей члены знакъ $+$ имѣютъ.

698.

Отсюда познаемъ мы состояніе корней каждаго уравненія по знакамъ второго и третьяго членовъ. Пусть будетъ уравненіе $xx - - - ax - - - b = 0$, когда второй и третей члены имѣютъ знакъ $+$, то обѣ величины x будутъ отрицательныя; когда же второй членъ знакъ $-$, а третей $+$ имѣютъ, то обѣ величины бу-

будушь положительныя; а ежели и третей членъ будетъ имѣть знакъ отрицательной, то одна величина будетъ положительная, а другая отрицательная, и всегда второй членъ содержитъ сумму обоихъ корней; а третей ихъ произведение.

699.

Теперь не трудно здѣлать такое квадратное уравнение, которое бы по изволению двѣ данныя величины содержало; спрашивается напр. такое уравненіе, гдѣ одна величина x былабъ 7, а другая -3 : здѣлай изъ сего простое уравненіе $x=7$ и $x=-3$, по томъ $x-7=0$ и $x+3=0$, которые суть множители требуемаго уравненія, такъ что самое уравненіе есть $xx-4x-21=0$, откуда по прежнему правилу тѣ же самыя величины для x найдутся, ибо когда $xx=4x+21$, то будетъ $x=2\pm\sqrt{25}$, или $x=2\pm5$, и такъ $x=7$ или $x=-3$.

700.

Статься можетъ, что обѣ величины x будушь равны между собою; то есть,
сыщи

сыщи такое уравненіе, гдѣ обѣ величины $x=5$, слѣд. оба множителя будутъ $(x-5)$ $(x-5)$, и уравненіе $xx-10x+25=0$, которое одну величину для x имѣетъ; ибо въ обоихъ случаяхъ будетъ $x=5$; что покажетъ обыкновенное рѣшеніе такого уравненія. Когда $xx=10x-25$, то будетъ $x=5 \pm \sqrt{0}$, или $x=5 \pm 0$, слѣд. $x=5$ и $x=5$.

701.

Особливо здѣсь примѣчать надлежитъ, что иногда оба знаменованія x будутъ мнимыя или невозможныя, въ которыхъ случаяхъ совсѣмъ означить не можно такой величины для x , которая бы данной вопросъ рѣшила. Напр. ежели число 10 должно будетъ раздѣлить на двѣ части, коихъ бы произведеніе было 30, то пусть будетъ одна часть $4x$, другая $=10-x$, а слѣд. ихъ произведеніе $10x-xx=30$, то есть, $xx=10x-30$ и $x=5 \pm \sqrt{-5}$, которое есть мнимое или невозможное число, и дастъ знать, что заданной вопросъ невозможенъ.

702.

И такъ неопмѣнно нужно здѣсь найти знакъ, изъ коего бы узнать можно было, возможно ли квадратное уравненіе или нѣтъ. На сей конецъ пусть будетъ дано сіе общее уравненіе:

$xx - ax + b = 0$, то есть $xx = ax - b$, и $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$, откуда явствуетъ, что когда число b больше нежели $\frac{1}{4}aa$, или $4b$ больше нежели aa , то объ величины будутъ не возможны: ибо тогда должно бы извлекать квадратной корень изъ отрицательнаго числа; но когда b меньшее нежели $\frac{1}{4}aa$, или еще меньше 0, то есть отрицательное, то объ величины x будутъ всегда возможныя; и хотя бы они были возможны или нѣтъ, то всегда можно ихъ изъяснить по сему способу: при томъ имѣюпъ они всегда сіе свойство, что сумма ихъ равна a , а произведеніе $= b$, какъ въ семъ примѣрѣ видно $xx - bx + 10 = 0$, гдѣ сумма обѣихъ знаменованій x должно быть b , а произведеніе $= 10$. Обѣ величины будутъ: I) $x = 3 + \sqrt{-1}$; II) $x = 3 - \sqrt{-1}$, коихъ сумма $= 6$, а произведеніе $= 10$.

703.

703.

Сей характеръ можно изъяснить вообще, при томъ можетъ быть онъ употребленъ и въ такихъ уравненіяхъ какъ, $fx^2 \pm gx + h = 0$; ибо отсюда получимся $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$, и $x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{gg - 4fh}{4ff}}$ или $x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{gg - 4fh}$; откуда вид-

но, что обѣ величины для x могутъ быть мнимыя, или уравненіе не возможно, когда $4fh$ будетъ больше нежели gg , или когда въ семъ уравненіи $fx^2 \pm xgx + fhxx = 0$ учетверенное произведеніе изъ перваго и послѣдняго члена будетъ больше, нежели квадратъ втораго члена; ибо четверное произведеніе изъ перваго и послѣдняго членовъ есть $4fhxx$, квадратъ средняго члена есть $ggxx$, и когда $4fhxx$, больше нежели $ggxx$, то будетъ также $4fh$ больше нежели gg , слѣд. и уравненіе не возможно. Во всѣхъ другихъ случаяхъ уравненіе возможно, и обѣ величины для x дѣйствительно опредѣлить можно, хотя оныя часто бываютъ и неизвлечкомы, однако въ

тѣхъ случаяхъ къ истинной величинѣ всегда приблизиться можно, какъ уже выше сего упомянуто. Напротивъ того въ мнимыхъ выраженіяхъ какъ $\sqrt{-5}$ ни какое приближеніе мѣста не имѣеть, ибо тогда 100 отъ него столь же далеко отстоитъ какъ 1, или другое какое число.

704.

При семъ еще примѣчать надлежитъ, что каждая такая формула второй степени какъ $xx \pm ax \pm b$ непременно раздѣлится можетъ на два такіе множителя, какъ $(x \pm p)(x \pm q)$. Ибо ежели бы кто хотѣлъ взять 3 такихъ множителя, то нашелъ бы уравненіе третьей степени, на противъ того изъ одного такого множителя не дошелъ бы и до второй степени; по чему безспорно должно быть справедливо, что каждое уравненіе второй степени содержитъ въ себѣ двѣ величины для x , и что такихъ величинъ въ немъ ни больше, ни меньше быть не можетъ.

705.

Уже показано было, что когда оба сѣи множителя найдутся, то отсюда и
объ

объ величины для x опредѣлить можно будетъ; ибо каждаго множителя положивъ равна 0, найдется величина x . Сіе имѣетъ мѣсто и въ оборотномъ смыслѣ, то есть, какъ скоро одна величина x опредѣлена будетъ, познается опшуда и множитель квадратнаго уравненія; ибо когда $x=p$ есть одна величина для x въ квадратномъ уравненіи, то будетъ такожде $x-p$ одинъ множитель онаго, или когда всѣ члены перенесутся на одну сторону, уравненіе раздѣлится можетъ на $x-p$, и частное дастъ другаго множителя.

706.

Для изъясненія сего пусть будетъ данное уравненіе $xx+4x-21=0$, о которомъ мы знаемъ, что $x=3$ есть величина количества x , ибо $3.3+4.3-21=0$, а опшуда заключить можемъ, что $x-3$ есть множитель сего уравненія, или что $xx+4x-21$ раздѣлится можетъ на $x-3$, какъ изъ слѣдующаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r|l} x-3 & xx+4x-21 \\ \hline & xx-3x \end{array} \quad \begin{array}{l} x+7 \\ + \end{array}$$

3 5

+

$$\begin{array}{r} +7x-21 \\ +7x-21 \\ \hline \end{array}$$

И такъ другой множитель есть $x+7$, и уравненіе наше можетъ изъявлено быть симъ произведеніемъ $(x-3)(x+7)=0$, откуда объ величины количества x ясно видѣть можно; ибо изъ перваго множителя будетъ $-x=3$, а изъ другаго $x=-7$.

Г Л А В А X.

О разрѣшеніи гистыхъ кубическихъ уравненій.

707.

Чистос кубическое уравненіе называется, въ которомъ кубъ неизвѣстнаго количества полагается равенъ извѣстному числу, такъ что въ немъ ни квадратъ неизвѣстнаго числа, ни оно само не попадаетъ.

Такое уравненіе есть $x^3=125$, или вообще $x^3=a$, или $x^3=\frac{a}{b}$.

708.

Какимъ образомъ изъ такого уравненія величина x находится, явно само по себѣ: ибо нужно только съ обѣихъ сторонъ извлечь кубичной корень.

Такъ

Такъ изъ уравненія $x^3=125$ найдется $x=5$, изъ уравненія $x^3=a$ будетъ $x=\sqrt[3]{a}$; а изъ $x^3=\frac{a}{b}$ найдется $x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. И

такъ естѣли кто знаетъ, какъ извлекается кубичной корень изъ какого нибудь числа; тогдѣ можеть разрѣшитъ и такое уравненіе.

709.

Но сию образомъ получится одна только величина x ; между тѣмъ когда каждое квадратное уравненіе имѣеть двѣ величины для x , то можно думать, что также и кубичное уравненіе должно имѣть больше нежели одну величину; слѣд. не безнужно будетъ разсмотрѣть сіе обстоятельство, и въ случаѣ, естѣли такое уравненіе больше одной величины для x имѣть должно, какъ ихъ сыскасть надлежитъ.

710.

Для примѣра разсмотримъ уравненіе $x^3=8$, изъ коего всѣ числа найти должно, коихъ кубъ $=8$, и поелику безъ всякаго сомнѣнія такое число $x=2$, то

3 4

по

по прежней главѣ $x^3 - 8 = 0$ должно дѣлиться на $x - 2$, чего ради здѣлалъ сѣ дѣленіе:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3-8} \quad | x^3 + 2x + 4 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 + 2x^2 - 8 \\
 \underline{+ 2x^2 - 4x} \\
 + 4x - 8 \\
 \underline{+ 4x - 8}
 \end{array}$$

слѣдовательно уравненіе наше $x^3 - 8 = 0$ изъявись можно множителями $(x-2)(xx + 2x + 4) = 0$.

711.

Понеже здѣсь спрашивается, какое бы число взять подлежало вмѣсто x , чтобъ $x = 8$ или $x^3 - 8 = 0$ было, то видно, что сѣ учинись, когда въ прежнемъ пунктѣ найденное произведеніе положится 0; при томъ оно не только тогда будетъ 0, когда $x - 2 = 0$; откуда получается $x = 2$; но также и тогда, какъ другой множитель $xx + 2x + 4$ будетъ 0: чего ради положи $сво = 0$, то есть $xx + 2x + 4 = 0$, то будетъ $xx = -2x - 4$ и слѣд. $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

712.

712.

И такъ сверхъ $x=2$, въ которомъ случаѣ уравненіе $x^3=8$ разрѣшается, имѣемъ мы еще двѣ другія величины для x , коихъ кубы равнымъ образомъ дѣлаютъ 8, и которые суть такого состоянія I) $x=-1+\sqrt{-3}$; II) $x=-1-\sqrt{-3}$, а взявъ ихъ кубы сомнѣніе наше кончится.

$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$1-\sqrt{-3}$	$1+\sqrt{-3}$
$-\sqrt{-3}-3$	$+\sqrt{-3}-3$
$-2-2\sqrt{-3}$ квадратъ	$-2+2\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$	$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}-2-3$	$+2\sqrt{-3}-2-3$
$2+6=8$ кубъ.	$2+6=8.$

Обѣ сии величины суть хотя и невозможныя или мнимыя; однако не смотря на то примѣчанія достойны.

713.

Сіе имѣетъ мѣсто въ каждомъ такомъ кубическомъ уравненіи, какъ $x^3=a$,
3 5
гдѣ

гдѣ сверхъ $x = \sqrt[3]{a}$ еще двѣ другія величины содержатся; положи для краткости $\sqrt[3]{a} = c$, такъ что $a = c^3$, и уравненіе наше получить сю формулу $x^3 = c^3$; или $x^3 - c^3 = 0$, которое послѣднее дѣлится на $x - c$, какъ изъ предложеннаго дѣленія видно:

$$\begin{array}{r}
 x-c \overline{) x^3 - c^3} \quad | \quad x^2 + cx + c^2 \\
 \underline{x^3 - cx^2} \\
 + cx^2 - c^3 \\
 \underline{+ cx^2 - c^3 x} \\
 + c^2 x - c^3 \\
 \underline{+ c^2 x - c^3} \\
 0
 \end{array}$$

По чему предписанное уравненіе изъяснится можетъ симъ произведеніемъ $(x-c)(x^2 + cx + c^3) = 0$, что въ самомъ дѣлѣ будетъ равно 0, не только тогда, когда $x - c = 0$, или $x = c$, но также и когда $xx + cx + c^3 = 0$, а изъ сего будетъ $xx = -cx - c^3$; и слѣд. $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - c^3\right)} = -\frac{c \pm \sqrt{-3c^2}}{2} = -\frac{c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \left(-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) \cdot c$. въ сей формулѣ содержатся еще двѣ величины для x .

714.

Понеже c вмѣсто $\sqrt[3]{a}$ написано было, то отсюда выводимъ мы слѣдствіе: что
въ

въ каждой кубичной формулѣ какъ $x' = a$ при величины для x содержащіяся, копорые изъявляются такъ :

$$\text{I) } x = \sqrt[3]{a}, \text{ II) } x = \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \right) \sqrt[3]{a}; \text{ III) } x = \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right) \sqrt[3]{a}.$$

Откуда явствуется, что каждой кубичной корень при величины имѣеть, изъ коихъ хотя первая только возможна, прочія же двѣ не возможны, которые однако здѣсь примѣчать надлежитъ, для того что мы выше сего видѣли, что каждой квадратной корень двѣ величины имѣеть; а въ слѣдующихъ покажется, что каждой корень четвертой степени имѣеть 4 разныя величины, пятой пять и такъ далѣе.

Въ простыхъ выкладкахъ употребляется только первой изъ сихъ трехъ величинъ, по тому что оба другіе не возможны; чему намѣрены мы еще дать здѣсь нѣсколько примѣровъ.

715.

Вопросъ. Сыскать число, котораго квадратъ ежели умножится на $\frac{1}{4}$ числа искомаго, произошло бы 432?

Пусть

Пусть сіе число будетъ x , то xx умноженное на $\frac{1}{4}x$ должно быть равно числу 432; слѣдов. будетъ

$\frac{1}{4}x^3 = 432$, умноживъ на 4, будетъ $x^3 = 1728$, и извлекши кубичной корень найдется $x = 12$.

Отвѣтъ. Искомое число есть 12: ибо квадратъ его 144 умноженной на $\frac{1}{4}$ т. е. на 3 даетъ 432.

716.

Вопросъ. Сыскашь число, коего бы четвертая степень раздѣленная на его половину, и къ сему частному естли придастся $14\frac{1}{4}$ чтобъ вышло 100?

Искомое число положи x , то четвертая его степень x^4 , раздѣленная на $\frac{1}{2}x$ даетъ $2x^3$; къ сему придавъ $14\frac{1}{4}$ должно вышпи 100, и такъ будетъ $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, вычпи $14\frac{1}{4}$, выдетъ $2x^3 = \frac{301}{4}$, раздѣли на 2, выдетъ $x^3 = \frac{301}{8}$, и извлекши кубичной корень получится $x = 7$.

717.

Вопросъ. Нѣсколько офицеровъ стоять въ полѣ, каждой въ командѣ своей имѣеть въ прое столько конницы, и въ 20 разъ столько пѣхошы, нежели сколько

ко

ко всѣхъ офицеровъ въ полѣ находится ; каждой конной получаетъ въ мѣсяцъ столько гульденовъ жалованья , сколько всѣхъ офицеровъ ; а каждой пѣшей въ половину столько , вся же въ мѣсяцахъ выдаваемая на жалованье сумма денегъ дѣлаетъ 13000 гульден. спрашивается сколько всѣхъ офицеровъ было ?

Положи число офицеровъ x , то каждой въ командѣ своей имѣеть $3x$ конницы и $20x$ пѣхоты , слѣд. число всѣхъ конныхъ было $3xx$, а пѣшихъ $20xx$; и когда каждой конной въ мѣсяцъ получаетъ x гульденовъ , и каждой пѣшей $\frac{1}{2}x$ гулд. то мѣсячное жалованье всѣхъ конныхъ будетъ $3x^2$ гульденовъ , а пѣхоты $10x^2$ гулд. и всѣ вообще получаютъ они $13x^2$ гульденовъ , что должно быть равно числу 13000 гулд.

И такъ когда $13x^2 = 13000$, то будетъ $x = 1000$ и $x = 10$. Столько было офицеровъ.

718.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ сдѣлали компанію. Положивъ каждой въ 100 разъ

разъ больше, нежели ихъ число компанію составляющее, съ сею суммою посылають они фактора въ Венецію, которой на каждые 100 флореновъ выигралъ въ двое больше, нежели число ихъ; а возвратившись назадъ привезъ барыша 2662 флор. спрашивается сколько купцовъ было?

Пусть будетъ x число купцовъ, то каждой изъ нихъ положилъ 100 x флор. и весь капиталъ былъ $100xx$ флор: и когда на каждые 100 флор. получено барыша $2x$ флор., то весь выигрышъ былъ $2x^2$ флор., что должно быть равно 2662 флор. слѣд. $2x^2 = 2662$ и $x^2 = 1331$, откуда $x = 11$. Столько было купцовъ.

719.

Вопросъ. Одна крестьянка промѣниваетъ сыръ на курицъ, давая 2 сыра за каждыя 3 курицы: куры несутъ яица, каждая $\frac{1}{3}$ противу числа всѣхъ куръ. Съ сими яицами пошла она на рынокъ, и продаетъ каждые 9 яицъ за столько пфенинговъ, сколько курица снесла яицъ, а выручила всѣхъ денегъ 72 пфенинга; спрашивается, сколько сыровъ у нее было?

По-

Положи число сыровъ было x , то промѣняла она ихъ за $\frac{1}{2}x$ курицы, когда каждая курица кладетъ $\frac{1}{4}x$ яицъ, то число всѣхъ яицъ было $\frac{1}{4}xx$: теперь продаетъ она каждые 9 яицъ за $\frac{1}{4}x$ пфенинговъ; слѣд. всего на все выручила она $\frac{1}{4}x^2$ пфен., что 72 равно бытъ долженствуешь. И такъ $\frac{1}{4}x^2=72$, и $x^2=72 \cdot 4=8 \cdot 8 \cdot 9=8 \cdot 8 \cdot 27$; по чему $x=12$. Столько сыровъ у крестьянки было, кои она промѣняла за 18 куриць.

Г Л А В А XI.

О разрѣшеніи полныхъ кубическихъ уравненій.

720.

Полное кубическое уравненіе называется, въ которомъ сверхъ куба неизвѣстнаго числа, еще его квадраць и самое неизвѣстное число находится. Общая формула такого уравненія есть $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, то есть когда всѣ члены перенесутся на одну сторону. А какимъ образомъ изъ такого уравненія величины x находятся, которыя также и корни уравненія именуются, показано будетъ въ

въ сей главѣ; ибо здѣсь можно уже знать напередъ, что такое уравненіе всегда ; корня имѣеть, по причинѣ въ прежней главѣ о чистыхъ уравненіяхъ сея степени показанной.

721.

Съ самаго начала рассмотримъ сіе уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; когда квадратное уравненіе почитается за произведение изъ двухъ множителей, то сіе кубическое можно почестъ за произведение изъ трехъ множителей, которые въ семъ случаѣ будутъ :

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, кои умножены будучи между собою производятъ прежнее уравненіе; ибо $(x-1)(x-2) = xx - 3x + 2$, и сіе умножа еще на $(x-3)$, въ произведеніи дастъ $x^3 - 6xx + 11x - 6$ прежнее заданное уравненіе, которое равно 0 быть должно; что учинится, когда произведение $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ будетъ; а сіе здѣлается ежели только одинъ изъ 3хъ множителей будетъ 0; и слѣд. въ трехъ случаяхъ; первое, когда $x-1=0$, или $x=1$; второе, когда $x-2=0$, или $x=2$; третіе, когда

когда $x-3=0$, или $x=3$. Сверхъ сего видно, что какое бы другое число вмѣсто x положено ни было, ни одинъ изъ сихъ трехъ множителей не будетъ 0, слѣд. также и произведеніе; откуда видно, что уравненіе наше никакихъ другихъ корней не имѣетъ кромѣ сихъ трехъ.

722.

Естьли бы можно было въ каждомъ другомъ случаѣ опредѣлить сихъ трехъ множителей уравненія, то бы изъ ихъ нашлись потчасъ при корня онаго. На сей конецъ рассмотримъ мы при такіе множителя вообще, кои пусть будутъ $x-p$, $x-q$, $x-r$: найди ихъ произведеніе, и поелику первой умноженной на втораго даетъ $xx-(p+q)x+pq$, то сіе произведеніе умноженное на $x-r$ произведетъ слѣдующую формулу:

$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr$,
которая ежели должна быть 0, то сіе учинится только въ трехъ случаяхъ; I)
 $x-p=0$ или $x=p$; II) $x-q=0$, или $x=q$;
III) $x-r=0$ или $x=r$.

723.

Пусть сіе уравненіе теперь изобразится такъ: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, и ежели корни онаго будутъ I) $x = p$; II) $x = q$; III) $x = r$, то должно быть $a = p + q + r$, $b = pq + pr + qr$; и 3) $c = pqr$, откуда видно, что второй членъ содержитъ сумму всѣхъ трехъ корней, третій членъ сумму произведеній каждыхъ двухъ корней помноженныхъ между собою, и послѣдней членъ произведеніе всѣхъ трехъ корней умноженныхъ между собою. Сіе послѣднее свойство показываетъ намъ, что кубическое уравненіе подлинно никакого другаго рациональнаго корня имѣть не можетъ, какъ только того, на котораго послѣдней членъ дѣлится; ибо когда онъ есть произведеніе изъ всѣхъ трехъ корней, то долженъ онъ непремѣнно дѣлиться на cadaго изъ нихъ. И такъ потчасъ узнать можно, какими числами помянутое дѣленіе пробовать должно, ежели пожелаешь узнать одинъ только корень.

Для изъясненія сего рассмотримъ мы уравненіе $x^3 = x + 6$ или $x^3 - x - 6 = 0$,
когда

когда оно никакого другаго раціональнаго корня не имѣеть, кромѣ того, на которой послѣдней членъ б дѣлился, то пробу чинить надлежитъ съ сими только числами 1, 2, 3, 6

которыя пробы стоятъ въ такомъ порядкѣ:

- I) когда $x=1$, то будетъ $1-1-6=-6$
 II) когда $x=2$, то будетъ $8-2-6=0$
 III) когда $x=3$, то будетъ $27-3-6=18$
 IV) когда $x=6$, то будетъ $216-6-6=204$

Отсюда усматриваемъ мы, что $x=2$ есть корень предложеннаго уравненія, изъ коего уже оба другіе легко найти можно; ибо когда $x=2$ есть корень, то $x-2$ будетъ множитель уравненія; чего ради надлежитъ только сыскать другаго множителя, что учинится слѣдующимъ дѣленіемъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3-x-6x^2+2x+3} \\
 \underline{x^3-2x^2} \\
 2x-x \\
 \underline{2x^2-4x} \\
 +3x-6 \\
 \underline{+3x-6} \\
 0
 \end{array}$$

Понеже формула наша изъяснена быть можетъ симъ произведеніемъ $(x-2)(x^2+2x+3)$, то она будеть 0, не только когда $x-2=0$; но и когда $x^2+2x+3=0$, а отсюда имѣемъ мы $x^2=-2x-3$, то есть $x=-1 \pm \sqrt{-2}$ оба другіе корня нашего уравненія, кои, какъ видно, суть невозможныя, или мнимыя.

724.

Но сіе имѣеть тогда только мѣсто, когда первой членъ уравненія x^3 на 1, а прочіе члены на цѣлыя числа помножены; естли же въ данномъ уравненіи случашся дроби, то имѣемъ мы средство превращать сіе уравненіе въ другое, въ коемъ дробей не находится, и тогда проба учинена съ нимъ быть можетъ какъ и прежде.

Пусть будеть дано уравненіе $x^3-3xx+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0$, понеже здѣсь четверти находящся, то положи $x=\frac{y}{2}$, и получится $\frac{y^3}{8}-\frac{3y}{4}+\frac{11y}{8}-\frac{3}{4}=0$, что помноживъ на 8 будеть $y^3-6yy+11y-6=0$, коего корни суть, какъ мы прежде уже видѣли $y=1$, $y=2$, $y=3$; слѣд. въ нашемъ уравненіи I) $x=\frac{1}{2}$; II) $x=1$; III) $x=\frac{3}{2}$.

725.

725.

Когда первой членъ въ уравненіи умноженъ будетъ на какое нибудь число, а послѣдней будетъ 1, какъ въ семь уравненіи $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$, откуда чрезъ дѣленіе на 6 происходитъ

$x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$, которое по прежнему правилу отъ дробей освобождается, положивъ $x = \frac{y}{216}$, ибо тогда выйдетъ $\frac{y^3}{216} - \frac{11y^2}{216} + \frac{y}{216} - \frac{1}{216} = 0$, что умноживъ на 216 выйдетъ $y^3 - 11y^2 + 36y - 36 = 0$, но здѣсь трудно бы было дѣлать пробу со всѣми дѣлителями числа 36, а понеже въ первомъ уравненіи послѣдней членъ $= 1$, то положи $x = \frac{1}{2}$ и будетъ $\frac{1}{8} - \frac{11}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0$, что умноживъ на x^3 произойдетъ $6 - 11x + 6x^2 - x^3 = 0$ и перенеся всѣ члены на другую сторону будетъ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, коего корни суть $x = 1 = 2 = 3$; слѣд. въ нашемъ уравненіи будетъ $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

726.

Изъ вышепоказаннаго явствуетъ, что когда всѣ корни будутъ положительныя, знаки $+$ и $-$ въ уравненіи перемѣняются,

И 3

и

и тогда имѣеть оно такой видъ $x^2 - ax + bx - c = 0$, гдѣ при перемѣнѣ знаковъ находящяся, то есть, столько же, сколько оно имѣеть положительныхъ корней. Еслили же бы были всѣ три корня отрицательные, и помножены были между собою сіи три множителя $x + p$, $x + q$, $x + r$, то при всѣхъ бы членахъ находилъ знакъ $+$, а уравненіе такую бы формулу имѣло $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, гдѣ 3 раза 2 одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ, то есть столько же, сколько уравненіе имѣеть отрицательныхъ корней.

Изъ сего выведено сіе слѣдствіе, сколь часто въ уравненіи знаки перемѣняются, столько положительныхъ корней оно имѣеть, и сколь часто одинакіе знаки другъ за другомъ слѣдуютъ, столько оно отрицательныхъ корней имѣеть. Сіе примѣчаніе здѣсь весьма важно, дабы познать, положительные или отрицательные дѣлители послѣдняго члена; съ которыми проба дѣлается, брать должно.

727.

Для изъясненія сего рассмотримъ сіе уравненіе:

$x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, въ которомъ двѣ переменны знаковъ, и одно только слѣдствіе того же знака находится, откуда мы заключаемъ, что сіе уравненіе имѣетъ два положительные, и одинъ отрицательный корень, кои должны быть дѣлители послѣдняго члена 56, и слѣд. содержатся между числами $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$.

Если положится $x = 2$, то будетъ $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, откуда видимъ, что $x = 2$ есть корень положительной, и слѣд. $x - 2$ дѣлитель нашего уравненія, откуда оба прочіе корня легко найти можно, если только уравненіе раздѣлится на $x - 2$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-2 \overline{) x^3 + xx - 34x + 56} \quad x^2 + 3x - 28 \\
 \underline{x^3 - 2xx} \\
 3xx - 34x \\
 \underline{3xx - 6x} \\
 -28x + 56 \\
 \underline{-28x + 56} \\
 0
 \end{array}$$

И 4

и

И такъ сіе частное $xx + 5x - 28 = 0$ положивъ, найдутся отсюда оба другіе корня, кои будутъ $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{11}{2}$, слѣд. оба послѣдніе корня будутъ $x = 4$ и $x = -7$, къ чему еще надлежитъ взять прежней $x = 2$.

Отсюда явствуется, что въ заданномъ уравненіи дѣйствительно два положительныя и одинъ отрицательной корни содержатся, что слѣдующими примѣрами изъяснить мы намѣрены.

728.

Вопросъ. Сыскать два числа, коихъ разность 12, и ежели произведеніе ихъ помножится на ихъ сумму, тобъ вышло 14560.

Положивъ меньшее число x , большее будетъ $x + 12$, произведеніе ихъ $xx + 12x$, которое умножено будучи на $2x + 12$ даетъ $2x^2 + 36xx + 144x = 14560$, раздѣливъ на 2, будетъ $x^2 + 18xx + 72x = 7280$.

Понеже послѣдней членъ 7280 такъ великъ, что пробы съ нимъ мы учинить не можемъ, то видя что онъ дѣлится на 8, положи $x = 2y$ и выдетъ $8y^2 + 72$

yy

$yy + 144y = 7280$; сіе уравненіе раздѣливъ на 8 выдетъ $y^2 + 9yy + 18y = 910$, и теперь можно учинить пробу съ дѣлителями числа 910, которые суть 1, 2, 5, 7, 10, 13 и проч. числа 1, 2, 5 суть дѣйствительно малы, для того возми $y = 7$ и получится $343 + 441 + 126$ точно $= 910$, слѣд. одинъ корень $y = 7$ и $x = 14$, а естьли кто хочетъ знать и оба прочіе корня, то раздѣли $y^2 + 9y^2 + 18y - 910$ на $y - 7$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 y-7 \overline{) y^3 + 9y^2 + 18y - 910} \left| y^2 + 16y + 130 \right. \\
 \underline{y^3 - 7y^2} \\
 + 16y^2 + 18y \\
 \underline{+ 16y^2 - 112y} \\
 130y - 910 \\
 \underline{130y - 910} \\
 0
 \end{array}$$

Ежели положится сіе частное $y^2 + 16y + 130 = 0$, то будетъ $yy = -16y - 130$, откуда $y = -8 \pm \sqrt{-66}$, то есть оба прочіе корня суть невозможныя.

Отвѣтъ. Оба искомые числа будутъ 14 и 26, коихъ произведеніе 364 умноженное на ихъ сумму 40 даетъ 14560.

729.

Вопросъ. Найдти два числа, коихъ разность 18 и разность ихъ кубовъ умноженная на сумму чиселъ производить число 275184?

Меншее число пусть будетъ x , а большее $x+18$, кубъ меньшаго x^3 , большаго $x^3+54xx+972x+5832$ разность ихъ $=54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$, которая умножена будучи на сумму чиселъ $2x+18=2(x+9)$ въ произведеніи дастъ 108 ($x^3+27xx+270x+972$) $=275184$, раздѣли на 108, получится $x^3+27xx+270x+972=2548$, или $x^3+27xx+270x=1576$. Дѣлители числа 1576 суть 1, 2, 4, 8 и проч. изъ коихъ 1 и 2 малы, когда же положится 4 вмѣсто x , то уравненіе разрѣшится, а для снисканія обоихъ прочихъ корней должно уравненіе раздѣлить на $x-4$ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-4 \overline{) x^3+27xx+270x-1576} \quad \left| \begin{array}{l} x^3+31x+394 \\ x^3-4xx \\ \hline 31xx+270x \\ 31xx-124x \\ \hline 394x-1576 \\ 394x-1576 \\ \hline \end{array} \right. \\
 \hline
 \end{array}$$

Изъ

Изъ сего частнаго получится $xx = -31x - 394$, а отсюда $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$, которые оба суть невозможны.

Отвѣтъ. Искомыя числа суть 4 и 22.

730.

Вопросъ. Найти два числа, коихъ разность 720, и ежели квадратной корень изъ большаго числа умножится на меньшее, то бы вышло 20736?

Меньшее число пусть будетъ x , а большее $x + 720$. и $x\sqrt{x + 720} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81$; возми теперъ съ обѣихъ сторонъ квадраты, то будетъ $x^2(x + 720) = x^2 + 720xx = 8^3 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, положи $x = 8y$, то выдетъ $8^3y^3 + 8^3 \cdot 720 \cdot yy = 8^3 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, раздѣли на 8^3 , будетъ $y^3 + 90y^2 = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, положи $y = 2z$, выдетъ $8z^3 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, раздѣли на 8, будетъ $z^3 + 45zz = 4^2 \cdot 81^2$; положи $z = 9u$, выдетъ $9^3u^3 + 45 \cdot 9^2 \cdot uu = 4^2 \cdot 9^4$,

раздѣли на 9^3 будетъ $u^3 + 5uu = 4^2 \cdot 9$ или $uu(u + 5) = 16 \cdot 9 = 144$. Здѣсь видно, что $u = 4$; ибо тогда $uu = 16$, и $u + 5 = 9$, откуда $z = 36$, $y = 72$, и $x = 576$, которое есть меньшее число, больше же $= 1296$,

кого

кого квадратной корень 36 умноженной на 576 даетъ число 20736.

731.

Примѣчаніе. Сей вопросъ способѣе разрѣшиться можетъ симъ образомъ. Поже большее число должно быть квадратъ, въ противномъ случаѣ корень его умноженной на меньшее число не произведъ бы заданнаго числа.

Пусть будетъ большее число xx , а меньшее $xx-720$, которое на квадратной корень большаго числа, т. е. на x умноженное даетъ $x^2-720x=20736=64.27.12$, положи $x=4y$, то будетъ $64y^2-720.4y=64.27.12$, раздѣли на 64, выдѣтъ $y^2-45y=27.12$, положи еще $y=3z$, и будетъ $27z^2-135z=27.12$, раздѣли на 27, выдѣтъ $z^2-5z=12$, или $z^2-5z-12=0$. Дѣлители 12 пи суть 1, 2, 3, 4, 6, 12, изъ коихъ 1 и 2 очень малы, а когда положится $z=3$, то выдѣтъ $27-15-12=0$, слѣд. $z=3$, $y=9$ и $x=36$, и такъ большее число $xx=1296$, а меньшее $xx-720=576$, какъ и прежде.

732.

Вопросъ. Найти два числа, которыхъ разность $= 12$, и когда разность сія помножится на сумму ихъ кубовъ, тобы вышло 102144?

Положивъ меньшее число x , большее будетъ $x+12$, кубъ перваго $= x^3$, а другаго $x^3+36xx+432x+1728$, сумма ихъ умноженная на 12 дастъ 12 ($2x^3+36xx+432x+1728$) $= 102144$, раздѣли на 12, выдѣтъ $2x^3+36xx+432x+1728=8512$ раздѣли на 2 выдѣтъ $x^3+18xx+216x+864=4256$,

или $x^3+18xx+216x=3392=8 \cdot 8 \cdot 53$. Положи $x=2y$ и раздѣли на 8, будетъ, $y^3+9yy+54y=8 \cdot 53=424$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 8, 53 и прощя. изъ коихъ 1 и 2 очень малы, естли же положится $y=4$, то будетъ $64+144+216=424$, слѣд. $y=4$ и $x=8$, по чему оба искомыя числа суть 8 и 20.

733.

Вопросъ. Въ нѣкоторой купеческой компаніи кладетъ каждой въ 10 разъ столько флореновъ, сколько людей въ компаніи; полу-

получаютъ на каждые 100 флор. барыша 6 флор. больше, нежели ихъ число, напослѣдокъ нашлось, что весь барышъ былъ 392 флор.; спрашивается сколько товарищей было?

Положи число товарищей было x , то каждой въ компанію положилъ 10 x флореновъ, а всѣ вмѣстѣ положили 10 xx флор.; на каждые 100 флореновъ изъ сей суммы выигрываютъ они 6 флореновъ больше, нежели сколько ихъ въ компаніи находились; слѣд. на 100 флор. получаютъ барыша $x+6$ флор. и на весь ихъ капиталъ получаютъ они $\frac{x^2+6xx}{10}=392$.

Умножь на 10, и выйдетъ $x^2+6xx=3920$, положи $x=2y$, то получится $8y^2+24yy=3920$ раздѣливъ на 8 выйдетъ $y+3yy=490$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 5, 7, 10 и проч. изъ коихъ 1, 2 и 5 очень малы, когда же положится $y=7$, то выйдетъ $343+147=490$, слѣд. $y=7$ и $x=14$.

Отвѣтъ. Число товарищей было 14, и каждой положилъ 140 флореновъ.

734.

Вопросъ. Нѣсколько купцовъ имѣютъ вмѣстѣ капиталъ изъ 8240 талеровъ состоящей, въ которую сумму каждой положилъ еще въ 40 разъ больше талеровъ, нежели число товарищей; сею суммою выигрываютъ они столько процентовъ, сколько товарищей было: по томъ раздѣливъ сей выигрышъ взявъ, каждой 10 разъ столько талеровъ сколь велико ихъ число было, и наконецъ осталось еще 224 талера, спрашивается сколько всѣхъ купцовъ было?

Положи число ихъ $=x$, то каждой изъ нихъ кладетъ $40x$ талеровъ къ общему капиталу 8240 тал. слѣд. всѣ вмѣстѣ положатъ $40xx$ талер.; по чему вся сумма была $40xx+8240$, которую выигрываютъ они на каждые 100 талер. x талер. слѣд. весь выигрышъ будетъ $\frac{40x^2}{100}$
 $+\frac{8240x}{100}=\frac{4x^2}{10}+\frac{824x}{10}=\frac{2}{5}x^2+\frac{412x}{5}$; изъ сего числа беретъ каждой $10x$ талер. слѣд. всѣ вмѣстѣ возмуть $10xx$ талер. и останется еще 224 талер., откуда явствуется что весь выигрышъ былъ $10xx+224$, чего ради получимъ мы уравненіе $\frac{2}{5}x^2+\frac{412x}{5}$
 $=10xx$

$= 10xx + 224$, которое раздѣливъ на 2 и помноживъ на 5 выйдетъ $x^3 + 206x = 25xx + 560$ или $x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0$. Чтожъ касается до пробы, то первая формула гораздо къ тому способнѣе. Понеже дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, и пр., которыя должны быть положительныя числа, по тому, что въ послѣднемъ уравненіи находится 3 переменны знаковъ; а опшуда заключить можно, что всѣ три корня должны быть положительные.

Ежели проба учинится съ числами $x=1$ и $x=2$, то явно, что первая часть будетъ гораздо меньше, нежели вторая: чего ради спанемъ пробовать слѣдующія числа:

когда $x=4$; то будетъ $64 + 824 = 400$
 $+ 560$ несходно;

когда $x=5$, то будетъ $125 + 1030 = 625$
 $+ 560$ несходно;

когда $x=7$, то будетъ $343 + 1442 = 1225$
 $+ 560$ сходно, слѣд. $x=7$ есть корень нашего уравненія; а что бы сыскать и другіе два, то раздѣли послѣднюю формулу на $x-7$, какъ слѣдуетъ:

$x-7$

$$\begin{array}{r}
 x-7) x^3-25xx+206x-560) x^3-18x+80 \\
 \underline{x^3-7xx} \\
 -18xx+206x \\
 \underline{-18xx+126x} \\
 +80x-560 \\
 \underline{80x-560}
 \end{array}$$

Сіе найденное частное положи $=0$, и будетъ $xx-18x+80=0$, или $xx=18x-80$, откуда $x=9\pm1$, по чему другіе оба корня суть $x=8$ и $x=10$.

Отвѣтъ. На сей вопросъ найдены 3 отвѣта: по первому рѣшенію число купцовъ было 7; по второму 8; а по третьему 10, какъ всѣхъ ихъ трехъ присовокупленная здѣсь проба показывается.

число купцовъ	I	7	II	8	III	10
каждой кладетъ 40x		280		320		400
всѣ вмѣстѣ кладутъ 40xx—		1950		2560		4000
старой капиталъ		8240		8240		8240
весь капиталъ 40xx } +8240 }		10200		10800		12240
симъ выиграно столько } процентовъ, сколько то- } варищей		714		864		1224
изъсего каждой беретъ 10x—		70		80		100
всѣ взяли 10xx —		190		640		1000
и такъ еще останется.		224		224		274

*Г Л А В А XII.**О правилѣ Кардана, или Сциліона Феррея.*

755.

Ежели какое нибудь кубическое уравненіе приведено будетъ въ цѣлыя числа, какъ уже выше сего показано, и ни одинъ дѣлиТЕЛЬ послѣдняго члена корнемъ уравненія быть не можетъ, то сіе значить, что уравненіе не имѣетъ ни какого корня ни въ цѣлыхъ числахъ, ни въ дробяхъ, что можетъ быть показано такъ:

Пусть будетъ уравненіе $x^3 - axx + bx - c = 0$; гдѣ a , b и c суть цѣлыя числа, и гдѣ ни одна дробь величиною x быть не можетъ; ибо естлибъ положено было $x = \frac{1}{2}$, то вышлобъ $\frac{1}{8} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c$; здѣсь имѣетъ только первой членъ знаменателя 8, прочіе же раздѣлены только на 4 и 2, или суть цѣлыя числа, кои слѣд. съ первымъ не могутъ быть $= 0$, что должно думать и о всѣхъ прочихъ дробяхъ.

756.

По елику въ сихъ случаяхъ корни уравненія ни цѣлыя числа, ни дроби быть
не

не могутъ, то должны они быть неизвлекаемые, также и невозможные. Какимъ образомъ ихъ изъяслять надлежитъ и чѣмъ за знаки коренные въ такомъ уравненіи случаются, есть дѣло великой важности, коихъ изобрѣтеніе уже за нѣсколько сотъ лѣтъ приписано было Кардану, или наипаче Сципиону Феррею, что здѣсь обстоятельно изъяснить надобно.

737.

На сей конецъ надлежитъ здѣсь обстоятельнѣе разсмотрѣть натуру куба, коего корень состоитъ изъ двухъ частей. Такъ пусть будетъ корень $a + b$, то кубъ его $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, которой состоитъ изъ кубовъ каждой части, и сверхъ того имѣетъ еще два средніе члена, то есть, $3aab + 3abb$, которые оба имѣютъ множителемъ $3ab$, другой же множитель есть $a + b$; ибо $3ab$ умноженные на $a + b$, даютъ $3aab + 3abb$, по чему сии два члена содержатъ утроенное произведеніе обѣихъ частей a и b на сумму ихъ помноженное.

I 2

738.

738.

Положи $x = a + b$, и возми съ обѣихъ сторонъ кубы, будетъ $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, и когда $a + b = x$, то получится сіе кубическое уравненіе $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$, или $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, о которомъ мы знаемъ, что одинъ его корень есть $x = a + b$; слѣд. когда бы такое уравненіе ни случилось, корень его означить мы можемъ.

Пусть будетъ напр. $a = 2$ и $b = 3$, то выйдетъ уравненіе $x^3 = 18x + 35$, въ коемъ мы заподлинно знаемъ, что $x = 5$ есть его корень.

739.

Положи еще $a^3 = p$ и $b^3 = q$, то будетъ $a = \sqrt[3]{p}$ и $b = \sqrt[3]{q}$, слѣд. $ab = \sqrt[3]{pq}$; и такъ когда случится уравненіе $x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q$, коего одинъ корень есть $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = x$; но p и q всегда можно опредѣлить такъ, что какъ 3 раза $\sqrt[3]{pq}$, такъ и $p + q$ будутъ всегда равны даннымъ числамъ, и чрезъ то мы приходимъ въ состояніе разрѣшать каждое такого роду кубическое уравненіе.

740.

740.

Чего ради пусть дано будетъ сіе общее кубическое уравненіе $x^3 = fx + g$; въ семь случаѣ f должно сравнивать съ $3\sqrt[3]{pq}$, а g съ $p+q$, или p и q , такъ опредѣлить надлежитъ чѣмъ $3\sqrt[3]{pq}$ числу f , а $p+q$ числу g равны были, и тогда узнаемъ мы, что корень уравненія нашего будетъ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

741.

Слѣдовательно надлежитъ разрѣшить сіи два уравненія I) $3\sqrt[3]{pq} = f$; II) $p+q = g$. Изъ перваго получится $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ а $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ и $4pq = \frac{4}{27}f^3$; изъ другаго уравненія взявъ его квадратъ выдѣтъ $pp + 2pq + qq = gg$, откуда вычти $4pq = \frac{4}{27}f^3$, выдѣтъ $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$, извлечки квадратной корень, и будетъ $p - q = \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$ и понеже $p+q = g$, то будетъ $2p = g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$, $2q = g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}$ отсюда получаемъ мы $p = \frac{g + \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$ и $q = \frac{g - \sqrt{gg - \frac{4}{27}f^3}}{2}$.

742.

И такъ если случится кубическое уравненіе $x^3 = fx + g$, какія бы числа f и g

g ни были, то корень его всегда будетъ

$$x = \sqrt[3]{g + \frac{gg - \sqrt[4]{f^3}}{2}} + \sqrt[3]{g - \frac{gg - \sqrt[4]{f^3}}{2}} \text{ оп-}$$

куда явствуетъ, что сія неизвѣстность содержитъ въ себѣ не только знакъ квадратнаго корня, но также и кубическаго; и сія формула есть самое то, что обыкновенно Кардановымъ правиломъ называется.

743.

Сію формулу изъяснимъ нѣсколькими примѣрами.

Пусть будетъ $x^3 = 6x + 9$, то видно что $f=6$, $g=9$, $gg=81$, $f^3=216$, $\sqrt[4]{f^3}=32$, слѣд. $gg - \sqrt[4]{f^3}=49$, и квадратной корень изъ $gg - \sqrt[4]{f^3}=7$; и такъ предложеннаго уравненія корень $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, то есть, $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$, или $x = 2 + 1 = 3$.

744.

Пусть еще дано будетъ уравненіе $x^3 = 3x + 2$, то будетъ $f=3$, $g=2$, $gg=4$, $f^3=27$, $\sqrt[4]{f^3}=4$ слѣд. квадратной корень изъ $gg - \sqrt[4]{f^3}=0$, по чему корень будетъ $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}}$ $x = 1 + 1 = 2$.

745.

745.

Но такое уравненіе имѣетъ хотя и рациональной корень, однакожь часто случается, что его по сему правилу найти не можно, хотя помянутой корень въ немъ и содержится.

Пусть дано будетъ уравненіе $x^3 = 6x + 40$, гдѣ корень $x = 4$. Здѣсь $f = 6$, $g = 40$, $gg = 1600$ и $\frac{1}{27}f^3 = 32$; слѣд. $gg - \frac{1}{27}f^3 = 1568$ и $\sqrt[3]{(gg - \frac{1}{27}f^3)} = \sqrt[3]{1568} = \sqrt[3]{4 \cdot 4 \cdot 49} = 28\sqrt[3]{2}$; по чему корень $x = \sqrt[3]{\frac{20 + 28\sqrt[3]{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{20 - 28\sqrt[3]{2}}{2}}$, или $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt[3]{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt[3]{2})}$, которая формула дѣйствительно равна 4, хотя сего и не видно; ибо когда кубъ $2 + \sqrt[3]{2}$ есть $20 + 14\sqrt[3]{2}$, то обратно корень кубичной изъ $20 + 14\sqrt[3]{2}$ есть $2 + \sqrt[3]{2}$; и такимъ же точно образомъ $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt[3]{2})} = 2 - \sqrt[3]{2}$, откуда корень нашъ $x = 2 + \sqrt[3]{2} + 2 - \sqrt[3]{2} = 4$.

746.

Можно сказать противу сего правила, что его не во всѣхъ кубичныхъ уравненіяхъ употреблять можно, по тому что въ немъ квадрата x не находится,

I 4

или

или для того, что въ немъ недостаетъ втораго члена. Въ семъ случаѣ знать надлежитъ, что каждое полное уравненіе всегда можно превратить въ другое, въ которомъ втораго члена не находится, и слѣдовательно тогда сіе правило употребить можно будетъ. Для изъясненія сего пусть дано будетъ полное кубическое уравненіе $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; здѣсь берется третья часть числа при второмъ членѣ находящагося, и полагается $x - 2 = y$, откуда $x = y + 2$; пропчая выкладка будетъ слѣдующая:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{положивъ } x = y + 2, & xx = yy + 4y + 4, & \\
 & x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8, & \\
 \text{будетъ } x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8 & & \\
 \quad - 6xx = & - 6yy - 24y - 24 & \\
 \quad + 11x = & + 11y + 22 & \\
 \quad - 6 = & - 6 & \\
 \hline
 0 = y^3 - y & &
 \end{array}$$

Откуда получася мы уравненіе $y^3 - y = 0$, косяго рѣшеніе легко видѣть можно; ибо разрѣшивъ сего на множителей будетъ $y(y^2 - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0$, и ежели каждой множитель положится $= 0$, то получится

$$\text{I} \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases},$$

кон суть три уже выше сего найденные корни.

747.

Пусть теперь дано будетъ сіе общее кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, изъ коего выключить надлежитъ впорой членъ.

На сей конецъ приложи къ x третью часть числа при второмъ членѣ находящагося и съ его знакомъ; а вмѣсто того напиши другую букву, напр. y , то по сему правилу получимъ мы $x + \frac{1}{3}a = y$; и $x = y - \frac{1}{3}a$, откуда произойдетъ слѣдующая выкладка:

$$x = y - \frac{1}{3}a; \quad xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa; \quad x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$$

$$\begin{aligned} \text{слѣдов. будетъ } x^3 &= y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\ &+ axx = + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\ &+ bx = + by - \frac{1}{3}ab \\ &+ c = + c \end{aligned}$$

$$y^3 - \frac{1}{3}aay + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0$$

$$+ by$$

I 5

II

И такъ вмѣсто прежняго уравненія выдѣтъ сіе, въ которомъ втораго члена не имѣется.

748.

Теперь можно Карданово правило употребить также и въ семь случаевъ; ибо прежде сего имѣли мы уравненіе $x^3 = fx + g$, или $x^3 - fx - g = 0$, то въ нашемъ примѣрѣ будетъ $f = \frac{1}{3}aa = b$, и $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$, и изъ сихъ вмѣсто буквъ f и g найденныхъ величинъ получимъ какъ и прежде

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

и ежели такимъ образомъ найдется y , то въ данномъ уравненіи будемъ мы имѣть $x = y - \frac{1}{3}a$.

749.

Помощію сей переменны въ состояніи мы найти корни всѣхъ кубическихъ уравненій, что слѣдующимъ примѣромъ изъяснить можно: пусть будетъ данное уравненіе $x^3 - 6xx + 15x - 12 = 0$, и дабы изъ него исключить второй членъ, то положи $x - 2 = y$, и будетъ

 $x =$

$$x=y+2; \quad xx=yy+4y+4; \quad x^3=y^3+6yy+12y+8;$$

$$\begin{array}{rcl} \text{слѣд. } x^3 & = & y^3+6yy+12y+8 \\ -6xx & = & -6yy-12y-8 \\ +15x & = & +15y+26 \\ -12 & = & -12 \end{array}$$

$y^3+y-2=0$, или $y^3=-y+2$, что по формулѣ $x^3=fx+g$ даетъ $f=-1$, $g=2$ и $gg=4$, $\sqrt[3]{f}=-\sqrt[3]{1}$, слѣд. $gg-\sqrt[3]{f}^3=4+1=\frac{11}{27}$, отсюда получится $\sqrt[3]{(gg-\sqrt[3]{f}^3)}=\sqrt[3]{\frac{11}{27}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{3}$, откуда слѣдуетъ $y=\sqrt[3]{\left(\frac{2+\frac{\sqrt[3]{11}}{3}}{9}\right)}$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{2-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}}{9}\right)}, \text{ или}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{1+\frac{\sqrt[3]{11}}{3}}{9}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{1-\frac{\sqrt[3]{11}}{3}}{9}\right)}, \text{ или}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{9+\sqrt[3]{11}}{9}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{9-\sqrt[3]{11}}{9}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{27+\sqrt[3]{11}}{27}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{27-\sqrt[3]{11}}{27}\right)}, \text{ или}$$

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{27+\sqrt[3]{11}}{27}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{27-\sqrt[3]{11}}{27}\right)};$$

изъ чего выдѣтъ $x=y+2$.

750.

При разрѣшеніи сего примѣра, хотя дошли мы до двоякой неизвлечекости: однако изъ сего заключать не должно, что корень дѣйствительно быть долженъ неизвлечекое число; ибо случиться можетъ, что биномъ или двучленное количество $27 \pm 6\sqrt{21}$ будетъ дѣйствительной кубъ; что самое и здѣсь случилось. Ибо кубъ половины $\frac{3+\sqrt{21}}{2} = \frac{27+42\sqrt{21}}{8} = 27 \pm 6\sqrt{21}$; слѣд. кубичной корень изъ $27 \pm 6\sqrt{21} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, а кубичной корень изъ $27 - 6\sqrt{21} = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$, по чему величина $y = \frac{1}{2}(\frac{3+\sqrt{21}}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{3-\sqrt{21}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, и когда $y=1$, то будетъ $x=3$, которое число есть корень предложеннаго уравненія; а есѣли бы захотѣлъ кто сыскать и другіе два корня, то должно бы уравненіе раздѣлить на $x-3$, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 x-3 \quad x^3-6xx+13x-12 \quad | \quad x^3-3x+4 \\
 \underline{x^3-3xx} \\
 -3xx+13x \\
 \underline{-3xx+9x} \\
 +4x-12 \\
 \underline{+4x-12}
 \end{array}$$

По-

Положивъ частное $xx - 3x + 4 = 0$,
будетъ $xx = 3x - 4$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$
 $= \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$, то есть $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$ оба послѣд-
ніе корня, которые суть невозможны.

751.

Здѣсь должно приписывать щастію,
что изъ найденныхъ биноміевъ дѣйстви-
тельно кубичной корень извлечь можно
было, что въ тѣхъ только случаяхъ дѣ-
лается, когда уравненіе имѣетъ раціональ-
ной корень, которой бы для сей причины
гораздо легче найти можно было по пра-
вилу въ прежней главѣ предписанному. А
еслили уравненіе не имѣетъ раціональна-
го корня, то не можно иначе его изъ-
явить, какъ по сему Карданову правилу,
такъ что въ томъ случаѣ никакое сокра-
щеніе уже мѣста не имѣетъ. Какъ напр.
въ уравненіи $x^3 = 6x + 4$, гдѣ $f = 6$, $g = 4$,
найдется $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$,
кого иначе изъявить не лзя.

Г Л А В А XIII.

*О разрѣшеніи уравненій четвертой степени,
кои также и биквадратные называются.*

752.

Если вышшая степень числа x будетъ четвертая, то такія уравненія называются уравненіями *четвертой степени* или *биквадратными*, коихъ общая формула есть $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Изъ сего рода уравненій сперва разсѣюпрѣтъ надлежитъ чистыя биквадратныя уравненія, которыхъ формула есть $x^4 = f$, и изъ коихъ тотчасъ корень найти можно, извлекиши только съ обѣихъ сторонъ корень четвертой степени, какъ $x = \sqrt[4]{f}$.

753.

Послику x^4 есть квадратъ изъ xx , то выкладка немало облегчится, естли сперва извлечется только квадратной корень, ибо тогда будетъ $xx = \sqrt{f}$, а потомъ извлекиши въ другой разъ тотъ же квадратной корень будетъ $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, такъ
что

что $\sqrt{f}$ ни что иное есть, какъ квадратной корень изъ квадратнаго корня f .

Ежели бы напр. уравненіе было $x^4 = 2401$, то отсюда найдется сперва $xx = 49$, а по томъ $x = 7$.

754.

Но симъ образомъ находимъ мы только одинъ корень; а послѣку каждое кубическое уравненіе оныхъ имѣеть три, то безъ сумнѣнія ихъ здѣсь должно быть 4, кои симъ образомъ найдутся. Въ послѣднемъ примѣрѣ нашли мы не только $xx = 49$, но также $xx = -49$, то явствуясь, что изъ перваго найдутся два корня $x = 7$ и $x = -7$, а изъ другаго $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ и $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, кои суть 4 корня числа 2401; то же самое должно думать и о всѣхъ прочихъ числахъ.

755.

Послѣ сихъ чистыхъ уравненій слѣдуютъ по порядку тѣ, въ которыхъ втораго и четвертаго члена не находится, или кои въ сей формулѣ содержатся: $x^2 + fxx + g = 0$, и кои по правилу квадрат-

дратныхъ уравненій разрѣшены быть могутъ. Ибо положивъ $xx=y$ будетъ $y+fy+g=0$ или $yy=-fy-g$ откуда найдется $y=-\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2-g\right)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2-g\right)}$ и поелюку $xx=y$, то отсюда будетъ $x=\pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2-g\right)}}{2}\right)}$, гдѣ двойные знаки $\pm$ покажутъ всѣ 4 корня уравненія.

756.

Когда же въ уравненіи всѣ члены находятся, то можно оное почестъ какъ произведеніе изъ чetyрехъ множителей. Ибо умножь сѣи 4 множителя между собою $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, то найдется слѣдующее произведеніе: $x^4-x^3(p+q+r+s)+xx(pq+pr+ps+qr+qs+rs)-x(pqr+pqs+prs+qrs)+pqrs$, которая формула не иначе о быть можетъ, какъ когда одинъ изъ сихъ 4хъ множителей будетъ 0, а сѣ въ 4хъ случаяхъ здѣлаться можетъ:

I) когда $x=p$; II) $x=q$; III) $x=r$; IV) $x=s$, кои слѣдовательно суть корни предложеннаго уравненія.

757.

Ежели мы сѣю формулу обстоятельнѣе разсмотримъ, то найдемъ, что во
впо-

второй членъ находится сумма всѣхъ 4хъ корней помноженныхъ на $-x^3$; въ третьемъ членѣ находится сумма произведеній изъ каждой двухъ корней умноженныхъ между собою и на xx ; въ четвертомъ сумма произведеній каждой трехъ корней помноженныхъ между собою и на $-x$; и наконецъ въ пятомъ и послѣднемъ находится произведеніе изъ всѣхъ четырехъ корней помноженныхъ между собою.

758.

Поселику послѣдней членъ есть произведеніе изъ всѣхъ 4хъ корней, то такое биквадратное уравненіе не можеть другого раціональнаго имѣть корня, какъ того, которой вмѣстѣ есть и дѣлитель послѣдняго члена. По сей причинѣ всѣ раціональные корни, естли только они въ уравненіи содержатся, легко найти можно, полагая только мѣсто x по порядку каждого дѣлителя послѣдняго члена, и смотря по которымъ изъ нихъ уравненіе разрѣшится; и естли хотя только одинъ такой корень найдется, какъ

Томъ II.

К

напр.

напр. $x=p$, то раздѣли уравненіе, перенеся всѣ члены на одну сторону, на $x-p$, и частное положивъ $=0$ дастъ кубическое уравненіе, которое по предписаннымъ выше сего правиламъ разрѣшить можно.

759.

Къ сему требуется, чтобъ всѣ члены состояли изъ цѣлыхъ чиселъ, и чтобъ первой членъ умноженъ былъ только на 1. А когда бы въ нѣкоторыхъ членахъ случились дроби, то должно бы было ихъ сперва исключивъ изъ уравненія, что всегда учиниться можетъ, полагая вмѣсто x число y раздѣленное на число, которое знаменателемъ дробей въ себѣ заключаетъ. Такъ когда бы дано было уравненіе $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx - \frac{1}{4}x + \frac{1}{5} = 0$, и когда въ знаменателяхъ 2 и 3 съ ихъ степенями находятся, то положи $x=\frac{y}{6}$ и будетъ $\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{1}{4}y}{6} + \frac{1}{5} = 0$, что умноживъ на 6^4 дастъ $y^4 - 3y^3 + 12yy - 16y + 72 = 0$; и еслили бы теперь кто захотѣлъ знать, имѣсть ли сіе уравненіе раціональные корни, то къ сему требуется только

класъ

класъ по порядку всѣхъ дѣлителей, числа 72 вмѣсто y , и смотрѣть когда уравненіе равно 0 будетъ.

760.

Но поелику корни уравненія какъ положительныя, такъ и отрицательныя быть могутъ, то съ каждымъ дѣлителемъ должно бы было дѣлать двѣ пробы, первую полагая его положительнымъ, а вторую отрицательнымъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что сколь часто два знака $+$ и $-$ между собою перемѣняющіяся, уравненіе имѣетъ столькожъ положительныхъ корней; а сколько разъ два одинакіе знака другъ за другомъ слѣдуютъ, столько отрицательныхъ корней уравненіе имѣетъ. И поелику въ нашемъ примѣрѣ 4 перемѣны знаковъ находящіяся, и нѣтъ ни одного слѣдствія оныхъ, того ради всѣ корни онаго суть положительные, и по сему нѣтъ нужды брать дѣлителя послѣдняго члена отрицательнаго.

761.

Пусть будетъ напр. дано уравненіе $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$; здѣсь находящіяся

К 2

ся.

ся двѣ переменны знаковъ и два слѣдствія, изъ чего вѣрно заключить можно, что сие уравненіе имѣетъ два корня положительныя, и два отрицательныя, кои всѣ должны быть дѣлители послѣдняго члена; и когда оныя суть 1, 2, 3, 4, 6, 12, то сдѣлай сперва пробу, положивъ $x=+1$, и выдетъ дѣйствительно 0, по чему одинъ корень есть $x=1$; а когда положимся еще $x=-1$, то выдетъ слѣдующее $+1-2+8+12-7=21-9=12$ и слѣд. $x=-1$ не можетъ быть корень сего уравненія. Положи еще $x=2$, то наша формула будетъ опять $=0$, по чему $x=2$ есть корень уравненія; напротивъ того $x=-2$ онымъ быть не можетъ. Положи еще $x=3$, то выдетъ $81+54-63-24+12=60$, не годится; а ежели положимся $x=-3$, то выдетъ $81-54-63+24+12=0$ и $x=-3$ есть корень уравненія; такожде найдется, что $x=-4$ будетъ корень уравненія, такъ что всѣ 4 корня суть рациональны, и такого состоянія:

I) $x=1$; II) $x=2$; III) $x=-3$; IV) $x=-4$, изъ коихъ два положительные, и два отрицательные, какъ прежнее правило показываетъ.

762.

Когда же въ уравненіи не будетъ ни одного рациональнаго корня, то симъ образомъ найти ихъ не лзя; и для того ученые думали, какимъ бы образомъ въ сихъ случаяхъ, не извлекаемые корни изъяснить можно было; и въ семъ спольщастливы были, что нашли два различные средства къ достиженію познанія такихъ корней, какого бы состоянія би-квадратное уравненіе ни было.

Но прежде нежели мы сіе средство покажемъ, не безнужно разрѣшить напередъ нѣсколько особливыхъ случаевъ, кои весьма часто съ пользою употреблены бытъ могутъ.

763.

Ежели уравненіе будетъ такого состоянія, что въ немъ числа при членахъ находящіяся такимъ же порядкомъ идутъ въ задъ, какъ и въ передъ, какъ видно въ уравненіи $x^4 + mx^3 + mxx + mx + 1 = 0$, которое вообще изображено бытъ можетъ $x^4 + max + naax + ma'x + a' = 0$, ко-

К 3
рую

рую формулу всегда почестъ можно за произведение изъ двухъ квадратныхъ множителей, кои легко опредѣлить можно. Ибо вмѣсто сего уравненія положи слѣдующее произведение $(x^2 + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, гдѣ p и q сыскать надлежитъ, чтобъ вышло прежнее уравненіе. Понеже по дѣйствительному умноженію находится.

$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)aaqx + (p+q)a^2x + a^4 = 0$, и чтобы сіе уравненіе прежнему равно было, пребудутся двѣ вещи: I) $p+q=m$; II) $pq+2=n$; слѣд. $pq=n-2$; взявъ первой квадратъ будетъ $pp+2pq+qq=mm$, изъ сего второе 4 раза взятое вычти, а имянно $4pq = 4n-8$ останется $pp-2pq+qq=mm-4n+8$, когдо квадратной корень $p-q=\sqrt{mm-4n+8}$; но $p+q=m$, по по сложению получимъ $2p=m+\sqrt{mm-4n+8}$ или $p=\frac{m+\sqrt{mm-4n+8}}{2}$; а по вычитанію $2q=m-\sqrt{mm-4n+8}$ или $q=\frac{m-\sqrt{mm-4n+8}}{2}$ а найдя p и q положи только каждого множителя $= 0$, чтобы оттуда найти величину x .

Первой $xx + pax + aa = 0$ или $xx = -pax - aa$ дастъ $x = -\frac{pa}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 a^2}{4} - aa} = -\frac{pa}{2} \pm a\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1}$ или $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{pp - 4}$

Другой множитель дастъ $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2}a\sqrt{qq - 4}$. Симъ образомъ найдутся 4 корня даннаго уравненія.

764.

Для изъясненія сего пусть дано будетъ уравненіе $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$, здѣсь $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$, слѣд. $mn - 4n + 8 = 36$, откуда квадратной корень $= 6$, чего ради получится $p = \frac{-4+6}{2} = 1$; и $q = \frac{-4-6}{2} = -5$, по чему 4 корня будутъ I) и II) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; III) и IV) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, и такъ 4 корня даннаго уравненія будутъ слѣдующія I) $x = -\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$; II) $x = -\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$; III) $x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$; IV) $x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$, изъ коихъ первые два не возможные, прочіе же два возможны; по тому что $\sqrt{21}$ такъ акуратно опредѣлить можно, какъ кто захочетъ, изобразивъ корень въ дробяхъ десятичныхъ; ибо 21 тоже что и 21,000000000, того ради извлеки отсюда квадратной корень какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r}
 21\,00\,00\,00\,00\,4,5825 \\
 \underline{16} \\
 500 \\
 425 \\
 \hline
 7500 \\
 7264 \\
 \hline
 23600 \\
 18324 \\
 \hline
 527600 \\
 458225 \\
 \hline
 69375
 \end{array}$$

поскольку $\sqrt[3]{21} = 4,5825$, то третьей корень будет почти точно $x = 4,7912$, и четвертой $x = 0,2087$, которые еще точнее вычислить можно.

Понеже четвертой корень довольно справедливъ, то есть $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$, того ради сія величина почти разрѣшитъ наше уравненіе; и такъ полага $x = \frac{1}{2}$, будетъ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}$, а должно бы быть $= 0$, что довольно съ правдою сходно.

765.

Другой случай, въ которомъ подобное сему рѣшеніе мѣсто имѣеть, есть, когда числа въ уравненіи будутъ всѣ тѣ же, какъ и въ прежнемъ, только что при второмъ и четвертомъ членахъ разные съ прежними знаки находятся. Такое уравненіе будетъ.

$x^4 - max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$, которое изъявлено бытъ можетъ слѣдующимъ произведеніемъ $(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0$, и чрезъ самое умноженіе получится $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaax - (p+q)a^3x + a^4$, которое съ прежнимъ уравненіемъ будетъ одинако, естли будетъ $p+q=m$, и $pq-2=n$, или $pq=n+2$; ибо четвертой членъ самъ по себѣ будетъ тотъ же съ прежнимъ. Возми квадратъ перваго уравненія $pp + 2pq + q^2 = m^2$, изъ сего вычти второе 4 раза взятое, т. е. $4pq = 4n + 8$ и будетъ $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$, откуда квадратной корень дастъ $p - q = \sqrt{mm - 4n - 8}$; слѣд. будетъ $p = \frac{m + \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$ и $q = \frac{m - \sqrt{mm - 4n - 8}}{2}$. Симъ образомъ нашедъ p и q первой мно-

житель дастъ сѣи два корня $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp+4)}$, а второй множитель сѣи два $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq+4)}$. Симъ образомъ найдены будутъ всѣ 4 корня уравненія предложеннаго.

766.

Пусть дано будетъ наприм. уравненіе $x^4 - 3.2x^3 + 3.8x + 16 = 0$, гдѣ $a = 2$, и $m = -3$, $n = 0$; слѣд. $\sqrt{(mm-4n-8)} = 1$, и $p = \frac{-3+1}{2} = -1$; $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, откуда два первые корня будутъ $x = 1 \pm \sqrt{5}$, а два послѣдніе $x = 2 \pm \sqrt{8}$, такъ что всѣ 4 искомые корня суть I) $x = 1 + \sqrt{5}$; II) $x = 1 - \sqrt{5}$; III) $x = 2 + \sqrt{8}$; IV) $x = 2 - \sqrt{8}$.

По сему 4 множителя нашего уравненія будутъ $(x-1-\sqrt{5}) (x-1+\sqrt{5}) (x-2-\sqrt{8}) (x-2+\sqrt{8})$, которые самымъ дѣломъ умножены будучи между собою, наше уравненіе произвести должны; ибо изъ умноженія перваго и втораго выходитъ $x^2 - 2x - 4$; изъ умноженія двухъ другихъ выходитъ $xx - 4x - 4$, и сѣи два произведенія между собою умноженные, дають $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$ точно въ нашемъ примѣрѣ предложенное уравненіе.

ГЛАВА

ГЛАВА XIV.

О Помбелліевоиъ правилѣ биквадратныхъ уравненій приводитъ въ кубичныя.

767.

Послѣку мы уже видѣли, какъ кубичныя уравненія рѣшаются по правилу Кардана, то при биквадратныхъ уравненіяхъ все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ рѣшеніе оныхъ знать обращать въ кубичныя уравненія. Ибо безъ помощи кубичнаго уравненія биквадратное разрѣшить вообще не возможно, по тому что хотя бы и нашелся одинъ корень такого уравненія, то остальные требуютъ еще кубичнаго рѣшенія. Отсюда видно, что для рѣшенія уравненій вышшихъ степеней должно знать напередъ рѣшеніе нижнихъ.

768.

На сей конецъ Италіанецъ Помбеллій за нѣсколько уже сошъ лѣтъ предъ симъ нашелъ правило, которое мы въ сей главѣ предложить намѣрены.

Пусть дано будетъ генеральное биквадратное уравненіе $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d$

$+d=0$, гдѣ буквы a, b, c и d всѣ возможныя числа значить могутъ. Теперь представить себѣ надлежитъ, что сіе уравненіе одинаково съ слѣдующимъ $(xx+\frac{1}{2}ax+p)-(qx+r)^2$, гдѣ нужно только опредѣлить буквы p, q и r , такъ чтобы вышло данное уравненіе, и приведя послѣднее сіе въ порядокъ выдесть:

$$\begin{aligned} x^2 + ax^2 + \frac{1}{2}aaxx + apx + pp \\ + 2pxx - 2qrx - rr \\ - qqxx \end{aligned}$$

Первые два члена здѣсь съ двумя первыми даннаго уравненія одинаки, а вмѣсто третьяго должно положить $\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}p-b$, откуда будетъ $qq=\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}p-b$; вмѣсто четвертаго положить должно $ap-2qr=c$, откуда $2qr=ap-c$, а вмѣсто послѣдняго надлежитъ положить $pp-rr=d$, и будетъ $rr=pp-d$ и изъ сихъ трехъ уравненій должно опредѣлить буквы p, q и r .

769.

Что бы сіе легче учинить, то возьми первое уравненіе 4жды, и будетъ $4qq=aa+8p-4b$, сіе умножь на послѣднее $rr=pp-d$, и получится $4qqrr=8p^2+(\frac{1}{2}aa-4b)$

$-4b)pp-8dp-d(aa-4b)$, возьми теперь квадратъ средняго уравненія $4qqr=aa pp-2acp+cc$, по чему будемъ мы имѣть двѣ величины для $4qqr$, которыя положивъ равными между собою, произойдетъ уравненіе $8p'+(aa-4b)pp-8dp-d(aa-4b)=aa pp-2acp+cc$ и перенеся всѣ члены на одну сторону, выдетъ $8p'-4b pp+(2ac-8d)p-aad+4bd-cc=0$, которое есть кубическое уравненіе, изъ коего въ каждомъ случаѣ величину p по выше показанному правилу опредѣлять должно.

770.

И когда изъ данныхъ чиселъ a , b , c , d найдена будетъ буква p , то довольно уже сего будетъ, чтобы найти отсюда двѣ другіе q и r ; изъ перваго уравненія будетъ $q=\sqrt{\frac{1}{4}aa+2p-b}$, а изъ другаго $r=\frac{ap-c}{2q}$. И ежели снѣ при буквы для каждаго случая уже найдены, то отсюда можно сыскать всѣ 4 корня предложеннаго уравненія слѣдующимъ образомъ.

771.

Когда данное уравненіе привели мы въ формулу $(xx+\frac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$,
то

то $(xx+ax+p)^2=(qx+r)^2$, откуда извлекши квадратной корень будетъ $xx+ax+p=qx+r$, или также $xx+\frac{1}{2}ax+p=-qx-r$.

Первое уравненіе дастъ $xx=(q-\frac{1}{2}a)x-p+r$, откуда получатся два корня, прочіе же два изъ другаго, которые есть $xx=-(q+\frac{1}{2}a)x-p-r$. Чтобы сіе правило изъяснить примѣромъ, то пусть предложено будетъ уравненіе $x^4-10x^3+35xx-50x+24=0$, которое сравнивъ съ генеральною нашею формулою, дастъ $a=-10$, $b=35$, $c=-50$, $d=24$, изъ коихъ для опредѣленія p слѣдующее уравненіе произойдетъ $8p^3-140pp+808p-1540=0$, которое раздѣливъ на 4 дастъ $2p^3-35pp+202p-385=0$. Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 5, 7, 11 и пр. здѣсь 1 мала, если ли же положится $p=5$, то выйдетъ $250-875+1010-385=0$, слѣд. $p=5$, и когда положишь $p=7$, то выйдетъ $686-1715+1414-385=0$, слѣд. $p=7$, другой корень, а что бы сыскать и третей корень, то раздѣли уравненіе на 2, и выйдетъ $p^3-\frac{35}{2}p^2+101p-\frac{385}{2}=0$, и когда число во второмъ членѣ $\frac{3}{2}$ есть сумма всѣхъ трехъ

трехъ корней, первые же 2 вмѣстѣ дѣлають 12, чего ради третей корень долженъ быть $\frac{11}{3}$. Такимъ образомъ нашли мы всѣ три корня, но довольно бы было и одного, по тому что изъ каждаго изъ нихъ четыре корня нашего биквадратнаго уравненія опредѣлиться должны.

772.

Дабы сіе показать, то пусть сперва будетъ $p=5$, откуда $q=\sqrt{(25+10-35)}=0$, $r=\frac{-50+50}{2}=-5$. Но поелику симъ образомъ ни чего опредѣлить нельзя, то возми третіе уравненіе $rr=pp-d=25-24=1$, слѣд. $r=1$; отсюда оба наши квадратныя уравненія будутъ I) $xx=5x-4$, II) $xx=5x-6$: первое дастъ сіи два корня $x=\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, или $x=\frac{5 \pm 1}{2}$, т. е. $x=4$, или $x=1$.

Другое уравненіе дастъ $x=\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, или $x=\frac{5 \pm 1}{2}$, то есть $x=3$, или $x=2$.

Естьли же положится $p=7$, то будетъ $q=\sqrt{(25+14-35)}=2$ и $r=\frac{-70 \pm 50}{2}=-5$; отсюда производятъ сіи два квадратныя уравненія: I) $xx=7x-12$; II) $xx=3x-2$, изъ коихъ первое даетъ корни

ни $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, слѣд: $x = \frac{1 \pm 1}{2}$, то есть $x = 4$, или $x = 3$, другое дастъ корни $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, слѣд: $x = \frac{1 \pm 1}{2}$ и $x = 2$, или $x = 1$, кои суть тѣ же самые 4 корня, какіе прежде найдены были, и самые тѣ же найдутся и изъ трестей величины $p = \frac{11}{2}$; ибо тогда будетъ $q = \sqrt{25 + 11 - 35} = 1$ и $r = \frac{-11 \pm 10}{2} = -\frac{1}{2}$; откуда два квадратныя уравненія.

I) $xx = 6x - \frac{16}{2}$, или $xx = 6x - 8$; II) $xx = 4x - 3$: изъ перваго получится $x = 3 \pm \sqrt{1}$, слѣд. $x = 4$, и $x = 2$; изъ другаго $x = 2 \pm \sqrt{1}$, то есть $x = 3$ и $x = 1$, копорые суть тѣ же 4 корня.

773.

Пусть дано будетъ еще сіе уравненіе $x^4 - 16x - 12 = 0$, въ которомъ $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$, по чему кубическое наше уравненіе будетъ $8p^3 - 8dp - cc = 0$; или $8p^3 + 96p - 256 = 0$, то есть $p^3 + 12p - 32 = 0$, которое уравненіе еще просіае сдѣлается положивъ $p = 2t$: ибо тогда будетъ $8t^3 + 24t - 32 = 0$, или $t^3 + 3t - 4 = 0$.

Дѣлители послѣдняго члена суть 1, 2, 4, изъ коихъ $t = 1$ есть одинъ корень, отку-

откуда $p=2$ и $q=\sqrt{4}=2$, $r=\frac{16}{4}=4$, чего ради оба квадратныя уравненія будутъ $xx=2x+2$ и $xx=-2x-6$; слѣд. корни $x=1\pm\sqrt{3}$, и $x=-1\pm\sqrt{-5}$.

774.

Для большаго изъясненія предложеннаго рѣшенія повторимъ оное снова въ слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть будетъ данное уравненіе $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$; которое должно содержаться въ формулѣ $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, гдѣ въ первой часпн положено $-5x$ для того, что -3 есть половина числа во второмъ членѣ уравненія -6 , и разрѣшивъ сію формулу выдетъ $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)xx - (6q + 2qr)x + pp - rr = 0$. Сію формулу сравнивая съ даннымъ уравненіемъ получатся I) $2p + 9 - qq = 12$, II) $6p + 2qr = 12$: III) $pp - rr = 4$: изъ перваго будетъ $qq = 2p - 3$; изъ другаго $2qr = 12 - 6p$, или $qr = 6 - 3p$; изъ третьяго $rr = pp - 4$. Помножь теперъ rr и qq между собою, получатся $qqr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$, и естли возмется квадратъ qr , то есть $qqr = 36 - 36p + 9pp$, то получится урав-

Толѣ II.

Л

неніе

неніе $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, или $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, или раздѣливъ на $2p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, коего корень $p = 2$, откуда $qq = 1$ и $q = 1$, $q' = r = 0$, и такъ уравненіе наше будетъ $(xx - 5x + 2)' = xx$, откуда квадратной корень $xx - 3x + 2 = \pm x$. Ежели мѣсто имѣетъ верхней знакъ, то выдесть $xx = 4x - 2$, естли же нижней, то $xx = 2x - 2$, откуда 4 корня найдутся $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

Г Л А В А XV.

О новомъ рѣшеніи биквадратныхъ уравненій.

775.

Какъ по прежнему правилу Помбелліа биквадратныя уравненія рѣшатся помощію кубическихъ, такъ самое тоже учинить можно по найденному послѣ того средству, которое отъ прежняго со-всѣмъ различествуетъ, и заслуживаетъ особливое изъясненіе.

776.

Положи будто бы корень биквадратнаго уравненія имѣлъ сію формулу $x = \sqrt{p} + \sqrt{q}$

$+ \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ буквы p , q и r означаютъ три корня, такого кубическаго уравненія какъ $z^3 - fzx + gz - h = 0$, такъ что $p + q + r = f$, $pq + pr + qr = g$ и $pqr = h$, сіе положивъ возми квадратъ означенной формулы $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, которой будетъ $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$, понеже $p + q + r = f$, то будетъ $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; возми еще квадратъ сего уравненія, которой будетъ $x^4 - 2xxf + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{ppqr}$, и когда $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, то перенеся его на другую сторону будетъ $x^4 - 2xxf + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}$. ($\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$) и когда $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$, а $pqr = h$, такъ что $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, то симъ образомъ получимъ мы сіе биквадратное уравненіе $x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + ff - 4g = 0$, коего корень дѣйствительно будетъ $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, гдѣ p , q и r суть три корня прежняго кубическаго уравненія.

777.

Выведенное такимъ образомъ биквадратное уравненіе, можетъ взято быть за генеральное, хотя въ немъ x^3 и не на-

ходится; ибо каждое полное уравненіе можно превратить всегда въ такое, въ которомъ втораго члена не находится, какъ мы послѣ сего покажемъ. И такъ пусть дано будетъ сіе биквадратное уравненіе $x^4 - axx - bx - c = 0$, коего найди должно корень, сравнивая его съ найденною формулою; а что бы сыскать буквы f, g, h , шо требуется, чтобъ было I) $2f = a$, т. е. $f = \frac{a}{2}$; II) $8\sqrt{h} = b$, т. е. $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$ и $h = \frac{bb}{64}$; III) $ff - 4g = -c$, или $\frac{aa}{4} - 4g = -c$, или $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, по чему $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

778.

Когда изъ предложеннаго уравненія $x^4 - axx - bx - c = 0$ найдутся буквы f, g, h , такъ что $f = \frac{a}{2}$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, и $h = \frac{1}{64}bb$, или $\sqrt{h} = \frac{b}{8}$, то опшуда здѣлай уравненіе $z^3 - fzz + gz - h = 0$, коего 3 корня по выше показанному правилу находить должно, и кои будутъ I) $z = p$; II) $z = q$; III) $z = r$, изъ коихъ по томъ, естли они найдены будутъ, корень нашего биквадратнаго уравненія выдестъ $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r}$.

779.

Хотя и кажется, что такимъ образомъ нашелся одинъ только корень нашего

го уравненія; но поелику каждой квадратной корень, какъ положительной, такъ и отрицательной знакъ при себѣ имѣть можетъ, по чему формула сія содержитъ всѣ 4 корня.

Естьли бы въ рѣшеніи всѣ переменны знаковъ допущены были, то бы вышли 8 величинъ для x , изъ коихъ однако только 4 мѣсто имѣть могутъ. При семъ примѣчать надлежитъ, что произведеніе изъ трехъ членовъ, т. е. $\sqrt{pqr}$ должно быть равно $\sqrt{h} = \frac{1}{2}b$; откуда ежели $\frac{1}{2}b$ будетъ положительное число, то и произведеніе 3хъ частей положительное, въ которомъ случаѣ только 4 переменны бытъ могутъ:

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$; III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; ежели же $\frac{1}{2}b$ будетъ число отрицательное, то 4 величины для x будутъ слѣдующіе:

I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$; II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$; III) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$; IV) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$. По сему примѣчанію въ каждомъ случаѣ могутъ опредѣлены быть всѣ 4 корня, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

780.

Пусть дано будетъ биквадратное уравненіе, въ которомъ втораго члена не находится $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$; сравнивъ его съ прежнею формулою будетъ $a = 25$, $b = -60$ и $c = 36$, откуда получится $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{25}{2} + 9 = \frac{79}{2}$; и $h = \frac{225}{4}$, слѣд. кубичное уравненіе будетъ $z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{79}{2}z - \frac{225}{4} = 0$; а что бы исключить отсюда дроби, то положи $z = \frac{u}{4}$ и будетъ $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} + \frac{79}{2} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, которое умноживъ на 64 выдешъ $u^3 - 769u - 5600 = 0$, изъ котораго при корня найти должно, кои всѣ суть положительныя; одинъ изъ нихъ $u = 9$, а что бы сыскать другіе два, то раздѣли уравненіе на $u - 9$, и выдешъ сіе новое $uu - 41u + 400 = 0$, или $uu = 41u - 400$, откуда найдешся $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2}$; слѣд. искомыя 3 корня будутъ $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, откуда получимъ мы: I) $z = \frac{9}{4}$; II) $z = 4$; III) $z = \frac{25}{4}$, и сіи суть корни буквъ p, q и r ; такъ что $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{25}{4}$; и $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$, то есть равно числу отрицательному; чего ради въ разсужденіи знаковъ корней $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ должно смотрѣть на

онос,

оное., а именно или одинъ изъ нихъ или всѣ три будутъ отрицательные. Но когда $\sqrt{p}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{q}=\frac{1}{2}$ и $\sqrt{r}=\frac{1}{2}$, то 4 корня предложеннаго уравненія будутъ:

$$I) x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$$

$$II) x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$III) x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$IV) x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}, \text{ откуда производятся}$$

сѣи 4 множителя уравненія:
 $(x-1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=0$, изъ коихъ два первые даютъ $xx-3x+2$, а два послѣдніе $xx+\frac{3}{2}x-18$, и сѣи два произведенія помноженные между собою даютъ точно наше уравненіе.

781.

Осталось еще показать, какимъ образомъ биквадратное уравненіе, въ которомъ второй членъ есть, превратить въ другое, въ которомъ бы его не было; къ сему служить слѣдующее правило.

Пусть дано будетъ сѣе генеральное уравненіе $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$, приложи къ y четвертую часть числа при второмъ членѣ находящагося $\frac{1}{4}a$, и напиши вмѣсто онаго другую букву x , такъ

Л 4

чтобъ

чтобъ $y + \frac{1}{4}a = x$, слѣд. $y = x - \frac{1}{4}a$, отсюда
будетъ $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$; $y' = x' - \frac{3}{4}axx + \frac{1}{16}aa$
 $- \frac{1}{4}a'$, и наконецъ

$$\begin{array}{rcl} y' & = & x' - ax' + \frac{1}{8}aa'xx - \frac{1}{16}a^3x + \frac{1}{32}a^4 \\ + ay' & = & + ax' - \frac{3}{4}aa'xx + \frac{1}{16}a^3x - \frac{1}{4}a^4 \\ + byy & = & + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\ + cy & = & + cx - \frac{1}{4}ac \\ + d & = & + d \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' - \frac{1}{8}aa'xx + \frac{1}{8}a^3x - \frac{1}{32}a^4 \\ + bxx - \frac{1}{2}abx + \frac{1}{16}aab \\ + cx - \frac{1}{4}ac + d \end{array} \right\} = 0$$

Гдѣ какъ видно втораго члена не находится, такъ что данное правило приемъ теперь употребивъ 4 корня x найти можно, изъ коихъ по томъ величины y сами собою означатся, ибо $y = x - \frac{1}{4}a$.

782.

Далѣ четвертой степени рѣшеніе алгебраическихъ уравненій не простирается, и всѣ старанія разрѣшать подобнымъ образомъ уравненія 5 той и вышшихъ степеней, или привести ихъ по крайней мѣрѣ въ уравненія нижнихъ степеней были тщетны, такъ что не возможно ни коимъ образомъ дать генеральнаго правила

ла находить корни вышшихъ степеней, и все что въ разсужденіи сего ни изобрѣтено, не простирается далѣе, какъ только до такихъ уравненій, гдѣ рациональной корень содержишься, которой чрезъ пробу легко найти можно, будучи извѣстно, что оной долженъ быть дѣлителемъ по слѣдняго члена, съ коимъ также точно поступать надлежитъ, какъ уже въ кубичныхъ и биквадратныхъ уравненіяхъ нами показано было.

783.

Не безнужно также здѣсь показать употребленіе сего правила въ уравненіяхъ имѣющихъ неизвлекаемые корни.

Пусть такое уравненіе будетъ $y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8$. Прежде всего надлежитъ здѣсь выключить второй членъ, для чего къ числу y приложи еще четвертую часть числа при второмъ членѣ находящагося, т. е. $y - 2 = x$ и $y = x + 2$, по чему $yy = xx + 4x + 4$; $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$

$$\begin{aligned} \text{и } y^4 &= x^4 + 8x^3 + 24xx + 32x + 16 \\ - 8y^3 &= - 8x^3 - 48xx - 96x - 64 \end{aligned}$$

Л 5

+

$$\begin{array}{rcl}
 +14yy= & +14xx+56x+56 \\
 +4y= & +4x+8 \\
 -8= & -8 \\
 \hline
 x^4 - 10xx - 4x + 8 = 0.
 \end{array}$$

Сие уравненіе сравнивь съ генеральною нашею формулою, найдется $a=10$, $b=4$, $c=-8$; откуда заключаемъ $f=5$, $g=\frac{17}{4}$, $h=\frac{1}{4}$, $\sqrt{h}=\frac{1}{2}$; изъ чего видно, что произведеніе $\sqrt{pqr}$ будетъ положительное, и по сему кубическое уравненіе должно быть $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, изъ котораго должно найти три корня p , q и r ,

784.

Въ семь случаѣ съ самаго начала должно изъ уравненія исключить дроби; положивъ $z=\frac{u}{2}$, будетъ $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, и помноживъ на 8, выдетъ $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$; гдѣ всѣ корни суть положительныя: и когда дѣлители послѣдняго члена суть 1 и 2, то положи сперва $u=1$ и будетъ $1-10+17-2=6$, и слѣд. не 0, а ежели положишь $u=2$, то выдетъ $8-40+34-2=0$; по чему $u=2$ есть одинъ корень сего уравненія; а что бы найти и другіе два, то раздѣли оное уравненіе на $u-2$ какъ слѣдуетъ: $u-2$

$$\begin{array}{r}
 u-2 \left| \begin{array}{l} u^3 - 10uu + 17u - 2 \\ u^3 - 2uu \end{array} \right| \begin{array}{l} uu - 8u + 1 \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 -8uu + 17u \\
 -8uu + 16u \\
 \hline
 + u - 2 \\
 + u - 2 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

И произойдетъ $uu - 8u + 1 = 0$, или $uu = 8u - 1$, откуда оба остальные корня $u = 4 \pm \sqrt{15}$; и когда $z = \frac{1}{2}u$, то 3 корня кубическаго уравненія будутъ: I) $z = p = 1$; II) $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$; III) $z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$

785.

Когда мы нашли p , q и r , то квадратные корни ихъ будутъ $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}{2}$;

$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{2}$; выше же сего показано

было, что квадратной корень изъ $(a \pm \sqrt{b})$, положивъ $\sqrt{(aa - b)} = c$, изображается такъ $\sqrt{\frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}}$, то въ нашемъ примѣрѣ имѣя $a = 8$ и $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$ и $b = 60$, откуда $c = 2$, получимъ мы $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$,

и

и $\sqrt[3]{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}$; и когда $\sqrt[3]{p}=1$,
 $\sqrt[3]{q}=\frac{\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}}{2}$ и $\sqrt[3]{r}=\frac{\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}}{2}$.

то четыре величины изображающія x будутъ слѣдующія, зная что ихъ произведение должно быть положительное.

$$\text{I) } x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{r}=\frac{1+\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}}{2} \\ =1+\sqrt[3]{5}$$

$$\text{II) } x=\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{r}=\frac{1-\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}-\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}}{2} \\ =-1-\sqrt[3]{5}$$

$$\text{III) } x=-\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{r}=\frac{-1+\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}-\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}}{2} \\ =-1+\sqrt[3]{3}$$

$$\text{IV) } x=-\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}+\sqrt[3]{r}=\frac{-1-\sqrt[3]{5+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{3}}}{2} \\ =-1-\sqrt[3]{5}$$

Понезже въ квадратномъ уравненіи было $y=x+2$, то 4 корня онаго будутъ:

$$\text{I) } y=3+\sqrt[3]{5}; \text{ II) } y=3-\sqrt[3]{5}; \text{ III) } y=1+\sqrt[3]{3}; \\ \text{IV) } y=1-\sqrt[3]{3}.$$

ГЛАВА XVI.

О разрѣшеніи уравненій трезъ приближеніе.

786.

Ежели уравненіе не имѣетъ раціональных корней, не смотря на то можно ли ихъ будетъ изъяснить коренными знаками, или нѣтъ, какъ въ вышнихъ уравненіяхъ дѣлается: то должно довольствоваться изобрѣщеніемъ величины чрезъ приближеніе, такъ что къ точному знаменованію оныя всегда ближе подходить можно, то есть, до тѣхъ поръ, пока погрѣшность за ничто почестся можетъ. На сей конецъ различныя изобрѣтенныя средства, изъ коихъ знатнѣйшія мы здѣсь изъяснить намѣрены.

787.

Первой способъ состоитъ въ томъ, когда величина одного корня довольно уже близко къ точности подходить, какъ напр. ежели извѣстно будетъ, что оной больше 4, а меньше 5, то тогда кладется величина сего корня $= 4 + p$, гдѣ p дѣйствительно означаетъ дробь; когда же p
бу-

будетъ дробь меньше 1, то квадратъ ea долженъ быть гораздо меньше, а кубъ a^3 и слѣдующія степени будутъ уже такъ малы, что ихъ изъ выкладки опустить можно, по тому что здѣсь ищется не самая величина a , но только ближайшая ей. И такъ когда дроби a ближайшая величина опредѣлена будетъ, то изъ того уже корень $4 + a$ гораздо точнѣе сыщется. Симъ образомъ опредѣлить можно корень еще точнѣе, употребляя предписанное дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока къ правдѣ подойдешь такъ близко, какъ пожелаешь.

788.

Сіе правило изъяснимъ мы самымъ легкимъ примѣромъ, и станемъ искать чрезъ приближеніе корень уравненія $xx=20$.

Здѣсь видно, что x больше 4хъ, а меньше 5хъ, и для того положивъ $x=4 + a$, будетъ $xx=16 + 8a + aa=20$; но поелику aa очень мало, то выпусти его изъ уравненія, чтобъ получить $16 + 8a = 20$, или $8a=4$, откуда будетъ $a=\frac{1}{2}$ и $x=4\frac{1}{2}$, которой уже къ правдѣ гораздо бли-

ближе подходить; по семъ положи еще $x = 4\frac{1}{2} + p$, то видно, что p должна быть дробь гораздо меньше прежней, и слѣд. pp съ большимъ правомъ опущено быть можетъ; по чему $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, или $9p = -\frac{1}{4}$, и $p = -\frac{1}{36}$, слѣд. $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Если бы понадобилось подойти къ правдѣ еще ближе, то положи $x = 4\frac{17}{36} + p$, и будетъ $xx = 20\frac{1}{36} + 8\frac{17}{36}p = 20$ и $8\frac{17}{36}p = -\frac{1}{36}$; умноживъ на 36 выдетъ $322p = -\frac{36}{36} = -\frac{1}{36}$, $p = -\frac{1}{36 \cdot 322} = -\frac{1}{11592}$, слѣд. $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592}$. Сіе число къ точному корню уже такъ близко подходитъ, что погрѣшность за ничто почестся можетъ.

789.

Дабы сіе показать вообще, то пусть предложено будетъ уравненіе $xx = a$, и извѣстно бы было, что x больше нежели n , а меньше нежели $n+1$; тогда положи $x = n + p$, такъ что p дробь означаетъ, и слѣд. pp какъ очень малая дробь изъ уравненія опмещается; чего ради получится $xx = nn + 2np = a$, слѣд. $2np = a - nn$ и $p = \frac{a - nn}{2n}$; по чему $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{2n + a}{2n}$, и ежели n къ правдѣ уже близко подхо-

подходило, то новая величина $\frac{n+1}{2n}$ будетъ еще ближе къ оной. Сію найденную величину положи опять вмѣсто n , и подойдешь къ правдѣ еще ближе, и когда сію положишь еще разъ вмѣсто n , то подойдешь уже несравненно ближе къ правдѣ. Симъ образомъ дѣйствіе сіе продолжать можно до тѣхъ поръ, какъ пожелаешь. Пусть будетъ наприм. $a=2$, или ищется квадратной корень изъ 2: естли уже найдена довольно блиско къ точному корню подходящая величина, которая положена n , то $\frac{n+1}{2n}$ дастъ еще точнѣйшую величину.

И пакъ пусть будетъ I) $n=1$, то будетъ $x=\frac{1}{2}$

$$\text{II) } n=\frac{1}{2} \quad - \quad - \quad - \quad x=\frac{17}{12}$$

$$\text{III) } n=\frac{17}{12} \quad - \quad - \quad - \quad x=\frac{177}{152}$$

Сія послѣдняя величина такъ блиско къ $\sqrt{2}$ подходитъ, что квадратъ ея $\frac{1112929}{166464}$ только дробью $\frac{1}{166464}$ больше 2 хъ.

790.

Подобнымъ образомъ поступать надлежитъ ежели дано будетъ кубическое, или еще вышшее уравнение.

Пусть

Пусть дано будетъ сіе кубическое уравненіе $x^3 = a$, или ищется $\sqrt[3]{a}$, и пусть оной будетъ почти n , то положи $x = n + p$, опустивъ pp и вышшую степень будетъ $x^3 = 3np + n^3 = a$ слѣдов.

$3np = a - n^3$, и $p = \frac{a - n^3}{3n}$, по чему $x = \frac{2n^3 + a}{3n}$ и ежели n уже близко къ $\sqrt[3]{a}$

подходитъ, то сія формула будетъ къ оному еще ближе, а положивъ сію новую величину вмѣсто n , будетъ къ правдѣ подходитъ несравненно ближе, и сіе дѣйствіе продолжать можно по желанію.

Пусть будетъ напри. $x^3 = 2$, или ищется $\sqrt[3]{2}$, къ коему число n уже близко подходитъ, то формула $\frac{2n^3 + 2}{3n}$ будетъ къ нему еще ближе,

положивъ I) $n = 1$ будетъ $x = \frac{4}{3}$

II) $n = \frac{4}{3}$ — — — $x = \frac{91}{27}$

III) $n = \frac{91}{27}$ — — — $x = \frac{162130896}{128634294}$.

791.

Сей способъ находить корни чрезъ приближеніе, можно употреблять съ равнымъ успѣхомъ во всѣхъ уравненіяхъ. На сей конецъ пусть дано будетъ генеральное кубическое уравненіе $x^3 + axx + bx + c = 0$, въ которомъ n уже близко къ корню его подходить; положи $x = n - p$, и когда p должна быть дробь, то pp и прочія вышшія степени онаго изъ уравненія выпустивъ получится $xx = nn - 2np$ и $x^3 = n^3 - 3nnp$, откуда происходитъ сіе уравненіе $n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, или $n + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp$ $= (3nn + 2an + b)p$, слѣдов. $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$, получимъ слѣдующее точнѣйшее знаменованіе: $x = x - \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b} = \frac{2n^3 + ann + c}{3nn + 2an + b}$; и естли сія новая величина положится опять вмѣсто n , то получится величина, которая къ правдѣ еще ближе подходить.

792.

Пусть будетъ напр. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, гдѣ $a = 2$, $b = 3$ и $c = -50$,
слѣд.

слѣд. когда n уже близко къ корню подходить, то еще ближайшая величина будетъ $x = \frac{2n^2 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$; но знаменова-
ніе $x=3$ уже довольно близко къ настоя-
щему корню подходить, того ради по-
ложи $n=3$, и получится $x = \frac{21}{11}$, и есть-
ли бы сію дробь положить еще вмѣсто
 n , то нашлася бы другая величина,
къ точному корню гораздо ближе под-
ходящая.

793.

Для вышшихъ степеней присовоку-
пимъ здѣсь сей только примѣръ $x^3 = 6x$
 $+ 10$, или $x^3 - 6x - 10 = 0$, гдѣ какъ видно 1
мала, а 2 велико. Пусть будетъ $x = n$,
ближайшей величинѣ къ искомому корню,
и положи $x = n + p$, то будетъ $x^3 = n^3$
 $+ 5n^2p$, и слѣд. $n^3 + 5n^2p = 6n + 6p + 10$,
или $5n^2p - 6p = 6n + 10 - n^3$, откуда
 $p = \frac{6n + 10 - n^3}{5n^2 - 6}$; по чему $x = \frac{4n^2 + 10}{5n^2 - 6}$, по-
ложи теперь $n = 1$, то будетъ $x = \frac{14}{-1}$
 $= -14$, копорая величина къ рѣшенію
даннаго вопроса совсѣмъ не годится, сіе
произходитъ по той причинѣ, что бли-

жайшая величина корню n , была взята очень мала; чего ради положи $n=2$ и будетъ $x=\frac{138}{74}=\frac{69}{37}$, которая дробь къ правдѣ уже гораздо ближе подходитъ, и естли бы кто похотѣлъ трудъ на себя принять, положить дробь $\frac{69}{37}$ вмѣсто n , то сыскалась бы величина къ точному корню x уже несравненно близка.

794.

Сіе обыкновенное средство находить корни уравненія чрезъ приближеніе, во всѣхъ случаяхъ съ пользою употреблять можно.

Но сверхъ сего намѣрены мы здѣсь показать еще другое средство, которое для легкости своей въ вычисленіи достойно примѣчанія. Основаніе онаго состоитъ въ томъ, что для каждаго уравненія надлежитъ сыскать рядъ чиселъ какъ: a, b, c, d и пр. которые бы были такого состоянія, что сжали каждой членъ раздѣлиться на послѣдующей; въ частномъ бы выходила величина корня тѣмъ аккуратнѣе, чемъ далѣе сей рядъ чиселъ продолжатъ будешь.

По-

Положимъ, что въ семь ряду чисель дошли мы уже до членовъ: p, q, r, s, t и пр. то $\frac{q}{p}$ должно дать корень x уже довольно аккуратень, или $\frac{q}{p}$ должно быть почти равно x ; также и $\frac{r}{q} = x$, откуда мы чрезъ умноженное получаемъ $\frac{r}{p} = xx$, и когда еще $\frac{s}{r} = x$, то такожде будетъ $\frac{s}{p} = x^3$, по томъ еще $\frac{t}{s} = x$ а $\frac{t}{p} = x^4$ и такъ далѣе.

795.

Для изъясненія сего начнемъ съ квадратнаго уравненія $xx = x + 1$. Когда въ вышепомянутомъ ряду находятся члены p, q, r, s, t и пр. то $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = xx$, и отсюда получаемъ мы уравненіе $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, или $q + p = r$, также будетъ $f = r + q$, и $t = f + r$, откуда мы познаемъ, что каждый членъ въ нашемъ ряду есть сумма двухъ предъидущихъ, по чему помянутой рядъ чисель можно продолжать такъ далеко, какъ похочется, ежели только два первые члена извѣстны будутъ, копорые можно брать по изволенію. Чего ради положивъ ихъ 0, 1, получится рядъ чисель:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, и такъ далѣе. Въ семь ряду каждой изъ отдаленныхъ членовъ раздѣленный на свой предыдущей, величину x тѣмъ точнѣе опредѣляетъ, чѣмъ далѣе рядъ продолженъ будетъ. Сначала ошибка хотя и очень велика будетъ; однако она тѣмъ меньше становится, чѣмъ далѣе рядъ продолжается. Снъ часъ отъ часу къ правдѣ приближающіяся величины для x идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{1}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{8}{13}; \frac{13}{21}; \frac{21}{34}; \frac{34}{55}; \frac{55}{89}; \frac{89}{144}$ и пр. изъ коихъ напр. $x = \frac{21}{34}$ даетъ $\frac{21}{34} = \frac{21}{34} + 1 = \frac{55}{89}$, и погрѣшность состоитъ только изъ дроби $\frac{1}{89}$, а слѣдующія дроби къ правдѣ еще ближе подходятъ.

796.

Разсмотримъ теперь также и сѣ уравненіе $xx = 2x + 1$. Понеже всегда $x = \frac{q}{r}$ и $xx = \frac{r}{p}$; то получимъ мы $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, или $r = 2p + p$. Отсюда знаемъ мы, что каждой членъ два раза взятой вмѣстѣ съ своимъ предыдущимъ даетъ слѣдующей членъ; чего ради начавъ опять съ 0, 1, получимъ слѣдующей рядъ:

0,

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 и пр. и искомая величина x слѣдующими дробями часъ отъ часу аккуратнѣе опредѣлился $x = \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{7}{9}; \frac{10}{12}; \frac{16}{18}$ и проч. кои къ точной величинѣ $x = 1 + \sqrt{2}$ всегда приближаются, а отнявъ 1, слѣдующія дроби величину $\sqrt{2}$ даютъ часъ отъ часу точнѣе $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{10}$ и проч. изъ коихъ квадрасть $\frac{9}{8} = \frac{81}{64}$, только $\frac{1}{64}$ больше нежели 2.

797.

Въ уравненіяхъ вышшихъ степеней сей способъ равнымъ образомъ употреблять можно, такъ ежели бы дано было сіе кубическое уравненіе:

$x^3 = xx + 2x + 1$, то положивъ $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ и $x^3 = \frac{s}{p}$, получится $s = r + 2q + p$; откуда видно, какъ изъ трехъ членовъ p, q и r слѣдующей находить должно, въ которомъ случаѣ начальныя числа опять взять можно по изволению, по чему будетъ у насъ сей рядъ:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 и пр. откуда за слѣдующія дроби всегда аккуратнѣе величину x опредѣляютъ:

M 4

x

$x = \frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{12}, \frac{60}{11}, \frac{120}{11}$ и пр. первыя изъ сихъ дробей ужасно разнятся отъ точнаго корня, но $x = \frac{60}{11} = \frac{15}{7}$ даетъ въ уравненіи $\frac{33^{15}}{243} = \frac{225}{27} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{33^{18}}{343}$, разность $\frac{15}{343}$.

798.

Здѣсь надлежитъ примѣчать, что не во всякомъ уравненіи сей способъ употреблять можно, особливо гдѣ втораго члена не находится, тамъ его употребить не лзя; ибо пусть будетъ напр. $xx = 2$, и положи $x = \frac{r}{p}$, и $xx = \frac{r}{p}$, то произойдетъ $\frac{r}{p} = 2$, или $r = 2p$, то есть, $r = 0q + 2p$, откуда произойдетъ сей рядъ чиселъ:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 и пр. изъ коего ни чего заключить не можно; ибо каждой послѣдующей членъ раздѣленъ будучи на свой предыдущей даетъ $x = 1$ или $x = 2$. Но снѣ неспособность отвратить можно положивъ $x = y - 1$; ибо тогда получится $yy - 2y + 1 = 2$ или $yy = 2y + 1$, и ежели здѣсь положится $y = \frac{p}{q}$ и $yy = \frac{r}{p}$, то выйдетъ выше сего найденное приближеніе.

799.

799.

Симъ же образомъ поступать надлежитъ и съ уравненіемъ $x^3=2$, изъ коего хотя такого ряда чиселъ, которой бы опредѣлялъ намъ величину x , найти и не можно; однакожь положивъ $x=y-1$, выдешъ уравненіе $y^3-3yy+3y-1=2$ или $y^3=3yy-3y+3$, въ которомъ если положить $y=\frac{q}{p}$, $yy=\frac{r}{p}$, $y^3=\frac{s}{p}$, то выдешъ $s=3r-3q+3p$; откуда видно, какъ изъ трехъ членовъ слѣдующей опредѣлять должно. Первые 3 члена взявъ по изволенію напр. 0, 0, 1, получится 0, 0, 1, 3, 6, 12, 27, 63, 144, 324 и пр. изъ коего два послѣдніе члена дають $y=\frac{144}{324}$ и $x=\frac{1}{3}$, которая дробь къ кубическому корню изъ 2 хъ довольно близко подходитъ; ибо кубъ $\frac{1}{27}=2\frac{1}{27}$, а $2=2\frac{1}{27}$.

800.

При семъ способѣ еще примѣчать надлежитъ, что когда уравненіе имѣетъ раціональные корни, и начало ряда возьмется такъ, чтобы откуда вышли сии корни, то каждой членъ онаго раздѣленъ будучи на свой предъидущей, дастъ тотъ же точно корень.

М 5

Что

Что бы сіе показать, то пусть дано будетъ уравненіе $xx = x + 2$, коего одинъ корень $x = 2$, и для составленія ряда чиселъ изъ даннаго уравненія дана будетъ формула $r = q + 2p$, и ежели начало его положится 1, 2, то получится рядъ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и пр. которой есть прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 2.

Тоже самое явствуется изъ кубическаго уравненія $x^3 = xx + 3x + 9$, котораго одинъ корень $x = 3$, и ежели начало ряда положится 1, 3, 9, то изъ формулы $s = r + 3q + 9p$ найдется рядъ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. которой будетъ опять прогрессія геометрическая имѣющая знаменателя 3.

801.

Естьли же ряда начало съ симъ корнемъ не сходно будетъ, то опшуда не слѣдуетъ, что чрезъ то всегда ближе къ нему подходить можно; ибо ежели уравненіе имѣетъ больше одного корня, то рядъ приближается всегда къ большому изъ оныхъ, а меньшаго иначе получить не лзя, какъ только когда начало ряда

точ-

точно по оному разположится. Сіе при-
мѣромъ лучше изъяснить можно.

Когда дано будетъ уравненіе $xx=4x-3$, въ коемъ два корня суть $x=1$ и $x=3$, а формула для ряда чисель $r=4q-3p$, то положи начало ряда 1, 1, то есть для меньшаго корня, и будетъ весь рядъ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, и пр. ко-
гда же начало ряда положится 1, 3, въ которомъ большей корень содержится, то весь рядъ будетъ :

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 и пр. въ кото-
ромъ всѣ члены корень 3 точно опредѣ-
ляютъ.

Еслили же начало ряда возмется по
изволенію, такъ что въ немъ меньшей ко-
рень не точно содержится, то рядъ при-
ближается всегда къ большому корню 3,
какъ изъ слѣдующихъ рядовъ видно :

Начало 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364 и пр.

— — — 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365 и пр.

— — — 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095
и пр.

— — — 2, 1, -2, -11, -38, -118, -362, -1091,
-3278 и пр.

Гдѣ

Гдѣ послѣдующіе члены раздѣлены будучи на предъидущіе всегда производятъ частныя, ближайшія большому корню, а меньшему никогда.

802.

Сей способъ можно употреблять и при такихъ уравненіяхъ, которыя бесконечно продолжаются. Въ примѣръ служить можетъ сіе уравненіе :

$$x = x + \frac{\infty-1}{x} + x + \frac{\infty-2}{x} + x + \frac{\infty-3}{x} + \dots \text{ и пр.}$$

для котораго рядъ чиселъ долженъ быть такого состоянія, чѣмъ каждой въ немъ членъ равенъ былъ суммѣ всѣхъ предъидущихъ, откуда произойдетъ рядъ 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, и пр. изъ чего видно, что самой большой корень сего уравненія будетъ точно $x=2$, что также показано быть можетъ и симъ образомъ :

$\frac{\infty}{x}$
раздѣли данное уравненіе на x , и получится

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \dots$ и протч., что производитъ геометрическую прогрессию, коей сумма $= \frac{1}{x-1}$, такъ что $1 = \frac{1}{x-1}$ будучи умножено на $x-1$ дастъ $x-1=1$ и $x=2$.

803.

803.

Сверхъ сихъ двухъ способовъ находить корни уравненія чрезъ приближеніе, есть еще и другіе, но которые по большой части или пространны, или не генеральны. Предъ всѣми такими способами заслуживаетъ преимущество съ начала изъясненной, какъ таковой, которой во всѣхъ уравненіяхъ съ желаемымъ успѣхомъ употребленъ быть можетъ; другой же напротивъ того требуетъ иногда въ уравненіи нѣкоторое пріуготовленіе, безъ котораго и употребить его нельзя, какъ уже мы въ предложенныхъ здѣсь примѣрахъ показали.

*Конецъ четвертой части объ алгебраическихъ
уравненіяхъ и ихъ рѣшеніи.*

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

о неопредѣленной аналитикѣ.

ГЛАВА I.

О разрѣшеніи такихъ уравненій, въ которыхъ больше нежели одно неизвѣстное число находится.

804.

Изъ прежняго явствуетъ, какимъ образомъ одно неизвѣстное число изъ одного уравненія, два неизвѣстныхъ изъ двухъ, три изъ трехъ, четыре изъ четырехъ и такъ далѣе опредѣлить можно; такъ что всегда пребудетъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ чиселъ опредѣлить должно, и тогда самой вопросъ будетъ опредѣленнымъ.

Еслили же изъ вопроса меньше выйдетъ уравненій, нежели сколько неизвѣстныхъ чиселъ, то будутъ нѣкоторыя изъ нихъ неопредѣленными и оставляются на наше произволеніе; по чему такіе вопросы *неопредѣленными* называются, и составляютъ

вляють особливую аналитики часть, которая *неопредѣленною Аналитикою* обыкновенно именуется.

805.

Понеже въ сихъ случаяхъ одно или больше неизвѣстныхъ чиселъ по изволенію брать можно, то имѣють здѣсь мѣсто многія рѣшенія.

Но обыкновенно присовокупляется здѣсь еще сей договоръ, чтобъ искомые числа были цѣлыя, да при томъ и положительныя или по крайней мѣрѣ раціональныя, чрезъ что число всѣхъ возможныхъ рѣшеній чрезмѣрно ограничивается, такъ что нѣкоторыя не многія хотя часто же и бесконечно многія; но кои не столь легко видѣть можно, имѣють мѣсто, а иногда и совсѣмъ ни одного не возможно: по чему сія аналитики часть совсѣмъ особливые приемы требуетъ и не мало служить къ изощренію разума начинающихъ и большее имъ проворство въ исчисленіи приносить.

806.

Начнемъ съ самаго легкаго вопроса и будемъ искать два числа, коихъ бы сумма

на равна была 10; при чемъ разумѣется, что сіи числа цѣлыя и положительныя быть должны.

Пусть онѣя числа будутъ x и y , такъ что $x + y = 10$, откуда найдется $x = 10 - y$, и такъ y иначе опредѣлить нельзя, какъ только что оно цѣлое и положительное число быть должно, и по сему можно бы было взять вмѣсто y всѣ цѣлыя числа, отъ 1 безконечно многія; но понеже x также положительнымъ быть долженъ, то y больше 10 взять нельзя, по тому что иначе былъ бы x отрицательнымъ, и когда 0 также не долженъ входить въ выкладку, то самой большой y будетъ 9, ибо въ противномъ случаѣ былъ бы $x = 0$; по чему слѣдующія только рѣшенія мѣсто имѣютъ.

Когда $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, то $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; но изъ сихъ 9 рѣшеній послѣднія 4 съ первыми 4мя одинаковы, и для того всѣхъ навсе 5 только разныхъ рѣшеній.

Если же бы потребны были 3 числа, коихъ бы сумма была 10, то надлежало бы только одно изъ найденныхъ
здѣсь

здѣсь чисель раздѣлить еще на двѣ части, откуда вышло бы большее число рѣшеній.

807.

Понеже въ семь никакой нѣтъ трудности, то приступимъ теперь къ нѣсколько трудноватымъ вопросамъ.

Вопросъ. Раздѣлить 25 на двѣ части, изъ которыхъ бы одна на 2, а другая на 3 могла раздѣлиться?

Пусть будетъ одна часть $2x$, а другая $3y$, то $2x+3y=25$, слѣдовательно $2x=25-3y$, раздѣливъ на 2 получится $x=\frac{25-3y}{2}$, откуда усматриваемъ мы во-первыхъ, что $3y$ должны быть меньше 25 ти и по сему y не можетъ быть больше 8 ми; исключивъ цѣлыя числа сколько возможно, будетъ $x=\frac{25-3y-1}{2}$, или $x=12-y+\frac{1-3y}{2}$; и такъ $1-y$, или $y-1$ на 2 дѣлится должны, чего ради положи $y-1=2z$, то $y=2z+1$ будетъ $x=12-2z-1-z=11-3z$, а понеже y не болѣе 8 ми быть долженъ, то вмѣсто z никакихъ другихъ чисель взять не можно, какъ только тѣ, кои $2z+1$ не больше 8 ми составляютъ, слѣдовательно z долженъ быть меньше 4 хъ,

Томъ II.

Н

и

и по сему z не больше 3 хъ взять можно, откуда сн слѣдуютъ рѣшенія:

$$\begin{array}{l} \text{положивъ } z=0 \mid z=1 \mid z=2 \mid z=3 \\ \text{будеть } y=1 \mid y=3 \mid y=5 \mid y=7 \\ \text{и } x=11 \mid x=8 \mid x=5 \mid x=2 \end{array}$$

И такъ искомыя двѣ части будутъ слѣдующія: I) $22=3$; II) $16+9$; III) $10+15$ IV) $4+21$.

808.

Вопросъ. Раздѣлить 100 на 2 части, такъ чтобъ первая на 7, а другая на 11 могла раздѣлиться?

Пусть будетъ первая $7x$, а другая $11y$, то должно $7x+11y=100$, откуда $x = \frac{100-11y}{7} = \frac{98+2-7y-4y}{7} = 14$

$-y + \frac{2-4y}{7}$; и такъ $2-4y$, или $4y-2$,

должны дѣлиться на 7, а когда $4y-2$ на 7 могутъ раздѣлиться, то и половина ихъ $2y-1$ также раздѣлится, чего ради положи $2y-1=7z$, или $2y=7z+1$: будетъ $x=14-y-2z$; но когда $2y=7z+1=6z+z+1$ выдетъ $y=3z+\frac{z+1}{2}$

По-

Положивъ теперь $x+1=2u$, или $x=2u-1$, будетъ $y=3x+u$. Теперь вмѣсто u можно взять каждое цѣлое число, по которому бы ни x ни y отрицательными не были, то получится $y=7u-3$, а $x=19-11u$. По первой формулѣ $7u$ должно быть больше $3x$, а по второй, $11u$ меньше 19 пи, или u меньше нежели $\frac{19}{11}$, такъ что u не можетъ быть 2, но оно также и 0 быть не можетъ, то остается одна только его величина $u=1$, откуда получится $x=8$ и $y=4$, слѣдовательно обѣ искомыя части ста будутъ I я 56, а II я 44.

809.

Вопросъ. Раздѣлить 100 на двѣ такія части, что ежели первую раздѣлить на 5, тобѣ осталось 2, а когда другую раздѣлишь на 7, въ остаткѣ чтобѣ было 4?

Когда отъ раздѣленія первой части на 5 въ остаткѣ должны быть 2, то положи оную $5x+2$, и понеже другая часть раздѣленная на 7 должна дать остатокъ 4, то пусть она будетъ $7y+4$, и такъ $5x+7y+6=100$, или $5x=94-7y=90+4-5y-2y$, по чему $x=18-y-\frac{2y+4}{5}$

И 2

слѣ-

слѣдовательно $4-2y$, или $2y-4$, или половина сего $y-2$ должна раздѣлиться на 5; чего ради положи $y-2=5z$, или $y=5z+2$ будетъ $x=16-7z$, откуда явствуется, что $7z$ должны быть меньше 16 т.е., слѣдовательно z меньше нежели $\frac{16}{7}$ и такъ не больше 2 хъ, по чему имѣемъ мы здѣсь 3 рѣшенія:

Ие $z=0$ даетъ $x=16$ и $y=2$, слѣдовательно объ искомыя части будутъ $82+18$.

Не $z=1$ будетъ $x=9$ и $y=7$, слѣдовательно объ части $47+53$.

Ше $z=2$ даетъ $x=2$ и $y=12$, по чему объ части $12=88$.

810.

Вопросъ. Двѣ крестьянки имѣютъ вмѣстѣ 100 яицъ; одна говоритъ: ежели я свои по 8 щитать спану, то останется у меня 7; другая говоритъ: а когда я свои по 10 щитать буду, то и у меня въ остаткѣ также будетъ 7: спрашивается сколько каждая яицъ имѣла?

Понеже число первой раздѣленное на 8 даетъ въ остаткѣ 7, а число другой раздѣленное на 10 также даетъ остатокъ

токъ 7, то положи число первой $=8x+7$, а другой $=10y+7$, то будетъ $8x+10y+14=100$, или $8x=86-10y$, или $4x=43-5y=40+3-4y-y$; откуда найдется $x=10-y+\frac{3-y}{4}$: и такъ $3-y$, или $y-3$ на 4 дѣлиться должно, чего ради положи $y-3=4z$, будетъ $y=4z+3$ и $x=10-4z-3-z=7-5z$, слѣдовательно $5z$ должны быть меньше нежели 7 и такъ z меньше 2 хъ, по чему слѣдующія два рѣшенія выходятъ:

1 е $z=0$ даетъ $x=7$ и $y=3$, по сему у первой крестьянки было 63 лица, а у другой 37.

И е $z=1$ даетъ $x=2$ и $y=7$, и такъ у первой было 23 лица а у другой 77.

811.

Вопросъ. Въ нѣкоторой компаніи мущины и женщины издержали вмѣстѣ 1000 копѣекъ; каждой мущина заплатилъ 19 копѣекъ, а каждая женщина 13 коп. спрашивается сколько было мущинъ и сколько женщинъ?

Пусть будетъ число мущинъ $=x$, а женщинъ $=y$, то получится сіе уравненіе

Н 3

19

$19x + 13y = 1000$; изъ сего найдется $13y = 1000 - 19x$ или $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, слѣдовательно $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$, и такъ $12 - 6x$ или $6x - 12$ и шестая также онаго часть $x - 2$ должна дѣлиться на 13, то положи $x - 2 = 13z$ будетъ $x = 13z + 2$ и $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, или $y = 74 - 19z$, по чему z долженъ быть меньше нежели $\frac{74}{19}$ и слѣдовательно меньше 4 хъ, откуда слѣдующія 4 рѣшенія мѣсто имѣють :

Iе $z = 0$ даетъ $x = 2$ и $y = 74$; такимъ образомъ было двое мужчинъ и 74 женщины; тѣ заплатили 38 копѣекъ, а сѣи 962 копѣйки.

IIе $z = 1$ даетъ число мужчинъ $x = 15$, а число женщинъ $y = 55$; тѣ издержали 285 коп. , а сѣи 715 коп.

IIIе $z = 2$ даетъ число мужчинъ $x = 28$, а число женщинъ $y = 36$; тѣ исплатили 552 коп. а сѣи 468 коп.

IVе $z = 3$ даетъ число мужчинъ $x = 41$; а число женщинъ $y = 17$; тѣ заплатили 779 коп. , а сѣи 221 коп.

812

Вопросъ. Одинъ дворянинъ купилъ лошадей и быковъ вмѣстѣ за 1770 р. талеровъ,

леровъ, за каждую лошадь платилъ онъ 51 тал., а за каждого быка 21 р. талеръ. Спрашивается, сколько было лошадей и сколько быковъ?

Пусть будетъ число лошадей x , а быковъ y ; то должно быть $51x + 21y = 1770$, или $21y = 1770 - 51x = 1764 - 6 - 21x - 10x$, слѣдовательно $y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$. По сему должно $10x - 6$, или также половина сего $5x - 3$ раздѣлиться на 21. Положи $5x - 3 = 21z$, будетъ $5x = 21z + 3$, слѣдовательно $y = 84 - x - 2z$, но $x = \frac{21z + 3}{5}$ или $= 4z + \frac{3}{5}$; вмѣсто $z + 3$ возьми $5u$ будетъ $z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ и $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$, и по сему u должно быть больше нежели 0; однако меньше 4хъ, откуда получаемъ мы сн 3 рѣшенія.

Если $u = 1$ даетъ число лошадей $x = 9$, а быковъ $y = 71$; тѣ стоили 279 рейх-талер., а сн 1491, вмѣстѣ 1770 р. талер.

Если $u = 2$ даетъ число лошадей $x = 30$, а быковъ $y = 40$; тѣ стоятъ 930 р. тал., а сн 840, вмѣстѣ 1770 рейхсталер.

И 4

IIIe

Ше $u=3$ даетъ число лошадей $x=51$, а быковъ $y=9$; тѣ стоили 1581 р.тал., а сѣи 189, вмѣстѣ 1770 рейхсталеровъ.

813.

Предложенные по сѣ мѣсто вопросы ведутъ насъ къ уравненію $ax+by=c$, гдѣ a , b и c цѣлыя и положительныя числа значатъ, и вмѣсто x и y такожде цѣлыя и положительныя числа требуются. Но ежели b будетъ отрицательное, и уравненіе такой видъ приметъ $ax=by+c$, то будутъ вопросы совсѣмъ особливаго рода и могутъ имѣть безконечное множество рѣшеній, для которыхъ способъ надлежитъ изъяснить еще въ сей главѣ. Наилегчайшіе сего рода вопросы суть такіе: найти два числа, которыхъ бы разность была 6?

Положи меньшее $=x$, а большее $=y$, будетъ $y-x=6$, слѣдовательно $y=6+x$; здѣсь ничто не препятствуетъ брать вмѣсто x всѣ возможные цѣлыя числа, и какія бы взяты ни были, то всегда y будетъ 6 тью больше; возми наприм. $x=100$, будетъ $y=106$, откуда явствуетъ,

вуетъ, что бесконечно многія рѣшенія
быть могутъ.

814.

По семь слѣдуютъ вопросы, гдѣ $c=0$
и ax одному только *by* равно, т. е. ищется
число, которое бы какъ на 5, такъ и
на 7 могло раздѣлиться; положи сѣ чи-
сло $=N$, то надлежитъ быть сперва
 $N=5x$, по тому что число N на 5 дѣ-
лится должно, а по томъ $N=7y$, поне-
же сѣ число также и на 7 дѣлится
долженствуетъ. Отсюда получится $5x=7y$,
слѣдовательно $x=\frac{7}{5}y$; но понеже 7 на 5
раздѣлиться не могутъ, то должно y на
оное раздѣлиться, и такъ положи $y=5z$,
будетъ $x=7z$; слѣдовательно искомое чи-
сло $N=35z$, гдѣ вмѣсто z каждое цѣлое
число брать можно, такъ что вмѣсто N
бесконечно многія числа найдутся, кои
суть 35, 70, 105, 175, 210 и проч.

Если бы еще сверхъ сего число N
на 9 раздѣлить можно было, то было
бы сперва $N=3sz$, а по томъ $N=9u$, и
оттуда $u=\frac{35z}{9}$, по чему видно, что z

и 5

на

на 9 дѣлился долженъ, и такъ пусть
будетъ $z=9s$, будетъ $u=35s$, а иско-
мое число $N=315s$.

815.

Больше трудности бываетъ, ежели
число s не 0, такъ когда бы было $5x$
 $=7y+3$. Сие уравненіе выходитъ, когда
такое число N ищется, которое бы
сперва на 5 дѣлилось, а естли оно же
раздѣлится на 7, то осталось бы 3. Ибо
тогда надлежитъ быть $N=5x$, а по томъ
 $N=7y+3$, и для того будетъ $5x=7y+3$,
слѣдовательно $x=\frac{7y+3}{5}=\frac{7y}{5}+\frac{3}{5}=y+\frac{2}{5}$;
положивъ $2y+3=5z$ будетъ $x=y+z$, но
 $2y+3=5z$, или $2y=5z-3$ будетъ $y=\frac{5z-3}{2}$,
или $=2z-\frac{3}{2}$: возми теперъ $z=5+2u$ бу-
детъ $z=2u+5$, $y=5u+6$ и $x=y+z=7u+9$,
слѣдовательно искомое число $N=35u+45$,
гдѣ вмѣсто u всѣ цѣлыя числа взяты
быть могутъ, да и самыя отрицатель-
ныя, чтобъ только N было положитель-
ное, что учинится здѣсь, ежели $u=-1$;
ибо тогда выдетъ $N=10$, слѣдующія же
числа получаютъ, когда къ оному завсегда
придавать будешь 35, и по сему искомыя
числа

числа суть 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, и прочая.

816.

Рѣшеніе такихъ вопросовъ основано на содержаніи обонхъ чиселъ, на которыя дѣлится должно, и по свойству оныхъ рѣшеніе бываетъ иногда короче, иногда пространнѣе; слѣдующей коротко разрѣшится.

Найти число, которое когда раздѣлится на 6, останется 2. а раздѣливъ оное на 13 въ остаткѣ будетъ 3?

Пусть будетъ сіе число N , по первымъ $N = 6x + 2$, а по томъ $N = 13y + 3$, и такъ $6x + 2 = 13y + 3$, и $6x = 13y + 1$, откуда $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$; положи $y+1 = 6z$, получится $y = 6z - 1$ и $x = 2y + \frac{y+1}{6} = 13z - 2$, слѣдовательно искомое число будетъ $N = 78z - 10$, и такія числа будутъ слѣдующія: 68, 146, 224, 302, 380 и проч., которыя идутъ въ арифметической прогрессии, коей разность есть 78 6. 13, и такъ ежели одно изъ сихъ чиселъ будетъ извѣстно, то всѣ прочія легко найдутся; ибо надлежитъ только къ онымъ придавать

давать завсегда 78, или изъ онаго вычитать сколько возможно будетъ.

817.

Труднее сего примѣръ слѣдующей быть можетъ: сыскать число N , которое будучи раздѣлено на 39 дастъ въ остатокъ 16, а на 56 раздѣленное дастъ остатокъ 27

Во первыхъ должно быть $N=39p+16$, а по томъ $N=56q+27$, откуда выдѣтъ $39p+16=56q+27$, или $39p=56q+11$ и $p=\frac{56q+11}{39}=q+\frac{17q+11}{39}=q+r$, такъ, что $r=\frac{17q+11}{39}$, отсюда будетъ $39r=17q+11$, и $q=\frac{39r-11}{17}=2r+\frac{5r-11}{17}=2r+s$, такъ что $s=\frac{5r-11}{17}$, или $17s=5r-11$; по сему будетъ $r=\frac{17s+11}{5}=3s+\frac{2s+11}{5}=3s+t$, такъ что $t=\frac{2s+11}{5}$, или $5t=2s+11$, слѣдовательно будетъ $s=\frac{5t-11}{2}=2t+\frac{t-11}{2}=2t+u$, такъ что $u=\frac{t-11}{2}$ и $t=2u+11$; когда теперь уже больше дробей не попадется, то можно взять u по изволению, и отсюда наизворотъ получаемъ мы слѣдующія опредѣленія:

$$t=2u+11$$

$$s=2t+u=5u+22$$

$$r=3$$

$$r=5s+t=17u+77$$

$$q=2r+s=39u+176$$

$$p=q+r=56u+253$$

и наконецъ $N=39.56u+9883$.

Но что бы самое меньшее число вмѣсто N найти, то положи $u=-4$ будетъ $N=1147$, положивъ $u=x4$ будетъ $N=2184x-8736+9883$, или $N=2184x+1147$. Эти числа дѣлають арифметическую прогрессию, которой первой членъ есть 1147, а разность $=2184$, самыя же числа будутъ 1147, 3331, 5515, 7699, 9883 и проч.

818.

Для упражненія присоединимъ еще нѣсколько примѣровъ.

Вопросъ. Въ одной компаніи были мушны и женщины; каждой мушна издержалъ 25, каждая женщина 16 коп. и нашлось послѣ, что женщины вмѣстѣ одною копѣйкою больше заплатили, нежели мушны; спрашивается, сколько было мушнъ и женщинъ?

Положимъ число женщинъ было $=p$, а мушнъ $=q$, то женщины издержали $16p$, а мушны $25q$: чего ради должно быть

$$16p = 25q + 1, \text{ отсюда найдемъ } p = \frac{25q+1}{16}$$

$$= q \frac{+9q+1}{16} = q + r, \text{ такъ что } r = \frac{9q+1}{16}$$

$$\text{слѣдовательно } q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r$$

$$+ s, \text{ такъ что } s = \frac{7r-1}{9}, \text{ или } 9s = 7r$$

$$- 1; \text{ откуда } r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s$$

$$+ t, \text{ такъ что } t = \frac{2s+1}{7} \text{ или } 7t = 2s$$

$$+ 1, \text{ слѣдовательно } s = \frac{7t-1}{2} = 3 + \frac{t-1}{2}$$

$$= 3t + u, \text{ такъ что } u = \frac{t-1}{2}, \text{ или } 2u = t$$

$$- 1, \text{ по чему } t = 2u + 1, \text{ отсюда наизво-}$$

ротъ получаемъ мы

$$t = 2u + 1$$

$$s = 3t + u = 7u + 3$$

$$r = s + t = 9u + 4$$

$$q = r + 1 = 16u + 7$$

$p = q + r = 25u + 11$ по сему было
женщинъ $= 25u + 11$, а мужчинъ $= 16u$
 $+ 7$, гдѣ вмѣсто u , всякое цѣлое число
взять

взять можно; меньшія числа съ слѣдующими будутъ такія:

число женщинъ = 11, 36, 61, 86, 111 и пр.

— мушнъ 7, 23, 39, 55, 71 и пр.

по первому рѣшенію въ самыхъ меншихъ числахъ женщины издержали 176 коп., а мушны 175 коп., слѣдовательно женщины одною копѣйкою больше изтрапили, нежели мушны.

819.

Вопросъ. Нѣкто купилъ лошадей и быковъ; за каждую лошадь платилъ 31 рейхсталеръ, а за каждаго быка 20 р. талеровъ, и нашлось, что всѣ быки вмѣстѣ 7мью р. талерами стоили больше, нежели лошади. Спрашивается, сколько было быковъ и лошадей?

Пусть будетъ число быковъ = p , а лошадей = q , то должно $20p = 31q + 7$,

откуда $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q+r$,

по сему $20r = 11q + 7$, и $q = \frac{20r-7}{11} = r$

$+ \frac{9r-7}{11} = r+s$, по сему $11s = 9r - 7$

$$\text{и } r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s+t, \text{ по}$$

$$\text{сему } 9t = 2s+7 \text{ и } s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2}$$

$$= 4t+u, \text{ по сему } 2u = t-7$$

$$\text{и } t = 2u+7$$

$$s = 4t+u = 9u+28$$

$$r = s+t = 11u+35$$

$$q = r+s = 20u+63 \text{ число лошадей,}$$

$$p = q+r = 31u+98 \text{ число быков.}$$

Отсюда найдутся меньшія положительныя числа, вмѣсто p и q , когда положится $u = -3$, большія же числа увеличиваются въ арифметической прогрессіи, какъ слѣдуетъ:

число быковъ 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191

222, 253 и проч.

число лошадей 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123

143, 163, и проч.

820.

Когда мы въ семь примѣрѣхъ рассмотримъ, какимъ образомъ буквы p и q изъ слѣдующихъ опредѣляются, то легко усмотрѣть можно, что сіе отъ содержанія чиселъ 31 и 20 зависитъ, а особли-

во на томъ содержаніи, по которому обыкновенно ищутъ самаго большаго общаго снхъ обоихъ чиселъ дѣлителя, какъ изъ слѣдующаго явствуется:

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 31 \\
 \hline
 20 & \\
 \hline
 11 & 20 \\
 & \hline
 & 11 \\
 & \hline
 9 & 11 \\
 & \hline
 & 9 \\
 & \hline
 2 & 9 \\
 & \hline
 & 8 \\
 & \hline
 1 & 2 \\
 & \hline
 & 2
 \end{array}$$

Здѣсь видно, что частныя числа въ слѣдующихъ другъ за другомъ опредѣленіяхъ буквъ, *p, q, r, s* и проч. выходятъ; и съ первою буквою на правой рукѣ связываются, а послѣдняя остается завсегда одинака; въ послѣднемъ же уравненіи выходитъ прежде всѣхъ число 7 и при томъ съ знакомъ $+$ по тому, что послѣднее опредѣленіе есть пятое. Если же бы число оныхъ было частное, тогда бы -7 поставить надлежало. Сіе будетъ

Томъ II. О яснѣе

яснѣе изъ слѣдующей таблички, гдѣ напередъ раздробленіе чисель 31 и 20, а потомъ опредѣленія буквъ p , q , r и проч. представлены.

$$\begin{array}{lcl} 31=1. & 20+11 & | \quad p=1.q+r \\ 30=1. & 11+9 & | \quad q=1.r+s \\ 11=1. & 9+2 & | \quad r=1.s+t \\ 9=4. & 2+1 & | \quad s=4.t+u \\ 2=2. & 1+0 & | \quad t=2u+.... \end{array}$$

821.

По сему способу представлень быть можетъ прежней примѣръ въ 14 статьѣ, — какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{lcl} 56=1. & 39+17 & | \quad p=1.q+r \\ 39=2. & 17+5 & | \quad q=2.r+s \\ 17=3. & 5+2 & | \quad r=3.s+t \\ 5=2. & 2+1 & | \quad s=2.t+u \\ 2=2. & 1+0 & | \quad t=2u+11 \end{array}$$

822.

Симъ образомъ въ состояніи мы рѣшить всѣ такіе примѣры вообще.

Пусть будетъ дано сіе уравненіе $bp = aq + n$, гдѣ a , b и n извѣстны; здѣсь тоже дѣйствіе производишь надлежитъ, какъ

какъ будто бы найти должно было са-
маго большаго общаго дѣлителя чиселъ a
и b , изъ коихъ p и q чрезъ слѣдующія
буквы опредѣлены будутъ, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{l|l} \text{Пусть будетъ } a = Ab + c & p = Aq + r \\ b = Bc + d & q = Br + s \\ c = Cd + e & r = Cs + t \\ d = De + f & s = Dt + u \\ e = Ef + g & t = Eu + v \\ f = Fg + 0 & u = Fv + n \end{array}$$

Здѣсь въ послѣднемъ опредѣленіи берет-
ся $+$ n , когда число опредѣлений нече-
тное; напротивъ того $-n$, ежели оное
будетъ четное. Такииъ образомъ можно
теперь всѣ такіе вопросы рѣшить весьма
скоро, изъ коихъ мы предложимъ нѣкото-
рые для примѣру.

823.

Вопросъ. Сыскать число, которое ко-
гда раздѣлится на 11, дастъ въ остаткѣ
3, а раздѣленное на 19, даетъ остатокъ 5?

Пусть будетъ сіе число N , то во-
первыхъ $N = 11p + 3$, а по томъ также
 $N = 19q + 5$: чего ради будетъ $11p + 3$
 $= 19q + 5$, или $11p = 19q + 2$, откуда
слѣдующая составитъ табличка:

О 2

19

$$19 = 1 \cdot 11 + 9 \quad | \quad p = q + r$$

$$11 = 1 \cdot 8 + 3 \quad | \quad q = r + s$$

$$8 = 2 \cdot 3 + 2 \quad | \quad r = 2s + t$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \quad | \quad s = t + u$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0 \quad | \quad t = 2u + 2$$

гдѣ u по изволению взять можно, а отсюда уже обратнымъ порядкомъ предыдущія буквы опредѣляются, какъ слѣдуетъ:

$$t = 2u + 2$$

$$s = t + 1 = 3u + 2$$

$$r = 2s + t = 8u + 6$$

$$q = r + s = 11u + 8$$

$$p = q + r = 19u + 14$$

отсюда получится искомое число $N = 209 + 157u$ и такъ самое меньшее число вмѣсто N есть 157.

824.

Вопросъ. Ищется число N , которое какъ и прежде раздѣленное на 11 дастъ въ остаткѣ 5, а раздѣленное на 19 дастъ остатокъ 5, и еслии оно же раздѣлится на 29, тобѣ осталось 10?

По послѣднему положенію должно быть $N = 29p + 10$, и когда первые два договора уже вычислены, то изъ оныхъ
быть

быть надлежитъ, какъ уже выше найде-
но $N=209u+157$, вмѣсто чего поста-
вимъ мы $N=209q+157$, чего ради бу-
детъ $29p+10=209q+157$ или $29p=209q$
 $+147$, откуда слѣдующее дѣйствіе пред-
пріять надлежитъ:

$$\begin{array}{l|l} 209=7 \cdot 29+6 & \text{слѣд:} \\ 29=4 \cdot 6+5 & p=7 \cdot q+r \\ 6=1 \cdot 5+1 & q=4 \cdot r+s \\ 5=5 \cdot 1+0 & r=1 \cdot s+t \\ & s=5 \cdot t-147. \end{array}$$

Отсюда возвращаемся назадъ слѣдующимъ
образомъ.

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= s + t = 6t - 147 \\ q &= 4r + s = 29t - 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

И такъ $N=6061t-153458$, самое мен-
шее число найдется, когда положится
 $t=-26$, тогда будетъ $N=4128$.

825.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что
если такое уравненіе такъ, $bq=aq+n$ раз-
рѣшить должно будетъ, то оба числа a
и b общаго дѣлителя кромѣ 1 цы имѣть
не должны; ибо въ противномъ случаѣ

былъ бы вопросъ невозможной, сжали бы число n тогожъ общаго дѣлителя исимѣло. Такъ когда напр. $9p=15q+2$, гдѣ 9 и 15 общаго дѣлителя 3 имѣють, но на котораго 2 раздѣлиться не можетъ; того ради не лзя рѣшить сего вопроса, потому что $9p-15q$ завсегда на 3 раздѣлится и слѣдовательно ни когда 2 быть не можетъ. Еслии же бы въ семъ случаѣ $n=3$ или 6 и протч., то былъ бы вопросъ совсѣмъ возможной и надлежало бы уравненіе раздѣлить на 3, то бы вышло тогда $3p=5q+1$, что по прежнему правилу легко рѣшить можно. По чему явствуется, что оба числа a и b никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 цы имѣть не должны, и что предписанное правило ни въ какихъ другихъ случаяхъ пмытъ мѣста не можетъ.

826.

А чтобы сіе яснѣе показать, то рассмотримъ натуральнымъ порядкомъ уравненіе $9p=15p+2$, гдѣ будетъ $p=\frac{15p+2}{9}$
 $=q+\frac{6q+2}{9}=q+r$, такъ что $9r=6q+2$,

или

или $6q = 9r - 2$, почему $q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6}$
 $= r + s$, такъ что $3r - 2 = 6s$, или $3r = 6s + 2$,
 откуда $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, что, какъ яв-
 ствуетъ, никогда цѣлое число быть не
 можетъ, ибо s неопредѣленно цѣлое число
 быть должно; и такъ видно, что такіе
 вопросы по ихъ свойству не возможны.

ГЛАВА II.

*О правилѣ такъ называемомъ слѣломъ, гдѣ
 изъ двухъ уравненій 3 или болѣе неизвѣстныхъ
 чиселъ опредѣляются.*

827.

Въ предыдущей главѣ видѣли мы,
 какимъ образомъ изъ одного уравненія два
 неизвѣстныхъ числа опредѣлять должно,
 такъ чтобы оныя были цѣлыя и поло-
 жительныя. Но ежели предложены бу-
 дутъ два уравненія, и вопросъ долженъ
 быть неопредѣленной, то надлежитъ
 быть болѣе, нежели двумъ неизвѣстнымъ
 числамъ; такіе вопросы случаются въ

простыхъ ариѳметическихъ книгахъ и рѣшаются по *правилу слѣдому*, котораго основаніе показать мы здѣсь намѣрены.

828.

Начнемъ съ самаго примѣра.

Вопросъ. 30 человекъ мужчинъ, женщинъ и робятъ издержали въ трактирѣ 50 рейхсталеровъ, каждой мужчина заплашилъ 3 р. талера, каждая женщина 2 р. талера, каждой робенокъ 1 р. талеръ. Спрашивается, сколько было мужчинъ, женщинъ и робятъ?

Пусть будетъ число мужчинъ $=p$, женщинъ $=q$, а робятъ $=r$, то получатся слѣдующія два уравненія: I) $p+q+r=30$; II) $3p+2q+r=50$, изъ коихъ 3 буквы p , q , и r въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ опредѣлить должно. Изъ перваго уравненія будетъ $r=30-p-q$; чего ради $p+q$ должны быть меньше 30 ти. Сую величину поставивъ вмѣсто r въ другомъ уравненіи выдѣстъ $2p+q+30=50$, слѣдовательно $2q+q=20$; и такъ $q=20-2p$, а $p+q=20-p$, что само по себѣ меньше 30 ти, теперь вмѣсто p

всѣ

всѣ числа брать можно, кои не больше 10 ти, по чему слѣдующія выходятъ рѣшенія.

число мужчинъ $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$

— женщинъ $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0.$

— и робятъ $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$

отбросивъ первыя и послѣднія, останутся еще 9 истинныхъ рѣшеній.

829.

Другой вопросъ. Нѣкто купилъ 100 разнаго рода скотины, свиней, козъ и барановъ за 100 рейхсталеровъ, за одну свинью давалъ $3\frac{1}{2}$ р. талеровъ; за козу $1\frac{1}{4}$ р. талер., за барана $\frac{1}{2}$ р. тал. Спрашивается, сколько cadaго роду было?

Пусть будетъ число свиней $= p$, козъ $= q$, барановъ $= r$, то выдутъ слѣдующія два уравненія.

I.e. $p + q + r = 100$; II) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{4}q + \frac{1}{2}r = 100.$

Сіе послѣднее уравненіе для избѣжанія дробей помножь на 6, выдетъ $21p + 8q + 3r = 600$, изъ перваго уравненія будетъ $r = 100 - p - q$, котораго величину поставивъ во второмъ уравненіи, получится $18p + 5q = 300$, или $5q = 300 - 18p$ и $q = 60 + \frac{1}{5}p$, слѣдовательно $18p$ должны на 5 разъ

О 5

дѣ-

дѣлиться, или 5 какъ множится въ себѣ заключающія должны, и такъ положи $p=5s$ будетъ $q=60+18s$ и $r=15s+40$, гдѣ вмѣсто s произвольное цѣлое число взять можно, но такъ чтобъ q не было отрицательнымъ; чего ради s не больше 3 хъ быть долженъ, и слѣдовательно когда о такъ же исключается, то слѣдующія только 3 рѣшенія мѣстоимѣютъ, а именно:

$$\begin{array}{l} \text{когда } s = 1, 2, 3 \\ \hline \text{будетъ } p = 5, 13, 15 \\ \quad \quad q = 42, 24, 16 \\ \quad \quad r = 53, 66, 79. \end{array}$$

830.

Когда кто такіе примѣры самъ предлагаетъ пожелаетъ, то прежде всего на то смотрѣть надлежитъ, чтобъ были оныя возможны; а что бы сіе узнать, то надлежитъ примѣчать слѣдующее:

Пусть будутъ оба уравненія, какія мы по сіе мѣсто имѣли, такъ представлены: I) $x+y+z=a$; II) $fx+gy+hz=h$, гдѣ f, g, h , такъ какъ a и b извѣстны; пусть теперь между числами f, g и h первое будетъ наибольшее, а h наименьшее;

ко-

когдажъ $x+y+z=a$, то $fx+fy+fz=fa$, а $fx+fy+fz$ больше нежели $fx+gy+hz$, по чему fa должно быть больше нежели b , или b меньше нежели fa ; а $hx+h+ghz=ah$ и $hx+hy+hz$ заподлинно меньше нежели $fx+gy+hz$, то и ah должно быть меньше нежели b , или b больше нежели ah . Слѣдовательно когда число b не меньше fa и при томъ не больше ah , то вопросъ завсегда невозможной.

Сей договоръ обыкновенно также предлагается и слѣдующимъ образомъ: чтобъ число b содержалось въ предѣлахъ fa и ah , сверхъ сего чтобъ оное не очень близко подходило къ обоимъ предѣламъ; ибо иначе остальные буквы опредѣлены быть не могутъ.

Такъ въ прежнемъ примѣрѣ, гдѣ $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$, $h=\frac{1}{2}$, предѣлы были 350 и 50, естли бы теперъ захотѣли положить $b=51$ вмѣсто 100, то вышли бы уравненіи $x+y+z=100$ и $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=51$, здѣсь помноживъ на 6 будетъ $21x+8y+3z=306$, возми первое уравненіе 5 жды, получится $3x+3y+3z=500$, которое изъ прежняго вычти, останется

$18x + 5y = 6$, кое какъ заразъ видно, невозможно; по тому что x и y цѣлыя числа бытъ должны.

831.

Сие правило нужно монетныхъ и золотыхъ дѣлъ мастерамъ, когда они хотѣтъ изъ трехъ или больше родовъ серебра что нибудь здѣлать, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуетъ.

Вопросъ. Одинъ монетной мастеръ имѣетъ троякое серебро, первое 14 лотовое, другое 11 лотовое и третье 9 лотовое, а должно ему здѣлать вещь вѣсомъ въ 30 марокъ, которая должна быть 12 лотковая.

Спрашивается, сколько марокъ каждаго серебра взять ему надлежитъ?

Положимъ, что взялъ онъ изъ перваго серебра x марокъ, изъ другаго y , а изъ третьяго z марокъ, то должно быть $x + y + z = 30$, что составляетъ первое уравнение; по тому каждая марка перваго сорта содержитъ 14 лотовъ хорошаго серебра, то x марокъ содержать будутъ $14x$ лотовъ серебра, подобнымъ образомъ

y марокъ второго рода содержать 11 y лотовъ серебра и z марокъ, третьяго рода содержать 9 z лотовъ серебра; по чему весь кусокъ серебра содержать будетъ $14x + 11y + 9z$ лотовъ; а понеже оной вѣситъ 30 марокъ, изъ которыхъ каждая содержать должна 12 лотовъ серебра, то надлежитъ количеству серебра въ ономъ кускѣ быть 360 лотовъ; откуда сіе второе уравненіе выходитъ $14x + 11y + 9z = 360$: изъ сего вычти первое уравненіе 9 разъ взятое, т. е. $9y + 9y + 9z = 270$, останется $5x + 2y = 90$; откуда и x и y опредѣлить должно, и при томъ въ цѣлыхъ числахъ, но $z = 30 - x - y$, а изъ другаго уравненія получится $2y = 90 - 5x$ и $y = 45 - \frac{5x}{2}$, положивъ $x = 2u$ найдется $y = 45 - 5u$ и $z = 3u - 15$. Слѣдовательно u должно быть больше 4 хъ, хотя и меньше 10 ти. Отсюда выходятъ слѣдующія рѣшенія :

$u = 5,$	$6,$	$7,$	$8,$	$9.$
$x = 10,$	$12,$	$14,$	$16,$	$18.$
$y = 20,$	$15,$	$10,$	$5,$	$0.$
$z = 0,$	$3,$	$6,$	$9,$	$12.$

832.

Иногда случаются больше нежели 3 неизвѣстных числа, гдѣ рѣшеніе такимъ же образомъ дѣлается, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно.

Вопросъ. Нѣкто купилъ сотню скотины за 100 рейхсталеровъ, каждого быка за 10 р. тал.; каждую корову за 5 р. тал.; каждого теленка за 2 р. талер.; каждую овцу за $\frac{1}{2}$ р. талера. Спрашивается, сколько было быковъ, коровъ, телятъ и овецъ.

Пусть будетъ число быковъ $=p$, коровъ $=q$, телятъ $=r$ и овецъ $=s$, то первое уравненіе будетъ $p+q+r+s=100$, и второе $10p+5q+2r+\frac{1}{2}s=100$, которое для избѣжанія дробей помножено на 2, даетъ $20p+10q+4r+s=200$, изъ сей вычти первое уравненіе, выдетъ $19p+9q+3r=100$, отсюда $3r=100-19p-9q$ и $r=33\frac{1}{3}-6p-\frac{3}{2}q$, или $r=33-6p-3q+\frac{1}{2}p$, по чему $1-p$, или $p-1$ должно дѣлиться на 3; и такъ возми $p-1=3t$, то будетъ, какъ слѣдуетъ.

$$p=3t+1$$

$$q=q$$

$$r=27$$

$$r=27-1qt-3q$$

$$s=72+2q+16t.$$

И такъ $19t+3q$ должны быть меньше, нежели 27. Здѣсь можно теперь взять q и t по произволѣ, съ симъ только договоромъ, чшобъ $19t+3q$ не были больше 27 ми, и по сему слѣдующіе случаи разсмотрѣть мы имѣемъ.

I когда $t=0$	II когда $t=1$	III когда $t=2$
то будетъ $p=1$	будетъ $p=4$	будетъ $p=7$
$r=27-3q$	$r=8-3q$	$r=-5q$
$s=72+2q$	$s=88+2q$	$s=94+2q$

III когда $t=2$; но въ прошломъ случаѣ вышавъ бы оприцательное.

Въ первомъ случаѣ q не должно быть больше 9, а во второмъ не больше 2хъ; и такъ изъ обоихъ случаевъ получаемъ мы слѣдующія рѣшенія.

Изъ перваго случая выходятъ сіи 10 рѣшеній, какъ

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

а изъ другаго случая сіи 3 рѣшенія

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92.

Слѣдовательно всѣхъ навсе 13 рѣшеній; но когда o исключится, то будетъ только 10.

853.

Способъ рѣшенія бываетъ всегда одинаковъ, хотя бы въ первомъ уравненіи буквы на данныя числа и помножены были, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуется.

Вопросъ. Найти 3 такія числа, изъ которыхъ когда первое помножится на 3, другое на 5, а третье на 7, тобъ сумма произведеній была 560; когда же первое помножится на 9, другое на 25 и третье на 49, тобъ сумма произведеній была 2920?

Пусть будетъ первое число $=x$, другое $=y$, третье $=z$, то выдутъ си два уравненія I) $3x + 5y + 7z = 560$; II) $9x + 25y + 49z = 2920$, изъ втораго вычти первое трижды взятое, а имянно $9x + 15y$
 $+ 21$

$+21z=1680$, останется $10y+28z=1240$, или раздѣливъ на 2 будетъ $5y+14z=620$; откуда $y=124-\frac{14}{5}z$, слѣдовательно z долженъ дѣлиться на 5; и такъ положи $z=5u$, будетъ $y=124-14u$, которыя знаменованія поставивъ въ первомъ уравненіи вмѣсто z и y дадутъ $3x-35u+620=560$, или $3x=35u-60$, и $x=\frac{35}{3}u-20$, чего ради взявъ $u=3t$ получится наконецъ такое рѣшеніе $x=35t-20$; $y=124-42t$ и $z=15t$, гдѣ вмѣсто t произвольныя цѣлыя числа брать можно; но такъ чтобы t было больше 0, но меньше 3 хъ, откуда получаютъ сіи два рѣшенія:

Ie) когда $t=1$, будетъ $x=15$, $y=82$, $z=15$.
 IIe) ежели $t=2$, получится $x=50$, $y=40$, $z=30$.

Г Л А В А III.

О составныхъ неопредѣленныхъ уравненіяхъ, въ которыхъ первая только степенъ неизвѣстнаго числа находится.

834.

Теперь приступимъ мы къ такимъ уравненіямъ, гдѣ два неизвѣстныя числа
 Томъ II. II нщупт-

ищутся, и каждое не одно, какъ прежде, но или между собою помножены, или до нѣкоторой вышшей степени возвышены попадаются, ежели между тѣмъ другаго числа только первая степень находится. Такія уравненія имѣютъ вообще слѣдующую формулу:

$a + bx + cy + dxx + exy + fx^2 + gxyy + hx^2 + kx^2y$ и протч. $= 0$, гдѣ y первой только степени попадаетъ, и слѣдовательно легко опредѣленъ быть можетъ. Но опредѣленіе должно быть такое, чѣмъ вмѣсто x и y вышли цѣлыя числа: такіе случаи спянемъ мы теперь разсматривать и начнемъ съ самыхъ легкихъ.

835.

Найти два числа, которыхъ когда сумма приласится къ ихъ произведенію, выдетъ 79? Пусть будутъ два требуемыя числа x и y , то должно быть $xy + x + y = 79$, откуда получаемъ мы $xy + y = 79 - x$ и $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$; по чему явствуется, что $x + 1$ долженъ быть дѣлитель 80 пи: но понеже 80 имѣетъ многихъ дѣлителей, потому изъ каждаго найдется величина x , какъ изъ слѣдующаго видно: дѣли-

дѣлители	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
будеть $x=0$	1	3	4	7	9	15	19	39	79	
и $y=79$	39	19	15	9	7	4	3	1	0	

Понеже здѣсь послѣднія рѣшенія съ первыми сходны, того ради всѣхъ рѣшеній будетъ только 5.

I	II	III	IV	V
0	1	5	4	7
79	39	19	15	9

836.

Подобнымъ образомъ можно такожде разрѣшить сіе всеобщее уравненіе: $xy+ax+by=c$, откуда выдетъ $xy+by=c-ax$ и слѣдовательно $y=\frac{c-ax}{x+b}$, или $y=-a+\frac{ab+c}{x+b}$; чего ради $x+b$ должно быть дѣлителемъ даннаго числа $ab+c$: и такъ изъ каждаго дѣлителя онаго числа можно найти величину x . Положи $ab+c=fg$ такъ что $y=-a+\frac{fg}{x+b}$, и возми $x+b=f$ или $x=f-b$, будетъ $y=-a+g$, или $y=g-a$. По сему различнымъ образомъ число $ab+c$ въ двухъ множителяхъ изъявить можно, и получится отсюда не одно, но два рѣшенія, а именно: первое $x=f-b$ и $y=g-a$; а др-

П 2

рое

гое, когда $x+b=g$ положится и найдется $x=g-b$, а $y=f-a$.

Еслили бы предложено было сіе уравненіе $xy+2x+3y=42$, то было бы $a=2$, $b=3$ и $c=42$; слѣдовательно $y=-2+\frac{42}{x+3}$; теперь число 48 различнымъ образомъ изъ двухъ множителей какъ f , g представлено быть можетъ и завсегда найдется $x=f-3$ и $y=g-2$, или $x=g-3$, а $y=f-2$; такіе множители суть слѣдующіе:

	I		II		III		IV		V	
множители	1	48	2	24	3	16	4	12	6	8
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
числа	-2	46	1	22	0	14	1	10	3	6
или	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

837.

Еще генеральнѣе представить можно уравненіе такимъ образомъ: $mxy=ax+by+c$, гдѣ a , b , c и m данныя числа, а вмѣсто x и y требуются цѣлыя числа.

По сему ищи y , и получится $y=\frac{ax+c}{mx-b}$ а чтобы здѣсь изъ числителя можно было исключить x , то помножь съ обѣихъ сторонъ на m , выдешь $my=\frac{max+rc}{mx+b}=a$

+

$+\frac{mc-ab}{mx-b}$. Числитель сей дроби есть известное число, коего знаменатель долженъ быть дѣлителемъ; чего ради представъ числителя въ двухъ множителяхъ какъ f, g , что различнымъ образомъ учиниться можетъ, и смотри можно ли одного изъ нихъ сравнить съ $mx-b$, такъ чѣмъ $mx-b=f$, а къ сему требуется, когда $x=\frac{f+b}{m}$, чѣмъ $f+b$ могло на m раздѣлиться; чего ради здѣсь тѣ только множители изъ $mc+ab$ употребить можно, кои, когда припасся къ нимъ b , могутъ на m раздѣлиться, что изъяснить примѣромъ небызнужно.

Пусть будетъ $5xy=2x+3y+18$,
отсюда получится $y=\frac{2x+18}{5x-3}$ и $5y$
 $=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}$; здѣсь числа 96 ти
такихъ дѣлителей искать надлежитъ,
что ежели къ нимъ придадутся 3, по
сумма на 5 раздѣлится: и такъ возми
всѣхъ множителей 96 ти, кои суть 1, 2,
3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.

Откуда видно, что сіи только числа 2, 12, 32, употребить можно.

Пусть теперь I) $5x-3=2$, будетъ $5y=50$
слѣдов. $x=1$, а $y=10$

II) $5x-3=12$ — — — $5y=10$.
— — — $x=3$, $y=2$.

III) $5x-3=32$ — — — $5y=5$.
— — — $x=7$, $y=1$.

838.

Понеже здѣсь во всеобщемъ рѣшеніи

$my-a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, то слѣдующее примѣчать

потребно: Ежели въ сей формулѣ $mc+ab$ содержащееся число имѣетъ дѣлителя, которой находится въ формулѣ $mx-b$, то частное неопмѣнно должно имѣть сию формулу $my-a$, и тогда число $mc+ab$ чрезъ такое произведеніе $(mx-b)(my-a)$ представлено быть можетъ. Пусть будетъ на прим. $m=12$, $a=5$, $b=7$ и $c=15$,

то получится $12y-5 = \frac{215}{12x-7}$, а 215 пи

дѣлители суть 1, 5, 43, 215, между которыми тѣ, кои найти должно, содержація въ формулѣ $12x-7$; или когда 7

къ

къ онымъ придадутся, тобъ дѣлилась сумма на 12. Здѣсь 5 только сіе дѣлаетъ, и такъ $12x-7=5$, а $12y-5=43$: изъ первой формулы будетъ $x=1$, а изъ второй y найдется въ цѣлыхъ числахъ, а именно $y=4$. Сіе обстоятельство въ разсужденіи свойства чиселъ есть великой важности, и для того примѣчать оное весьма нужно.

839.

Разсмотримъ еще такое уравненіе;
 $xy+xx=2x+3y+29$; отсюда найдется
 $y=\frac{2x-xx+29}{x-3}$, или $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$; и такъ $x-3$ долженъ быть дѣлитель числа 26, и тогда частное будетъ $y+x+1$; но дѣлители 26 три суть 1, 2, 13, 26, то получаемъ мы сіи рѣшенія:

Iс) $x-3=1$, или $x=4$, будетъ $y+x+1=26$, и $y=21$.

IIс) $x-3=2$, или $x=5$, будетъ $y+x+1=13$ и $y=7$.

IIIс) $x-3=13$, или $x=16$, будетъ $y+x+1=2$, и $y=-15$,

которое отрицательное знаменованіе оста-

влено, и для того послѣдняго случая $x-3=26$ шипать не должно.

840.

О другихъ формулахъ сего рода, въ которыхъ y первой только степени, говорить здѣсь не нужно; ибо такіе случаи рѣдко попадаются, да и тогда по показанному здѣсь правилу рѣшены быть могутъ. Но когда y до второй, или до вышшей степени возвышено будетъ, и величину онаго по даннымъ правиламъ опредѣлить за благо разсудится, то выдутъ въ такомъ случаѣ коренные знаки, позади коихъ вторая, или вышшая степень x находится; а надлежитъ величину x найти такъ, чѣмъ неизвлекаемость, или коренной знакъ уничтожился.

Ц въ семъ то состоитъ самое искусство неопредѣленной аналитики такіа неизвлекаемыя формулы дѣлать извлекаемыми; что мы въ слѣдующей главѣ покажемъ.

ГЛАВА IV.

о способъ извлекающую формулу $\sqrt{a+bx+cx^2}$
здравать извлекаемою.

841.

Здѣсь спрашивается, какую величину вмѣсто x взявъ надлежитъ, чтобъ формула $a+bx+cx^2$ дѣйствительной была квадратъ, и такимъ бы образомъ можно было изъяснить ся корень въ рациональныхъ, а b и c означать данныя числа, и изъ свойства оныхъ особливо зависить опредѣленіе неизвѣстнаго числа x .

При семъ прежде примѣчать должно, что во многихъ случаяхъ рѣшенія оныхъ бывають не возможны. Но ежели рѣшеніе будетъ возможное, то должно по крайней мѣрѣ въ опредѣленіи буквы x ; довольствоваться сперва одной-только рациональною величиною и не требовать, чтобъ были они еще и цѣлыя числа; что совсемъ особливаго требуетъ разысканія.

842.

Мы полагаемъ здѣсь, что формула до второй только степени возвышена ;

П 5

ибу

ибо вышіе степени особливаго требуютъ способу, о которомъ послѣ говорить должно.

Но естли бы здѣсь и второй степени не случилось и было бы $c=0$, то бы вопросъ никакой не имѣлъ трудности; ибо когда сія формула дана будетъ $\sqrt{a+bx}$ и надлежитъ опредѣлить x , такъ чтобъ $a+bx$ былъ квадратъ, то должно только положить $a+bx=yy$; откуда потчасъ выдеть $x=\frac{yy-a}{b}$, и теперь вмѣсто y можно брать всѣ произволяющія числа, и изъ каждаго такое знаменованіе вмѣсто x найдется, что $a+bx$ будетъ квадратъ, и слѣдовательно $\sqrt{a+bx}$ раціональное число.

843.

Начнемъ съ сей формулы $\sqrt{1+xx}$, гдѣ такія знаменованія вмѣсто x найти должно, что ежели къ ихъ квадрату xx придастся еще 1, тобъ сумма была пакн квадратъ, что, какъ видно, въ цѣлыхъ числахъ быть не можетъ; или нѣтъ ни одного

одного квадратнаго числа, которое бы было 1цею больше предъидущаго; и такъ неоптмѣнно довольствоваться должно ломаными числами вмѣсто x .

844.

Понеже $1+xx$ квадратное число быть должно, и мы бы захотѣли положить $1+xx=yy$, то вышло бы $xx=yy-1$, и $x=\sqrt{yy-1}$; и такъ чтобъ найти x , должно вмѣсто x такія искать числа, чтобъ ихъ квадраты уменьшенные 1цею были паки квадраты, которой вопросъ столь же труденъ какъ и прежней; и слѣдовательно симъ бы мы ничего не выиграли.

А что дѣйствительно есть такія дроби, кои будучи вмѣсто x взяты, дѣлають $1+xx$ квадратомъ, то изъ слѣдующихъ случаевъ видѣть можно.

I) когда $x=\frac{1}{2}$, будетъ $1+xx=\frac{5}{4}$, слѣдовательно $\sqrt{1+xx}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

II) Равнымъ образомъ сѣ учинится, когда $x=\frac{3}{4}$, гдѣ найдется $\sqrt{1+xx}=\frac{5}{4}$.

III) по томъ ежели положится $x=\frac{5}{12}$, то полу-

получится $1 + xx = \frac{16}{12}$, изъ чего квадратной корень есть $\frac{4}{3}$.

Какимъ образомъ должно находить больше такихъ чиселъ, о семъ надлежишь здѣсь показать.

845.

Сие учиниться можетъ двоякимъ образомъ: по первому способу положи $\sqrt{1+xx} = x + p$, будетъ $1 + xx = xx + 2px + pp$, гдѣ квадратъ xx уничтожается; и слѣдовательно x безъ кореннаго знака опредѣленъ быть можетъ; ибо въ найденномъ уравненіи вычти съ обѣихъ споронъ xx , останется, $2px + pp = 1$, откуда найдется $x = \frac{1 - pp}{2p}$, гдѣ вмѣсто p , каждое цѣлое число и дроби брать можно.

И такъ положивъ $p = \frac{m}{n}$ будетъ $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$, сію дробь помноживъ вверху,

и внизу на nn получится $x = \frac{nn - mm}{2mn}$

846.

По сему, чтобы $1 + xx$ была квадратъ, можно вмѣсто m и n по произволу

воленію брать всѣ возможные числа; и слѣдовательно отсюда безконечное множество знаменований вмѣсто x найдется.

Положи вообще $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, будетъ $x^2 + 1$

$$= 1 + \frac{n^2 - 2nnmm + m^2}{4m^2n^2}, \text{ или } x^2 + 1$$

$$= \frac{n^2 + 2nnmm + m^2}{4m^2n^2}, \text{ которая дробь есть}$$

дѣйствительной квадрать, и найдется

$$\text{отсюда } \sqrt{1 + xx} = \frac{nn + mm}{2mn} \text{ Изъ сего}$$

слѣдующія малая числа вмѣсто x изъ-явить можно:

$$\text{ежели } n=2 \quad | 3, | 3, | 4, | 4, | 5, | 5, | 5, | 5.$$

$$\text{и } m=1 \quad | 1, | 2, | 1, | 3, | 1, | 2, | 3, | 4.$$

$$\text{будетъ } x = \frac{1}{2} \quad | \frac{1}{2}, | \frac{3}{2}, | \frac{5}{2}, | \frac{7}{2}, | \frac{9}{2}, | \frac{11}{2}, | \frac{13}{2}, | \frac{15}{2}.$$

847.

Отсюда слѣдуетъ вообще, что $1 + \frac{(nn - mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(2mn)^2}$; помноживъ сіе

уравненіе на $(2mn)^2$, будетъ $(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2$; по сему имѣемъ

мы вообще два квадрата, коихъ сумма паки квадратъ. Симвъ разрѣшается теперь сей вопросъ: Найти

Найти два квадратныя числа, коихъ сумма такожде квадратъ?

Для $pp + qq = rr$, положи только $p = 2mn$ и $q = nn - mm$, будетъ $r = nn + mm$, по томъ $(nn + mm)^2 - (2mn)^2 = (nn - mm)^2$; отсюда можемъ мы также рѣшить и сей вопросъ:

Найти два квадратныя числа, коихъ бы разность была также квадратъ?

Положимъ $pp - qq = rr$, то должно только взять $p = nn + mm$, а $q = 2mn$, и будетъ $r = nn - mm$, или можно также положить $p = nn + mm$, а $q = nn - mm$ и тогда будетъ $r = 2mn$.

848.

Мы обѣщали формулу $1 + xx$ двоякимъ образомъ здѣлать квадратомъ; другой способъ есть слѣдующей.

Положи $\sqrt{1 + xx} = 1 + \frac{mx}{n}$, откуда получится $1 + xx = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, вычти съ обѣихъ сторонъ 1, останется $xx = \frac{2mx}{n} + \frac{mm}{nn}xx$, которое уравненіе на x раздѣлится можетъ, и выдѣтъ x

=

$= \frac{2m}{n} + \frac{mtx}{nn}$, или умноживъ на nn бу-
 деть $nnx = 2mn + mtx$, откуда найдемъ-
 ся $x = \frac{2mn}{nn - mt}$, поставивъ сію величину
 вмѣсто x будетъ $1 + xx = 1 + \frac{4mtmn}{n^2 - 2mtmn + m^2}$,
 или $= \frac{n^2 + 2mtmn + m^2}{n^2 - 2mtmn + m^2}$, которая дробь
 есть квадратъ изъ $\frac{nn + mt}{nn - mt}$; но когда
 теперь получается сіе уравненіе $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mt)^2}$
 $= \frac{(nn + mt)^2}{(nn - mt)^2}$, то слѣдуетъ отсюда, какъ
 и прежде, $(nn - mt)^2 + (2mn)^2 = (nn + mt)^2$ два
 квадрата, конхъ сумма есть квадратъ.

849.

Сей случай, которой мы разсмотрѣли обстоятельно, даетъ намъ два спо-
 соба, чтобъ всеобщую формулу $a + bx + cxx$
 здѣлать квадратомъ. Первой бываетъ въ
 такихъ случаяхъ, гдѣ c квадратъ, а вто-
 рой гдѣ a квадратъ, которые оба случая
 мы здѣсь пройдемъ. I пусть будетъ сперъ-
 ва c квадратное число, или пусть бу-
 деть

дешь данная формула $a+bx+ffxx$, ко-
рую квадратою дѣлать надлежитъ. На
сей конецъ положи $\sqrt{a+bx+ffxx}=fx$
 $+\frac{m}{n}$, будетъ $+abx+ffxx=ffxx+\frac{2fm}{n}$

$+\frac{mm}{nn}$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ xx уни-

чтожася, такъ что $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$

которое уравненіе помноживъ на nn даешь
 $nna+nnbx=2mnfx+mm$, откуда найдется x
 $=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$. Сіе знаменованіе поставивъ вмѣ-

сто x будетъ $\sqrt{a+bx+ffxx}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$
 $+\frac{m}{n}$ или $=\frac{nnb-mm f-nnaf}{nnb-2mnf}$.

850.

Но понеже вмѣсто x найдена дробь,
то положи $x=\frac{p}{q}$ такъ чтобы $p=mm-nna$,
а $q=nnb-2mnf$, и формула $a+\frac{bp}{q}+\frac{fpp}{qq}$
тогда будетъ квадратъ, слѣдовательно бу-
детъ оная также квадратъ, ежели на квад-
ратъ qq помножится; по чему и сія фор-
мула

мула $aqg + brq + ffrp$ будетъ такожде квадратъ, ежели положится $p = mt - nna$ и $q = nnb - 2mnf$, откуда безконечное множество рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ найти можно, по тому что буквы m и n по изволению брать можно.

851.

II. Второй случай бываетъ, когда первая буква a квадратъ, и по сему пусть будетъ дана сѣя формула $ff + bx + cxx$, которую квадратомъ сдѣлать надлежитъ; на сей конецъ положи $\sqrt{ff + bx + cxx} = f + \frac{mx}{n}$, будетъ $ff + bx + cxx = ff + \frac{2mf x}{n} + \frac{mmx^2}{nn}$, гдѣ ff уничтожается, а остальные члены на x раздѣлившись могутъ, такъ что $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$ или $nnb + nncx = 2mnf + mmx$ или $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, слѣдовательно $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$. Подставь сѣю величину вмѣсто x , будетъ $\sqrt{ff + bx + cxx} = f + \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm} = \frac{nncf - mmf - nnb}{nnc - mm}$.

То.нѡ II. Р По.

Положи здѣсь $x = \frac{p}{q}$, то можно квадратомъ здѣлать слѣдующую формулу $ffqq + brq + crr$, что учинится, когда положится $p = 2mif - ntb$, а $q = nnc - mt$.

852.

Здѣсь случай особливо достопамятенъ, когда $a = 0$, или когда формулу $bx + cxx$ квадратомъ здѣлать должно; то надлежитъ только поставить $\sqrt{(bx + cxx)} = \frac{mx}{n}$, будетъ $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, гдѣ раздѣ-

ливъ на x и помноживъ на nn , выдѣсть $bnn + cnx = mnx$, слѣдовательно $x = \frac{nntb}{mm - cnn}$.

Гайти на прим. всѣ треугольныя числа, которыя бы были вѣругъ и квадратныя, то должно $\frac{xx + x}{2}$, и слѣдовательно $2xx$

$+ 2x$ быть квадратъ, и положимъ оной теперь $\frac{nmx}{nn}$, то $2nnx + 2nn = mnx$, и $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$

гдѣ вмѣсто m и n всѣ возможные числа брать можно. И выходить будетъ по большей части вмѣсто x дробь; а иногда

и цѣлыя числа. Такъ, когда положится $m=3$, а $n=2$, то получится $x=8$, коего треугольное число есть 36, которое также есть и квадратъ; можно также взять $m=7$ и $n=5$, будетъ $x=-50$, коего треугольное число есть 1225, которое вдругъ и 49-и треугольное и такожде квадратное.

Сие получится также, ежели возмется $n=7$ и $m=10$; ибо тогда будетъ $x=49$.

Равнымъ образомъ можно положить $m=17$, а $n=12$, выдстъ $x=288$, коего треугольное число есть $\frac{x(x+1)}{2}$,
 $= \frac{288.289}{2} = 144.289$, которое есть квадратное число, а корень онаго $=12.17$
 $= 204$.

853.

Въ семъ послѣднемъ случаѣ разсмотримъ надлежитъ, чтобъ по сему основанію формулу $bx+cx^2$ здѣлать квадратомъ. Ибо она имѣетъ множителя x ; что введетъ насъ къ новымъ случаямъ, въ кото-

Р 2

рыхъ

рыхъ также и формула $a+bx+cx^2$ квадратомъ быть можетъ, когда ни a ниже c не квадраты.

Оные случаи имѣютъ мѣсто, когда $a+bx+cx^2$ на двухъ множителяхъ разрѣшиться можетъ; что учинится, ежели $bb-4ac$ есть квадратъ. Для показанія сего надлежитъ примѣчать, что множители отъ корней уравненія зависятъ, чего ради положи $a+bx+cx^2=0$, будетъ $cx^2=-bx-a$ и $xx=-\frac{bx}{c}-\frac{a}{c}$, откуда найдется

$$x = \frac{-b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)} \text{ или } x = \frac{-b \pm \sqrt{(bb-4ac)}}{2c};$$

по чему явствуется, что ежели $bb-4ac$ есть квадратъ, то можно опредѣлить корень рациональной, и по сему пусть будетъ $bb-4ac=dd$, то выдутъ корни x

$$= \frac{-b+d}{2c}, \text{ или } x = \frac{-b-d}{2c}; \text{ и такъ дѣлители}$$

формулы $a+bx+cx^2$, будетъ $x + \frac{b-d}{2c}$, и $x + \frac{b+d}{2c}$, кои помноживъ между собою, получишь ту же формулу раздѣленную только на c . А именно най-

дѣтся $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$; но $dd = bb - 4ac$,
 то получится $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc}$
 $= xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$: помноживъ на c выдѣтъ
 $cxx + bx + a$, слѣдовательно должно только
 одного множителя на c помножить,
 то формула наша равна будетъ сему про-
 изведению $\left(cx + \frac{b-d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$, и вид-
 нно, что сіе рѣшеніе завсегда мѣсто
 имѣетъ, какъ скоро $bb - 4ac$ будетъ ква-
 дратъ.

854.

Отсюда рождается третьей случай,
 въ которомъ формулу нашу $a + bx + cxx$
 квадратомъ здѣлать можно, и которой мы
 къ двумъ прежнимъ присовокупимъ.

III. Сей случай тогда только бы-
 ваетъ, когда формулу нашу чрезъ такое
 произведение представить можно, какъ
 $(f + gx)(h + kx)$, а дабы сіе сдѣлать квад-
 ратомъ, то положи корни $\sqrt{f + gx}(h + kx)$
 $= \frac{m(f + gx)}{n}$, получится $(f + gx)(h + kx)$

$= \frac{(mn)(f+gx)^2}{nn}$, которое уравненіе раздѣливъ на $f+gx$, получишь $h+kx = \frac{mn(f+gx)}{nn}$ т. е. $hnn+knnx = fmn+gmnx$; отсюда найдется $x = \frac{fnn-hnn}{knn-gmn}$.

855.

Для изъясненія сего пусть предложень будетъ сей вопросъ.

Найди числа x такъ, что если изъ удвоеннаго ихъ квадрата вычтешь 2, тобы остатокъ былъ квадратъ?

Понеже $2xx-2$ должно быть квадратное число, то надлежитъ здѣсь смотрѣть, чтобъ сию формулу чрезъ слѣдующихъ множителей представить $2(x+1)(x-1)$. Полагая корень $= \frac{m(x+1)}{n}$ будетъ

$2(x+1)(x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; раздѣливъ на $x+1$ и помноживъ на nn получится $2nnx - 2nn = mmx + mm$, а отсюда $x = \frac{mm+2nn}{2nn-mm}$.

Возьми здѣсь $m=1$ и $n=1$ будетъ $x=3$, $2xx-2=16=4^2$; положи $m=3$ и $n=2$ выдѣсть

дсть $x = -17$; но понеже здѣсь квадратъ числа x входитъ въ разсужденіе, то все равно, будетъ ли $x = -17$, или $x = +17$: ибо изъ обоихъ получится $2xx - 2 = 576 = 24^2$.

856.

Пусть дана будетъ сія формула $b + 13x + 6xx$, которую квадратомъ здѣлать надлежитъ. Здѣсь $a = 6$, $l = 13$ и $c = 6$, гдѣ слѣдовательно ни a ни c не квадратъ; и такъ смотри не квадратъ ли $bb - 4ac$; но здѣсь выходитъ 25, то видно что сію формулу въ двухъ множителяхъ представить можно, кои суть $(2 + 3x)(3 + 2x)$. Пусть будетъ корень сего $\frac{m(+3x)}{n}$, то $(2 + 3x)(3 + 2x) = \frac{mm(2 + 3x)^2}{nn}$, отсюда $3nn + 2nnx = 2mm + 3mmx$, и $x = \frac{2mm - 3nn}{2nn - 3mm} = \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}$.

А чтобы числитель былъ положительной, то $3nn$ должны быть больше нежели $2mm$, или $2mm$ меньше $3nn$, слѣдовательно $\frac{mm}{nn}$ меньше быть должно нежели 3; чтобъ числитель былъ положительной;

но чтобъ знаменатель также былъ при-
быточный, то $3m$ должны быть больше
нежели $2n$; следовательно $\frac{m}{n}$ должно
быть больше $\frac{2}{3}$ хъ: и такъ чтобъ вмѣсто
 x найти положительныя числа, то вмѣ-
сто m и n такія числа брать надлежитъ,
чтобъ $\frac{m}{n}$ меньше было $\frac{2}{3}$ хъ, а больше
 $\frac{2}{3}$ хъ. Положи теперь $m=6$ и $n=5$, бу-
дешь $\frac{m}{n}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}$ меньше $\frac{2}{3}$ хъ и очевидно боль-
ше $\frac{2}{3}$ хъ, откуда найдется $x=\frac{1}{5}$.

857.

IV. Сей третей случай ведетъ насъ
къ четвертому, которой тогда мѣсто
имѣетъ, когда формулу $a+bx+cx^2$ мо-
жно раздробить на двѣ части такъ, что
первая будетъ квадратъ, а другая на два
множителя разрѣшится, такъ что вмѣ-
сто первой выдетъ такая формула $pp+qr$,
гдѣ буквы p , q и r такую формулу $f+gx$
означаютъ, и тогда надлежитъ только
положить $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, получит-

ся $pp + qr = pp + \frac{2mpq}{n} + \frac{mq^2}{nn}$, гдѣ pp уничтожается, а остальные члены на q дѣлятся, такъ что $r = \frac{2mp}{n} + \frac{mq}{nn}$, или $nir = 2mip + mqq$, откуда легко найдется x ; и сей то есть четвертой случай, въ которомъ формулу нашу квадратовъ сдѣлать можно и которой мы примѣромъ изъяснить намѣрены.

858.

Вопросъ. Найдти такія числа x , чтобъ ихъ удвоенной квадратъ единицею былъ больше другаго квадрата, или когда изъ онаго отнимешь 1 цу, чтобъ въ остаткѣ былъ квадратъ? какъ то съ числомъ 5 дѣлается, коего квадратъ 25 дважды взятой есть 50: изъ него отнявъ 1 цу останется квадратъ 49.

По сему $2xx - 1$ должно быть квадратъ, гдѣ по нашей формулѣ $a = -1$, $b = 0$ и $c = 2$; здѣсь ни c ни a не квадратъ и не можеть такожде на два множителя разрѣшиться, по тому что $bb - 4ac = 8$ не квадратъ: и такъ ни одинъ изъ первыхъ трехъ случаевъ мѣста не имѣють.

А по четвертому можно сию формулу представить такъ: $xx + xx - 1 = xx + (x+1)(x-1)$, откуда корень положивъ $= x + \frac{m(x+1)}{n}$ будетъ $xx + (x+1)(x-1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ xx унп-чтожается, а остальные члены на $x+1$ раздѣлиться могутъ; и выдстъ $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$; по чему $x = \frac{mm + nn}{nn - 2mn - mm}$ и понеже въ нашей формулѣ $2xx - 1$ попадаетъ только квадратъ xx , то все равно, выдстъ ли x положительной или отрицательной; можно также и $-m$ поставить вмѣсто $+m$, чтобъ получить $x = \frac{mm + nn}{nn + 2mn - mm}$. Возми здѣсь $m = 1$ и $n = 1$, найдется $x = 1$ и $2xx - 1 = 1$; положи еще $m = 1$ и $n = 2$, будетъ $x = \frac{5}{3}$ и $2xx - 1 = \frac{1}{3}$; а когда возмется $m = 1$ и $n = -2$, выдстъ $x = -5$, или $x = +5$, $2xx - 1 = 49$.

859.

Вопросъ. Найти такія числа, къ удвоенному коихъ квадрату когда придастся 2, чтобъ вышелъ квадратъ? Такое число есть

есть 7, котораго квадратъ дважды взятой есть 93, придавъ 2 получимся квадратъ 100.

И такъ сія формула $2xx+2$ должна быть квадратъ, гдѣ $a=2$, $b=0$ и $c=2$, слѣдовательно ни a ни c не квадратъ, также и $bb-4ac$ не квадратъ и третіе правило имѣть здѣсь мѣста не можетъ.

А по четвертому правилу можно нашу формулу такъ представить.

Положи первую часть $=4$ будетъ вторая $2xx-2=2(x+1)(x-1)$ и по сему формула наша $4+2(x+1)(x-1)$, коей корень пусть будетъ $2+\frac{m(x+1)}{n}$; откуда выходитъ сіе уравненіе $4+2(x+1)(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, гдѣ 4 уничтожаются, а остальные члены на $x+1$ можемъ раздѣлится, такъ что $2nx-2nn=4mn+mmx+mm$, слѣдовательно $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Положи $m=1$ и $n=1$, будетъ $x=7$ и $2xx+2=100$; возьми $m=0$ и $n=1$ выдетъ $x=7$ и $2xx+2=4$.

860.

Часто случается, что ни первое, ни второе, ни третіе правило имѣть мѣста не могутъ, а по четвертому формулы на двѣ такія части, какія требуются, раздѣлить не можно. Такъ когдабы сія формула случилась $7 + 15x + 15xx$, то хотя такое раздробленіе и возможно; но не скоро оно видѣть можно. Ибо первая часть есть $(1-x)^2$, или $1 - 2x + xx$, по сему другая будетъ $6 + 17x + 12xx$, которая для того множителей имѣетъ, что $17^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1$, и слѣдовательно квадрать; два множителя изъ сего уравненія дѣйствительно суть $(2 + 3x)(3 + 4x)$, такъ что сію формулу по четвертому правилу разрѣшить можно.

Но не лзя требовать, чтобъ кто сіе раздѣленіе угадать могъ; чего ради намѣрены мы еще общей путь показать къ познанію, возможно ли такую формулу раздробить; ибо бесконечно много есть такихъ, которыхъ рѣшенія совсѣмъ не возможны, какъ наприм. въ сей формулѣ $5xx + 2$, которую никогда квадратомъ сдѣлать не можно. Но естьли найдется

дешя формула въ нѣкоторомъ случаѣ возможна, то легко можемъ найти всѣ ея рѣшенія; что мы здѣсь еще изъяснимъ.

861.

Вся польза, которая въ такихъ случаяхъ быть можетъ, состоитъ въ томъ, возможно ли какой случай найти, или отгадать, въ которыхъ бы формула $a + bx + cx^2$ была квадратъ. Для того вмѣсто x спая малыя числа по порядку, и смотри не выйдетъ ли квадрата. Но что бы сей трудъ облегчить, ежели вмѣсто x ломаныя числа иногда полагая требуемое получается, то можно заразъ поспавить вмѣсто x дробь; яко $\frac{t}{u}$, откуда раждается сѣя формула, $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, которая, ежели будетъ квадратъ, помножена на uu дастъ также квадратъ. И такъ нужно только пробовать не можно ли отгадать t и u въ цѣлыхъ числахъ, чшобъ сѣя формула $auu + btu + ctt$ была квадратъ, ибо тогда положивъ $x = \frac{t}{u}$, будетъ также сѣя формула $a + bx + cx^2$ заподлинно квадратъ. Но

Но когда не смотря на весь сей трудъ, никакого случая не найдется, то имѣемъ мы большую причину думать, что такой формулы сдѣлать квадратомъ совсѣмъ не возможно, какихъ есть безконечное множество.

862.

Когда же случаи отгаданъ, въ которомъ формула будетъ квадратомъ, то легко найти всѣ возможные случаи, въ которыхъ она равнымъ образомъ будетъ квадратъ, и число оныхъ всегда безконечно велико. Для показанія сего, рассмотримъ въпервыхъ формулу $a+bx+cx^2$, гдѣ $a=9$, $b=14$ и $c=7$, оное, какъ явствуетъ, будетъ квадратъ, когда $x=1$, чего ради положи $x=1+y$, будетъ $xx=1+2y+yy$, и формула наша будетъ $9+14y+7yy$, въ которой первой членъ есть квадратъ, и такъ по второму правилу полагая корень ся $=3+\frac{my}{n}$ получимъ сіе уравненіе $9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, гдѣ 9 уничтожаются, а остальные члены на y могутъ раздѣлиться,

ся,

ся, и выдеть $14nn + 7nnu = 6mn + mnu$;

слѣдовательно $u = \frac{6mn - 14nn}{7nn - mn}$, и наконецъ

$u = \frac{6mn - 7nn - mn}{7nn - mn}$, гдѣ вмѣсто m и n

всѣ произволяющія числа брать можно.

Положи теперь $m=1$ и $n=1$ будетъ $x=-\frac{1}{2}$, или также, за тѣмъ что xx входятъ, $x=+\frac{1}{2}$, по сему будетъ $2+7xx=\frac{3}{2}$.

Возми еще $m=3$ и $n=1$, будетъ $x=-1$; или $x=+1$, но положивъ $m=-3$, $n=1$, выдеть $x=17$, а отсюда $2+7xx=2025$ квадратъ $45mn$.

Пусть также будетъ $m=8$, а $n=3$ получится $x=-17$ какъ и прежде.

Положимъ $m=8$, а $n=-3$ выдеть $x=217$; а отсюда $2+7xx=514089=717^2$.

863.

Разсмотримъ еще сію формулу, $5xx + 3x + 7$, которая будетъ квадратъ, когда $x=-1$; и такъ положи $x=y-1$, чего ради формула наша перемѣнится въ сію

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline \end{array}$$

$5yy$

$5yy-7y+9$ квадратной ся корень положи $=3-\frac{my}{n}$, будетъ $5yy-7y+9=9-\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}$, откуда получимъ $5nyy-7nn=-6mn+mm$ и $y=\frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, слѣдовательно $x=\frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$. Возми $m=2$, $n=1$, будетъ $x=-6$, и слѣдовательно $5xx+3x+7=169=13^2$.

Положивъ $m=-2$ и $n=1$ найдется $x=18$, и $5xx+3x+7=1681=41^2$.

864.

Разсмотримъ еще формулу $7xx+15x+13$ и положимъ $x=\frac{t}{u}$, такъ чтобъ формула $7tt+15tu+13uu$ была квадратъ; попробуй теперь вмѣсто t и u брать малыя числа, какъ слѣдуетъ.

Если $t=1$ и $u=1$ будетъ наша формула $=35$

$$t=2 \text{ и } u=1 \text{ — — — — — } =71$$

$$t=2 \text{ и } u=-1 \text{ — — — — — } =11$$

$$t=3 \text{ и } u=1 \text{ — — — — — } =121$$

Понеже 121 есть квадратъ, и слѣдовательно $x=3$ удовлетворяетъ; положи

те-

теперь $x=y+3$, формула наша будетъ
 $7yy+42y+63+15y+45+13$ или $7yy$
 $+57y+121$, коей корень положи $=11$
 $+\frac{my}{n}$, и получимся $7yy+57y+121=121$
 $+\frac{22my}{n}+\frac{mmu}{nn}$, или $7nnu+57m=22mn$
 $+mmu$, откуда $y=\frac{57nn-22mn}{mm-7nn}$, а x
 $=\frac{56nn-22mn+3mm}{mm-7nn}$. Возми на прим. $m=3$
и $n=1$ будетъ $x=-\frac{5}{2}$ и формула наша $7xx$
 $+15x+13=\frac{25}{4}=(\frac{5}{2})^2$.

Пусть еще будетъ $m=1$ и $n=1$, вы-
детъ $x=-\frac{17}{2}$; положи $m=-3$ и $n=1$, най-
дется $x+\frac{129}{2}$, и формула наша $7xx+15x$
 $+13=\frac{120409}{4}=(\frac{347}{2})^2$.

865.

Иногда весь трудъ бываетъ напрас-
сень, чтобъ отгадать случай, въ кото-
ромъ бы предложенная формула была ква-
дратъ; какъ на прим. съ формулою дѣ-
лается $3xx+2$ или когда вмѣсто x воз-
мется $\frac{t}{u}$; то съ ссю $3tt+2uu$, которая,
какія бы вмѣсто t и u числа взяты ни
были, никогда квадратомъ не будетъ.

Томъ II.

С

Та-

Такихъ формулъ, коихъ ни коимъ образомъ квадратомъ здѣлать не лзя, есть безконечное множество, и для того сподруда дать нѣкоторые признаки, по которымъ бы сію въ нихъ невозможность познать можно было, дабы сей трудъ, чрезъ отгадываніе находить такіе случаи, въ которыхъ квадраты выходить, не было тщетно, къ чему слѣдующая глава служить.

Г Л А В А V.

О случаяхъ, въ которыхъ формула $a+bx+cx^2$ никогда квадратомъ быть не можетъ.

866.

Когда общая наша формула состоитъ изъ трехъ членовъ, то надлежитъ принять, что оную завсегда въ другую перемѣнить можно, въ которой средняго члена недоспаетъ. Сіе дѣлается положивъ

$x = \frac{y-b}{2c}$; по чему формула наша получается сей видъ $a + \frac{by-bb}{2c} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$

ИЛИ

или $\frac{4ac - bb + uu}{4c}$, но понеже сѣя формула должна быть квадратъ, то положивъ его $= \frac{zz}{4}$ будетъ $4ac - bb + uu = czz$, слѣдовательно $uu = czz + bb - 4ac$. И такъ ежели наша формула должна быть квадратъ, то будетъ итакже и $czz + bb - 4ac$ квадратъ и обратно; слѣдовательно когда вмѣсто $bb - 4ac$ напишемъ t , то все дѣло въ томъ состоитъ, узнать, можетъ ли такая формула быть квадратъ или нѣтъ; а поелику сѣя формула состоитъ только изъ двухъ членовъ, то безспорно легче разсуждать о ея возможности или невозможности, что по свойству обоихъ чиселъ c и t учиниться можетъ.

867.

Когда $t = 0$, то явствуетъ, что формула czz , тогда только будетъ квадратъ, когда число c квадратъ; ибо одинъ квадратъ раздѣленный на другой, въ частномъ даютъ квадратъ: такъ czz не можетъ быть квадратъ, ежели $\frac{czz}{zz}$, т. е. c не квадратъ; слѣдовательно когда c не квадратъ, то формула czz ни коимъ

С 2

обра-

образомъ квадрать быть не можетъ. Но если s само по себѣ есть квадратное число, то и s^2 будетъ также квадратъ, какія бы числа вмѣсто s взяты ни были.

868.

А что бы можно было разсуждать и о другихъ случаяхъ, то надлежитъ намъ въ помощь взять то, что прежде говорено было, о разныхъ родахъ чиселъ, въ разсужденіи каждаго дѣлителя.

Такъ въ разсужденіи дѣлителя 3 числа бываютъ прозякаго рода: первой содержишь тѣ числа, кои на 3 дѣлятся нацѣло и въ формулѣ $3n$ представляются.

До втораго рода надлежатъ тѣ, кои раздѣленные на 3, даютъ въ остаткѣ 1 и въ формулѣ $3n+1$ содержатся.

Третій родъ заключаетъ въ себѣ числа, кои раздѣленные на 3, даютъ остатокъ 2 и содержатся въ формулѣ $3n+2$.

Если всѣ числа въ одной изъ сихъ трехъ формулъ содержатся, то разсмотримъ теперь ихъ квадраты.

Когда число содержится въ формулѣ $3n$, то будетъ его квадратъ $9m$, второй

порой не только на 3, но и на 9 дѣлится.

Буде же число во второй формулѣ $3n+1$ содержится, то квадратъ его есть $9nn+6n+1$, которой раздѣлень будучи на 3 дастъ въ частномъ $3nn+2n$, а въ остаткѣ 1, слѣдовательно до втораго рода надлежитъ.

Ежели же наконецъ содержится число въ формулѣ $3n+2$, то квадратъ его есть $9nn+12n+4$, которой раздѣливъ на 3, выдешъ $3nn+4n+1$, а остатокъ 1 и слѣдовательно надлежитъ также до втораго рода $3n+1$. Откуда видно, что всѣ квадратныя числа въ разсужденіи дѣлителей 3хъ, суть только двоякаго рода, ибо они, или на 3 могутъ раздѣлиться на цѣло, и тогда неопмѣнно раздѣлятся также и на 9, или ежели на 3 раздѣлиться не могутъ, то остатокъ бываетъ всегда 1, а 2 никогда; слѣдовательно ни одно число содержащееся въ формулѣ $3n+2$ квадратъ быть не можетъ.

869.

Изъ сего можемъ мы легко показать, что формула $3xx+2$, никогда квадратомъ

С 3

не

не будетъ, хотя бы вмѣсто x цѣлое, или ломаное число взято было; ибо когда x цѣлое число и формула $3xx+2$ на 3 раздѣлится, то останется 2, слѣдовательно сія формула квадратъ быть не можетъ; но ежели x дробь, то положи ево $=\frac{t}{u}$, о которой дроби можемъ мы принять, что она въ самой уже меньшей видѣ приведена и слѣдовательно $\frac{t}{u}$ никакого общаго дѣлителя кромѣ 1 не имѣетъ.

Ежели бы $\frac{3tt}{uu}+2$ было квадратное число, то помноживъ на uu , т. е. $3tt+2uu$ надлежало бы быть квадрату; но сему равнымъ образомъ спастись не лзя: ибо число u , или можетъ на 3 раздѣлиться, или нѣтъ; ежели можетъ, то не раздѣлится t , по тому что иначе бы t и u общаго дѣлителя имѣли.

И такъ положивъ $u=3f$ формула наша будетъ $3tt+18ff$, которая раздѣленная на 3 даетъ $tt+6ff$, которая паки на 3 раздѣлиться не можетъ, какъ для квадрата требуется; ибо хотя $6ff$ и могутъ раз-

раздѣлиться, но tt , раздѣленное на 3 даетъ въ остаткѣ 1.

Но когда u на 3 раздѣлиться не можетъ, то смотри, что будетъ въ остаткѣ. Понесе первой членъ на 3 можетъ раздѣлиться, то все дѣло состоитъ только въ остаткѣ втораго члена; но теперь uu раздѣленное на 3, даетъ въ остаткѣ 1, или оно есть число сего рода $3n+1$, по чему $2uu$ будетъ число сего рода $6n+2$ и слѣдовательно раздѣленное на 3, даетъ остатокъ 2; чего ради формула наша $3tt+2uu$ раздѣленная на 3, даетъ въ остаткѣ 2, и заподлинно квадратъ быть не можетъ.

870.

Такимъ же образомъ можно доказать, что и сія формула $3tt+5uu$, никогда квадратомъ не будетъ, да и ни одна изъ сихъ $3tt+8uu$, или $3tt+11uu$ или $3tt+14uu$ и проч., гдѣ числа 5, 8, 11, 14 и проч. раздѣленные на 3, даютъ въ остаткѣ 2, ибо если бы u на 3 могло раздѣлиться, то t не можетъ. Положи $u=3s$, то бы формула раздѣлилась на 3, а на 9 нѣтъ.

С 4

Есть-

Естьли же n на 3 не дѣлимо, и слѣдовательно n есть число сего рода $3n+1$, то хотя бы первой членъ $3tt$ на 3 и раздѣлился, но другой $5nn$ сей формулы $15n+5$, или $8nn$ изъ сей $24n+8$, или $11nn$ изъ $33n+11$ и проч. раздѣливъ на 3 получится въ остаткѣ 2, и слѣдовательно квадратъ быть не можетъ.

871.

Сіе самое бываетъ съ общією формулою $3tt+(3n+2)nn$, которая никогда квадратъ не будетъ, да и тогда также, когда вмѣсто n положатся отрицательныя числа; такъ когда $n=-1$, то не возможно чтобы сія формула $3tt-nn$ была квадратомъ. Ибо ежели n на 3 дѣлился, то дѣло уже извѣстно, а когда бы n на 3 не дѣлилось, то было бы n число сего рода $3n+1$ а формула наша $3tt-3n-1$, которую раздѣливъ на 3, получится въ остаткѣ -1 , къ которой ежели приложится 3, выйдетъ $+2$. Положи вообще $n=-m$, будетъ наша формула $3tt-(3m-2)nn$, которая никогда квадратъ быть не можетъ.

872.

872.

Къ сему привело насъ разсужденіе дѣлителя 3 хъ, разсмотримъ теперь дѣлителя 4 ; ибо тогда всѣ числа содержащіяся въ сихъ формулахъ ,

I $4n$; II $4n+1$; III $4n+2$; IV $4n+3$.

Числа перваго роду квадратъ есть $16n$ и можетъ на 16 раздѣлиться, когда же число втораго рода $4n+1$, то квадратъ его $16n+8n+1$, которой раздѣливъ на 8, даетъ остатокъ 1 и надлежитъ до формулы $8n+1$, а ежели будетъ число третьяго роду $4n+2$, то квадратъ онаго $16n+16n+4$, которой раздѣливъ на 16, получится въ остаткѣ 4; и слѣдовательно въ формулѣ $16n+4$ содержится, буде же наконецъ число четвертаго роду $4n+3$, то квадратъ его $16n+24n+9$, которой раздѣливъ на 8, въ остаткѣ будетъ 1.

873.

Изъ сего научаемся мы слѣдующему: вопервыхъ, что всѣ четныя квадратныя числа въ формулѣ нашей $16n$, или въ сей $16n+4$ содержатся; слѣдовательно всѣ

остальные четныя формулы, т.е. $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$, $16n+12$, $16n+14$, никогда квадратами быть не могутъ.

По томъ изъ нечетныхъ квадратовъ усматриваемъ мы, что всѣ они въ формулѣ $8n+1$ содержатся, или раздѣливъ на 8 даютъ въ остаткѣ 1, по сему всѣ прочія нечетныя числа, которыя въ одной изъ сихъ формулъ $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ содержатся, квадратами быть не могутъ.

874.

По сему основанію можемъ мы пакы показать, что формула $5tt+2nn$ квадратомъ не будетъ; ибо или оба числа суть нечетныя, или одно четное а другое нечетное, по тому что оба вдругъ четныя быть не могутъ, въ противномъ случаѣ 2 былъ бы ихъ общей дѣлитель; ежели оба нечетныя и слѣдовательно какъ tt такъ и nn содержатся въ формулѣ $8n+1$, то первой членъ $5tt$ раздѣливъ на 8 дасть въ остаткѣ 3, а второй членъ 2, оба вмѣстѣ 5, и слѣдовательно не квадратъ.

Но

Но ежели бы t было четное число, а u нечетное, то первой бы членъ $3tt$ раздѣлился на 4, а другой $2uu$ раздѣленной на 4 въ остаткѣ далъ бы 2, оба вмѣстѣ 2, и слѣдовательно не квадратъ. Если бы наконецъ u было четное, а именно $=2s$, а t нечетъ, слѣдовательно $tt=8n+1$, то наша формула была бы $24n+3+8ss$, которую раздѣливъ на 8, получится въ остаткѣ 3; и такъ квадратомъ быть не можетъ.

Равнымъ образомъ сіе доказательство можно употребить и въ сей формулѣ $3tt+(8r+2)uu$, также и въ сей $(8m+3)tt+2uu$, да и въ сей такожде $(8m+3)tt+(8n+2)uu$, гдѣ вмѣсто m и n всѣ цѣлыя числа какъ положительныя такъ и отрицательныя брать можно.

875.

Такимъ же образомъ приступимъ мы далѣе къ дѣлишелоу 5, въ рассужденіи котораго всѣ числа содержатся въ одной изъ сихъ формулъ:

I) $5n$; II) $5n+1$; III) $5n+2$; IV) $5n+3$; V) $5n+4$.
Если число будетъ перваго роду, то его квадратъ есть $25nn$, которой не

толь-

только на 5, но и на 25 раздѣлиться можетъ.

Буде же число будетъ втораго роду, то квадратъ его $25m+10n+1$, которой раздѣливъ на 5, останется 1; и слѣдовательно въ формулѣ $5n+1$ содержится. Если же число претьяго рода, то квадратъ онаго есть $25m+20n+4$, которой раздѣливъ на 5 дастъ въ остатокъ 4.

Когда же число четвертаго рода, то квадратъ его есть $25m+50n+9$, которой раздѣливъ на 5 останется 4.

А еслии наконецъ будетъ число пятаго рода, то квадратъ онаго $25m+40n+16$, которой раздѣливъ на 5 даетъ остатокъ 1. И такъ ежели квадратное число на 5 раздѣлиться не можетъ, то остатокъ бываетъ всегда или 1, или 4, а никогда 2 или 3; по чему въ сей формулѣ $5n+2$ и $5n+3$ квадратъ содержится не можетъ.

876.

По сему основанію можемъ мы также доказать, что ни формула $5tt+2nn$, ниже сія $5tt+3nn$ квадратами не будутъ, ибо n на 5 или дѣлимо или нѣтъ: въ первомъ

вомъ случаѣ сіи формулы могли бы раздѣлились на 5, а на 25 нѣтъ, слѣдовательно квадратами быть не могутъ; но если и на 5 недѣлимо, то *ии* равно или $5n+1$ или $5n+4$; въ первомъ случаѣ будетъ формула $5tt+10n+2$, которую раздѣливъ на 5 останется 2, а другая будетъ $5tt+15n+3$, которую когда раздѣлишь на 5, въ остаткѣ будетъ 3, и слѣдовательно квадратъ быть не можетъ. Но ежели $ии=5n+3$, то первая формула выдетъ $5tt+10n+8$, которая когда раздѣлившись на 5, въ остаткѣ будетъ 3, а другая $5tt+15n+12$, которую раздѣливъ на 5 останется 2; слѣдовательно и въ семъ случаѣ также квадратъ быть не можетъ.

Отсюда такожде явствуется, что ни сія формула $5tt+(5n+2)ии$, ниже сія $5tt+(5n+3)ии$ квадратами не будутъ: ибо такіе же выдутъ остатки какъ и прежде; да можно также и въ первомъ членѣ поставить 5 mtt , гдѣ только m на 5 недѣлимо.

877.

Всѣ четные квадраты въ формулѣ $4n$, а всѣ нечетные въ формулѣ $4n+1$
со-

содержатся, и понеже ни $4n+2$, ниже $4n+3$ квадрата быть не можетъ, то слѣдуетъ отсюда, что общая формула $(4m+3)tt+(4n+3)uu$ никогда квадратъ не будетъ; ибо если бы t было четное число, то бы tt раздѣлилось на 4, а другой бы членъ раздѣленной на 4 оставилъ 3. Но когда оба числа t и u нечетныя, то вышли бы остатки изъ tt и uu 1, слѣдовательно изъ цѣлой формулы осталось бы 2; но понеже нѣтъ ни одного числа, которое раздѣленное на 4 оставляетъ 2, было бы квадратное. При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ m , такъ и n , можно взять отрицательные и 0 такожде; по чему ни формула $3tt+3uu$, ниже сія $3tt-uu$ квадратомъ быть не можетъ.

878.

Когда мы изъ теперешнихъ дѣлителей нашли, что нѣкоторые роды чиселъ, никогда квадратами быть не могутъ, то сіе самое имѣстъ также мѣсто и при всѣхъ другихъ дѣлителяхъ, а именно что есть нѣкоторые роды чиселъ, коихъ квадраты не возможны.

Пусть

Пусть будетъ дѣлитель 7, то всѣ числа въ слѣдующихъ 7 ми родахъ заключаются, которыхъ мы рассмотримъ также и квадраты.

роды чиселъ,	ихъ квадраты	надлежитъ до рода
I. $7n$	$49nn$	$7n$
II. $7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III. $7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV. $7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V. $7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI. $7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII. $7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Понеже квадраты, которые на 7 не дѣлятся, содержатся въ одномъ изъ сихъ трехъ родовъ: $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, то другіе 3 рода изъ свойства квадратовъ совсѣмъ исключаются, кои суть $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$. Причина сему видна, по тому что всегда два рода чиселъ наименьше можно, коихъ квадраты принадлежатъ до одного рода.

879.

Для уразумѣнія сего надлежитъ примѣчать, что послѣдней родъ $7n+6$ можетъ изъясниться также чрезъ $7n+1$, равнымъ образомъ формула $7n+5$, съ $7n+2$ одина-

одинаковы; такожде $7n+4$ то же, что и $7n-3$: но известно что квадраты сихъ двухъ родовъ чиселъ $7n+1$ и $7n-1$ раздѣленные на 7, даютъ остатки одинакіе, а именно 1 цу; подобнымъ образомъ также квадраты сихъ двухъ родовъ $7n+2$ и $7n-2$ одинаковы.

880.

И такъ вообще, какого бы свойства дѣлитель ни былъ, котораго означимъ мы буквою d , то произшедшія отсюда разныхъ родовъ числа, суть слѣдующія:

 dn $dn+1, dn+2, dn+3$ и проч. $dn-1, dn-2, dn-3$ и проч.

гдѣ квадраты изъ $dn+1$ и изъ $dn-1$ сіе вообще имѣютъ, что раздѣленные на d даютъ остатокъ 1, и слѣдовательно оба надлежатъ до одного рода $dn+1$. Равнымъ образомъ то же бываетъ съ обоими родами $dn+2$ и $dn-2$, коихъ квадраты надлежатъ до рода $dn+4$.

И по сему вообще то же дѣлается съ двумя родами $dn+a$ и $dn-a$, коихъ квадраты раздѣленные на d , даютъ одинакой

кой остатокъ, а именно aa , или такой же остатокъ, какъ когда aa раздѣлено на d .

881.

Симъ образомъ получится безконечное множество такихъ формулъ, какъ $att + buu$, кои никогда квадратами не будутъ; такъ изъ дѣлителя 7 мы, легко познавша, что ни одна изъ сихъ формулъ $7tt + 3uu$; $7tt + 5uu$ и $7tt + 6uu$ никогда квадратомъ быть не можетъ; по тому что u раздѣленное на 7 , даетъ въ остаткѣ или 1 , или 2 , или 4 . По томъ изъ первой формулы остается или 3 , или 6 , или 5 ; а изъ второй или 5 , или 3 , или 6 ; изъ третьей или 6 или 5 , или 3 , чему ни при какомъ квадратѣ стать не лзя. Ежели теперь такія формулы случатся, то тщетной будетъ трудъ попасть на такой случай, гдѣ бы могъ выйти квадратъ, и для того сие разсужденіе есть великой важности.

Но ежели предложенная формула не такого свойства будетъ, и можно отгадать нѣкоторой случай, въ которомъ дѣлается она квадратъ, то показано уже

Томъ II.

Т

въ

въ прежней главѣ, какимъ образомъ отсюда безконечное множество другихъ случаевъ находить должно.

Предложенная формула была собственно $axx + 1$, и поуже вмѣсто x находились обыкновенно дроби, для того положи мы $x = \frac{t}{u}$, такъ что сію формулу $att + buu$ квадратомъ здѣлать должно было.

Безконечное также множество бываетъ случаевъ, гдѣ x и въ самыхъ цѣлыхъ числахъ изъявленъ быть можетъ; а какимъ образомъ оные случаи находить, слѣдующая глава покажетъ.

Г Л А В А VI.

О случаяхъ, въ которыхъ формула $axx + b$ будетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

882.

Видѣли уже мы, какимъ образомъ формула $a + bx + cxx$ перемѣнять должно, чтобъ средней членъ уничтожился; и по сему довольно будетъ съ насъ, когда мы

насто-

настоящее разсужденіе къ сей только формулѣ $axx+b$ присвоимъ ; при чемъ примѣчать надлежитъ, что вмѣсто x одни цѣлыя числа, изъ коихъ формула квадрать будетъ, находить должно.

Прежде всего потребно здѣсь, чтобъ такая формула сама по себѣ была возможна; ежели же она не возможна, то и положенныя вмѣсто x дроби, не упоминая о цѣлыхъ числахъ имѣшь мѣста не могутъ.

883.

И такъ положи сию формулу $axx+b = yy$, гдѣ буквы x и y цѣлыя числа быть должны , по тому что a и b суть такія же.

На сей конецъ необходимо нужно знать или угадать одинъ случай въ цѣлыхъ числахъ, ибо иначе весь бы трудъ былъ тщетной, искать больше такихъ случаевъ, ежели бы случилось, что сама формула не возможна.

Положимъ что сія формула квадратомъ быть можетъ, ежели положимся $x=f$, и пусть ея квадратъ будетъ $=gg$, такъ что $aff+b=gg$, гдѣ f и g извѣст-

Т 2

ныя

ныя числа, и слѣдовательно осталось теперь только, какимъ образомъ изъ сего случая другіе вывести можно: сіе разысканіе шѣмъ важнѣе, чѣмъ больше оно трудностямъ подвержено, но кои мы пресодолѣемъ слѣдующими приемами.

884.

Найдено уже, что $aff + b - gg$ и сверхъ сего должно быть $axx + b$ yy , вычти прежнее уравненіе изъ сего послѣдняго, то получится $axx - aff = yy - gg$, что въ множителяхъ представить можно такъ: $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; помножь съ обѣихъ сторонъ на pq , выдѣсть $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$: но чтобы вывести оттуда равенство, то здѣлай сіе раздѣленіе $ap(x+f) = q(y+g)q(x-f) = p(y-g)$, и изъ сихъ обѣихъ уравненій ищи обѣ буквы x и y ; первое раздѣливъ на q дастъ $y + g = \frac{apx + apf}{q}$, а второе раздѣливъ на p дастъ $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; сіе вычти изъ прежняго, останется $2g = \frac{f(qq + pra) + x(app - qq)}{qp}$

ПОМНО-

помноживъ на pq выдешъ $2pqg = (app - qq)$
 $x + (app + qq)f$, отсюда $x = \frac{2gprq}{app - qq} \frac{(app + qq)f}{app - qq}$
 а изъ сего по томъ найдется $y = g + \frac{2gqq}{app - qq}$
 $-\frac{(app + qq)fa - qf}{(app + qq)p}$, гдѣ первые два члена
 содержатъ букву g , кои соединивъ вмѣ-
 стѣ дають $\frac{g(app + qq)}{app - qq}$, а другіе два члена
 имѣють букву f , и подъ однимъ знамена-
 телемъ дають $-\frac{2afpq}{app - qq}$, слѣдовательно y
 получится $= \frac{g(app + qq) - 2afpq}{app - qq}$.

885.

Сей трудъ кажется, что съ нашимъ
 намѣреніемъ не сходствуешь; ибо здѣсь
 пришли мы къ ломаннымъ числамъ, когда
 намъ вмѣсто x и y цѣлыя числа искать
 должно; чего ради получили бы мы дру-
 гой новой вопросъ, какія числа вмѣсто p
 и q взять надлежитъ, чтобы избѣжать
 дроби, которой вопросъ еще труднѣе ка-
 жется нежели нашъ главный. Но можно
 здѣсь употребить другое искусство, ко-

имъ мы легко наше намѣреніе достигнемъ;
ибо когда здѣсь все въ цѣлыхъ числахъ

изъявить должно, то положи $\frac{app + qq}{app - qq} =$
 m и $\frac{2pq}{app - qq} = n$, дабы имѣть $x = ng - mf$, и

$y = mg - na$. Здѣсь не можемъ мы взять
 m и n по изволению; но они такъ
должны быть опредѣлены, чтобъ съ

прежними опредѣленіями сходствовали.

На сей конецъ рассмотримъ мы ихъ ква-

драты, и будетъ $mm = \frac{aar^* + 2arppqq + q^*}{aar^* - 2arppqq + q^*}$
а $nn = \frac{4ppqq}{aar^* - 2arppqq + q^*}$; откуда найдется

$mm - ann = \frac{aar^* + 2arppqq + q^* - 4arppqq}{aar^* - 2arppqq + q^*}$

$= \frac{aar^* - 2arppqq + q^*}{aar^* - 2arppqq + q^*} = 1.$

886.

Изъ сего явствуешь, что числа m и
 n такого свойства быть должны, чтобъ
 $mm - ann = 1$; но понеже a есть извѣстное
число, то прежде всего надлежитъ най-
ти вмѣсто n такое цѣлое число, чтобъ
 $ann - 1$ было квадратъ, котораго корень
есть m , а какъ скоро оное найдется и
сверхъ

сверхъ того еще число f , чтобъ $aff + b$ было квадратъ m . е. gg , то получатся вмѣсто x и y слѣдующія величины въ цѣлыхъ числахъ: $x = ng - mf$, $y = mg - naf$, откуда $axx + b = yy$.

887.

Само собою явствуетъ, что когда однажды n найдено, то можно вмѣсто его поставить $-n$, по тому что квадратъ онаго m есть одинаковъ.

Для нахождения x и y въ цѣлыхъ числахъ, чтобы $axx + b = yy$ было, надлежитъ прежде всего знать такой случай, чтобъ $aff + b = gg$ и какъ скоро сей случай извѣстенъ будетъ, то должно еще къ числу a найти такія числа m и n , чтобъ $ann + 1 = mm$ было; о чемъ въ слѣдующемъ показано будетъ. Когда же сѣ здѣлано будетъ, то получится заразъ новый случай, а именно $x = ng + mf$ и $y = mg + naf$, и будетъ $axx + b = yy$.

Поставь сей новый случай на мѣсто прежняго, которой былъ взять за извѣстной, и напиши $ng + mf$ вмѣсто f , а $mg + naf$ вмѣсто g , то получатся вмѣсто

x и y новыя пакы знаменованія, изъ которыхъ еще, когда они вмѣсто f и g поспаваятся, другія новыя выдуть, и такъ далье: такъ что ежели съ начала одинъ только такой случай былъ извѣстенъ, то изъ онаго безконечно много другихъ найти можно.

888.

Способъ доходишь до сего рѣшенія нарочито трудень, и казался съ начала не соотвѣтствовать нашему намѣренію, ибо мы нашли нарочито збивчивыя дробн, кои особливимъ щастіемъ уничтожить удалось: и такъ не худо, ежели мы еще другой путь покажемъ, который ведетъ насъ къ слѣдующему рѣшенію.

889.

Когда должно быть $axx+b=yy$, и найдено уже $aff+b=gg$, то изъ онаго уравненія будешь $b=yy-axx$; а изъ сего $b=gg-aff$.

Слѣдовательно $yy-axx=gg-aff$, и теперь дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ изъ извѣстныхъ чиселъ f и g найти неизвѣстныя x и y , и тогда заразъ видно, что сіе
урав-

уравненіе получится, когда положишь $x=f$ и $y=g$; но отсюда ни одного новаго случая не получишь кромѣ того, которой взять за извѣстной.

Для того положимъ, что вмѣсто n такое число найдено, что $ann+1$ есть квадратъ, или что $ann+1=mm$, откуда будетъ $mm-ann=1$. Симъ умножь прежняго уравненія часть $gg-aff$ будетъ $yy-axx=(gg-aff)(mm-ann)=ggmm-affmm-aggnn+aaaffnn$. На сей конецъ положи $y=gm+afn$ получишь

$ggmm+2afgmn+aaaffnn-axx=ggmm-affmm-aggnn+aaaffnn$, гдѣ члены $ggmm$ и $aaaffnn$ уничтожаются, и слѣдовательно выйдетъ $axx=affmm+aggnn+2afgmn$, которое уравненіе раздѣливъ на a получится $xx=ffmm+ggnn+2fgmn$, которая формула, какъ видно, есть квадратъ и найдется $x=fm+gn$, что съ прежде найденною формулою согласуется.

890.

Сіе рѣшеніе потребно изъяснить нѣкоторыми примѣрами.

Вопросъ. Найти всѣ цѣлыя числа

Т 5

вмѣ-

вмѣсто x , такъ чтобъ $2xx-1$ было квадратъ, или чтобъ $2xx-1=yy$. Здѣсь $a=2$ и $b=-1$; первый случай потчасъ виденъ, ежели возмется $x=1$ и $y=1$, изъ сего извѣстнаго случая имѣемъ мы $f=1$ и $g=1$; но требуется еще найти такое число вмѣсто n , чтобъ $2nn+1$ было квадратъ, а именно m . Сіе учинится, когда $n=2$ и $m=3$. По сему изъ каждаго извѣстнаго случая f и g сей новой находимъ: $x=3f+2g$ и $y=3g+4f$; но извѣстной случай есць $f=1$ и $g=1$, для того слѣдующіе новые случаи найдутся.

$$\begin{array}{l} x=f=1 \mid 5 \mid 29 \mid 169 \\ y=g=1 \mid 7 \mid 41 \mid 239 \text{ и проч.} \end{array}$$

891.

Вопросъ. Найти всѣ треугольныя числа, которыя бы были вдругъ и квадратныя?

Пусть будетъ x корень треугольнаго числа, то самой треугольникой $\frac{zz+z}{2}$, которой квадратъ быть долженъ, и когда корень онаго будетъ x , то $\frac{zz+z}{2}=xx$, помножь на 8, выдстъ $4zz+4z=8xx$; придай съ обѣихъ сторонъ 1, получишь

лучится $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$.
 Дѣло состоитъ теперь въ томъ, чтобъ
 $8xx+1$ было квадратъ и положивъ $8xx$
 $+1=yy$ будетъ $y=2z+1$; слѣдовательно
 искомой треугольника корень $z=\frac{y-1}{2}$; здѣсь
 $a=8$ и $b=1$ и извѣстной случай ви-
 денъ; а именно $f=0$ и $g=1$; а что бы еще
 было $8m+1=m$, то $n=1$ и $m=3$, оп-
 куда получится $x=3f+g$ и $y=3g+8f$,
 а $z=\frac{y-1}{2}$. Отсюда получаемъ мы слѣду-
 ющія рѣшенія:

$$\begin{array}{l} x=f=0 \mid 1 \mid 6 \mid 35 \mid 204 \mid 1189 \mid \\ y=g=1 \mid 3 \mid 17 \mid 99 \mid 577 \mid 3363 \mid \\ z=\frac{y-1}{2}=0 \mid 1 \mid 8 \mid 49 \mid 288 \mid 1681 \mid \text{и проч.} \end{array}$$

892.

Вопросъ. Найти всѣ пятиугольныя
 числа, которыя бы были также и квад-
 ратныя?

Пусть будетъ корень пятиугольныхъ
 $=z$, то пятиугольникъ самъ $=\frac{3z^2-2}{2}$, ко-
 торой пусть будетъ равенъ квадрату xx ;
 чего ради $3zz-z=2xx$, помножь на 12 и
 придай 1, выдетъ $36zz-12z+1=24xx+1$
 $=(6z-1)^2$, положи теперь $24xx+1=yy$,
 будетъ $y=6z-1$ и $z=\frac{y+1}{6}$; но понеже
 здѣсь

здѣсь $a=24$, $b=1$, по известной случай $f=0$ и $g=1$. По томъ должно быть $24nn+1=mt$, по возми $n=1$, будетъ $m=5$; и такъ получася мы $x=5f+g$, $y=5g+24f$ и $z=\frac{+1}{0}$, или тогда $y=1-6z$, по будетъ также $z=\frac{1-2}{0}$, откуда найдутся слѣдующія рѣшенія.

$$\begin{array}{l} x=f=0 \\ y=g=1 \\ z=\frac{+1}{0} \\ \text{или } z=\frac{1-2}{0}=0 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 10 \\ 49 \\ \frac{25}{3} \\ -8 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 99 \\ 485 \\ 81 \\ -\frac{202}{3} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 980 \\ 4801 \\ \frac{2401}{3} \\ -800. \end{array} \right.$$

893.

Вопросъ. Найми всѣ квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои когда помножатся на 7, и къ произведенію придастся 2, тобъ вышлн пакн квадраты?

Здѣсь требуется, чтобъ $7xx+2=yy$, гдѣ $a=7$, $b=2$, известной случай поладася, когда $x=1$, будетъ $x=f=1$ и $y=g=3$, разсмотрѣвъ уравненіе $7nn+1=mt$ легко найдется, что $n=3$ и $m=8$, слѣдовательно $x=8f+3g$ и $y=8g+21f$, откуда выдутъ вмѣсто x и y слѣдующія знаменованія:

$$x=f=1|17|271$$

$$y=g=3|45|717.$$

894.

Вопросъ. Найти всѣ треугольныя числа, кои бы были вдругъ и пятиугольныя?

Пусть корень треугольных $=p$, а пятиугольных $=q$, то должно быть $\frac{pp+p}{2} = \frac{5qq-q}{2}$, или $5qq-q=pp+p$; отсюда ищи q : понеже $qq=\frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$, то $q = \frac{1}{3} \pm \sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{pp+p}{3})}$ т. е. $q = \frac{1 \pm \sqrt{1+12p+12p+1}}{6}$ и дѣло состоятъ въ томъ, чтобы $12pp + 12p + 1$ было квадратъ, и при томъ въ цѣлыхъ числахъ; понеже здѣсь средней членъ $12p$ попадается, то положи $p = \frac{x-1}{2}$, чрезъ что получимъ мы $12pp = 3xx - 6x + 3$ и $12p = 6x - 6$, следовательно $12pp + 12p + 1 = 3xx - 2$, что должно быть квадратъ. Положимъ еще $3xx - 2 = yy$, выдѣсть $p = \frac{x-1}{2}$ и $q = \frac{y-1}{6}$ и все дѣло состоятъ въ формулѣ $3xx - 2 = yy$, гдѣ $a=3$, $b=-2$ и извѣстной случай $x=f=1, y=g=1$. По томъ для уравненія $mt=3m+1$ имѣемъ мы $n=1$ и $m=2$; откуда слѣдующія величины, вмѣсто x и y , а по томъ

вмѣ-

вмѣсто p и q получаются.

И такъ когда $x=2f+g$ и $y=2g+3f$ будетъ.

$$x=f=1 \left| \begin{array}{c|c} 5 & 11 \\ \hline 5 & 19 \end{array} \right| \begin{array}{c} 41 \\ 71 \end{array}$$

$$y=g=1 \left| \begin{array}{c|c} 5 & 11 \\ \hline 5 & 19 \end{array} \right| \begin{array}{c} 41 \\ 71 \end{array}$$

$$p=0 \left| \begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 1 & 19 \end{array} \right| \begin{array}{c} 20 \\ 12 \end{array}$$

$$q=\frac{1}{3} \left| \begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline 1 & 19 \end{array} \right| \begin{array}{c} 20 \\ 12 \end{array}$$

или $q=0 \left| \begin{array}{c|c} -1 & -3 \\ \hline -1 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array}$ по тому что $q=\frac{1}{3}$.

895.

До сихъ мѣстъ принуждены были мы изъ предложенной формулы исключать второй членъ, когда онъ попадался; но можно также предписанной способъ употребить и къ такой формулѣ, гдѣ будетъ средней членъ, что мы здѣсь показать намѣрены. Пусть предложенная формула, которая должна быть квадратъ, будетъ сѣя $axx+bx+c=yy$ и пусть будетъ изъ оной случай уже извѣстенъ $aff+bf+c=gg$; вычти сѣе уравненіе изъ прежняго, будетъ $a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg$, что во множителяхъ изобразится такъ: $(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)$, умножь съ обѣихъ сторонъ на pq , будетъ $pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g)$, что на двѣ части раздроблено быть можетъ:

I $p(x-f)=q(y-g)$; II $q(ax+af+b)=p(y+g)$
 умножь первое уравненіе на p а другое
 на q , и вычти прежнее изъ сего, то по-
 лучится $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq$
 $=2gprq$; отсюда найдемъ мы $x=\frac{2gprq}{aqq-pp}$

$-\frac{(aqq+pp)f-bqq}{aqq-pp}$, а изъ другаго урав-
 ненія будетъ $q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gprq}{aqq-pp}\right.$
 $\left.-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right)$; слѣдовательно $y-g$
 $=\frac{2gprp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$, и такъ $y=g\frac{(aqq+pp)}{aqq-pp}$
 $-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}$; а для избѣжанія сихъ

дробей, положи какъ и прежде $\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m$

и $\frac{2pq}{aqq-pp}=n$, будетъ $m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp}$ слѣдо-

вательно $\frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a}$, и такъ $x=ng-mf$

$-\frac{b(m+1)}{2a}$; а $y=mg-naf-\frac{bn}{2a}$, гдѣ буквы

m и n такого свойства быть дол-
 жны, какъ и выше сего, т. е. чтобы
 $m+1=2an+1$. 896.

896.

Но такіе образы, найденныя формулы, вмѣсто x и y смѣшаны еще съ дробями: ибо члены содержащія букву b суть дроби, и слѣдовательно съ нашими намѣреніемъ не сходны. Но надлежитъ примѣчать, что ежели отъ сихъ величинъ къ слѣдующимъ придешь, то оныя всегда будутъ цѣлыя числа, и которыя изъ прежде взятыхъ чиселъ p и q очень легко найти можно; ибо возми p и q , такъ чтобъ $pp = aqq + 1$, и тогда $aqq - pp = -1$, то сами собою дроби пропадутъ, и найдется $x = -2gprq + f(aqq + pp) + bqq$, а $y = -g(aqq + pp) + 2afprq + bprq$, но понеже въ извѣстномъ случаѣ $2ff + bf + c = gg$, квадраты только изъ gg входятъ, то все равно дастъ ли буква g знакъ $+$, или $-$: и такъ поставь g , вмѣсто $-g$, то будутъ наши формулы $x = 2gprq + f(aqq + pp) + bprq$ и $y = g(aqq + pp) + 2afprq + bprq$ и тогда заподлинно будетъ $axx + bx + c = yy$. Сыскать наприм. такія шестиугольныя числа, кои бы были вдругъ и квадраты.

Здѣсь

Здѣсь должно быть $2xx - x = yu$, гдѣ $a=2$, $b=-1$, и $c=0$, извѣстной случай, какъ видно есть $x=f=1$ и $y=g=1$.

По томъ надлежитъ быть $pp=2qq+1$, будетъ $q=2$ и $p=3$, и такъ получится $x=12g+17f-4$ а $y=17g+24f-6$; откуда слѣдующія найдутся знаменованія:

$$\begin{array}{l|l} x=f=1 & 25 \quad 841 \\ y=g=1 & 35 \quad 1189 \text{ и проч.} \end{array}$$

897.

Побудемъ еще нѣсколько при первой формулѣ, гдѣ средняго члена нѣтъ и рассмотримъ случаи, въ которыхъ формула $axx+b$, будетъ квадратъ въ цѣлыхъ числахъ.

Пусть будетъ $axx+b=yu$ и къ сему потребны двѣ вещи.

- I. Знать такой случай, въ которомъ сѣ дѣлается; оной пусть будетъ $aff+b=gg$.
- II. Надлежитъ знать вмѣсто m и n такія числа, чтобъ $mm=ann+1$, о чемъ въ слѣдующей главѣ показано будетъ.

Отсюда теперь получается новой случай, а именно: $x=ng+mf$ и $y=mg+anf$; откуда по томъ равнымъ обра-

Томъ II.

У

зомъ

зомъ другіе случаи сыскать можно. Кон-
мы представимъ такъ:

$$\begin{array}{l} x=f \mid A \mid B \mid C \mid D \mid E \\ y=g \mid P \mid Q \mid R \mid S \mid T \text{ и проч.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{гдѣ } A=ng+mf \mid B=nP+mA \mid C=nQ+mB \mid D=nR+mC \\ \text{и } P=mg+anf \mid Q=mP+anA \mid R=mQ+aBn \mid S=mR+anC \\ \text{и проч.} \end{array}$$

которые оба рода чисель, легко можно
продолжить далѣе, какъ кто пожелаетъ.

898.

Но по сему способу не можно про-
должать верхняго ряду не зная нижняго,
ниже нижняго, не зная верхняго. Но лег-
ко можно дать правило, верхней рядъ
одинъ только продолжать не имѣя нужды
знать нижней, которое правило служить
также и для нижняго ряду, гдѣ не
нужно знать верхней. Цѣлыя числа,
которыя выѣсто x брать можно, идутъ
въ извѣстной прогрессіи, кося каждой
членъ напр. E ; изъ двухъ предыдущихъ C
и D опредѣляется, не имѣя нужды знать
нижніе члены R и S ; ибо тогда $E=2mD$
 $-mmC+annC$ или $E=2mD-(mm-ann)C$, а
понеже $mm=ann+1$, слѣдовательно mm
 $-ann=1$, будетъ $E=2mD-C$. Откуда яв-
ству-

ствуешь, какимъ образомъ каждое изъ верхнихъ чиселъ опредѣляется изъ двухъ предыдущихъ. Равнымъ образомъ тоже бываетъ и съ нижнимъ рядомъ; такъ $T = mS + nD$, но $D = nR + mC$, будетъ $T = mS + annR + amnC$, и когда еще $S + mR + anC$, то $anC = S - mR$, которую величину поставивъ вмѣсто anC , получимъ $T = 2mS - R$, такъ что нижней рядъ по тому же правилу, какъ и верхней продолжается.

Найми наприм. всѣ числа x , чтобъ $2xx - 1 = yy$, здѣсь $f = 1$ и $g = 1$, при томъ $mm = 2nn + 1$, будетъ $n = 2$ и $m = 3$. И по-неже $A = 5$, то первые два члена 1 и 5, изъ которыхъ слѣдующіе по сему правилу найдутся: $E = 6$ $D = C$, т. е. каждой членъ взятой 6 разъ и уменьшенъ предыдущимъ даетъ слѣдующей; и такъ иско-мыя числа вмѣсто x идутъ по сему правилу такимъ образомъ: 1, 5, 29, 169, 985, 5741 и проч.; откуда видно, что сіи числа безконечно далеко продолжиться могутъ. А ежели бы захотѣли взять дроби, то по преждепоказанному способу еще бы безконечно большее множество найти можно было.

ГЛАВА VII.

О особливомъ способѣ, формулу $an+1$ здѣлать
квадратомъ въ цѣлыхъ числахъ.

899.

Предложеннаго въ прежней главѣ въ
дѣйство произвести не лзя, ежели не въ
состоянии найти для каждаго числа a
такого n , что бы $an+1$ было ква-
дратъ, или чтобъ $an+1=mn+1$ было
квадратъ, или чтобъ $an+1=mn$.

Когда же пожелаешь довольствоваться
ломаными числами, то сіе уравненіе
легко рѣшить можно. Ибо положи толь-
ко $m=1+\frac{nr}{q}$, будетъ $mn=1+\frac{2nr}{q}+\frac{npr}{qq}$
 $=an+1$, гдѣ на обѣихъ сторонахъ 1
уничтожается; а остальные члены на n
могутъ раздѣлиться. По томъ помно-
живъ на qq выдестъ $2rq+npr=aqq$,
откуда найдется $n=\frac{2rq}{aqq-pr}$, откуда без-
конечное множество знаменований вмѣсто
 n найдется. Но понеже n цѣлое число
быть должно, то сіе намъ ни мало не по-
могаетъ, и слѣдовательно для нахождения
его надлежитъ употребить совсѣмъ осо-
бливой способъ. Прежде

900.

Прежде всего надлежитъ примѣчать, что ежели $an+1$ должно быть квадратъ въ цѣлыхъ числахъ, какое бы a число ни было, то сему не всегда спастись можно: ибо въ первыхъ всѣ тѣ случаи исключаются, въ которыхъ a отрицательное число, по томъ также и всѣ тѣ, гдѣ a квадратъ. Понсже тогда an было бы квадратъ, но никакой квадратъ съ 1 вмѣстѣ квадрата въ цѣлыхъ числахъ не дѣлаетъ, и по сему формула наша должна быть такъ ограничена, чтобъ буква a , не была ни отрицательною, ни квадратомъ: но когда a есть положительное и при томъ ни квадратное число, то можно завсегда вмѣсто n такое цѣлое найти число, чтобъ $an+1$ было квадратъ.

Естьли такое число сыскано, то изъ прежней главы легко можно вывести безконечно много другихъ, но къ нашему намѣренію довольно будетъ найти нѣкоторыя и при томъ самыя малыя.

901.

Для сего нѣкогда ученой Агличанинъ именемъ Пелль весьма остроумной спо-

собъ изобрѣлъ, которой мы здѣсь изъяснить намѣрены. Оной есть такого свойства, что не для каждаго числа a вообще, но для каждаго случая его особливо употреблять можно. И такъ начнемъ съ послѣднихъ случаевъ и будемъ искать вмѣсто n такое число, чтобы $2nn+1$ квадратъ было, или чтобы $\sqrt{2nn+1}$ было извлекаемое число.

Здѣсь легко видѣть можно, что сей квадратной корень будетъ больше нежели n , а меньше нежели $2n$, чего ради положи его $=n+p$, гдѣ p заподлинно должно быть меньше нежели n . И такъ имѣемъ мы $\sqrt{2nn+1} = n+p$, слѣдовательно $2nn+1 = nn+2np+pp$, откуда найдемъ n ; но $nn = 2np+pp-1$, слѣдовательно $n = p + \sqrt{2pp-1}$.

Здѣсь главное дѣло состоятъ въ томъ, чтобы $2pp-1$ было квадратъ, что учинится положивъ $p=1$, и найдется $n=2$, а $\sqrt{2nn+1}=3$. Ежели бы сіе не такъ скоро вышло, то можно бы продолжать далѣе, и когда $\sqrt{2pp-1}$ больше нежели p и слѣдов: n больше нежели $2p$, то положи $n = 2p+q$ и будетъ $2p+q = p$.

+

$+V(2pp-1)$, или $p+q=V(2pp-1)$ взявъ квадраты получится $pp+2pq+qq=2pp-1$, или $pp=2pq+qq+1$, будетъ $p=q+V(2qq+1)$, и такъ $2qq+1$, должно быть квадратное число, что учинится когда $q=0$, слѣдовательно $p=1$ и $n=2$. Изъ сего примѣра можно уже имѣть понятіе о семъ способѣ, которой еще больше изъясненъ будетъ изъ слѣдующаго.

902.

Пусть будетъ $a=3$ и что сія формула $3nn+1$ должна быть квадратъ, то положи $V(3nn+1)$, $=n+p$ будетъ $3nn+1=n^2+2np+pp$ и $2nn=2np+pp-1$, отсюда $n=\frac{p+V(3pp-2)}{2}$, но понеже $V(3pp-2)$ больше нежели p и слѣдовательно n больше, нежели $\frac{2p}{3}$ или p , то положи $n=p+q$, будетъ $2p+2q=p+V(3pp-2)$ или $p+2q=V(3pp-2)$, взявъ квадраты выдесть $pp+4pq+4qq=3pp-2$, или $2pp=4pq+4qq+2$ т. е. $pp=2pq+2qq+1$; по чему $p=q+V(2qq+1)$ сія формула данной равна, и слѣдовательно $q=0$, откуда $p=1$, $n=1$ и $V(3nn+1)=2$.

У 4

903.

903.

Пусть будетъ $a=5$ и формулу $5nn+1$ здѣлать квадратомъ, котораго корень больше, нежели $2n$, то положи $\sqrt{5nn+1}=2n+p$ и получится $5nn+1=4nn+4np+pp$, а $nn=4np+pp-1$, слѣдовательно $n=2p+\sqrt{5pp-1}$. Но понеже $\sqrt{5pp-1}$ больше нежели $2p$, то и n также больше нежели $4p$; чего ради возьми $n=4p+q$, будетъ $2p+q=\sqrt{5pp-1}$ или $4pp+4pq+qq=5pp-1$; откуда $pp=4pq+qq+1$, по чему $p=2q+\sqrt{5qq+1}$ сие учинится когда $q=0$; слѣдовательно $p=1$ и $n=4$ и такъ $\sqrt{5nn+1}=9$.

904.

Положимъ еще $a=6$, чтобы $6nn+1$ было квадратъ, коего корень больше нежели $2n$, то возьми $\sqrt{6nn+1}=2n+p$ будетъ $6nn+1=4nn+4np+pp$ или $2nn=4np+pp-1$, слѣдов. $n=p+\frac{\sqrt{6pp-2}}{2}$ или $n=\frac{2p+\sqrt{6pp-2}}{2}$; по чему n больше нежели $2p$; для того положи $n=2p+q$ будетъ $4p+2q=2p+\sqrt{6pp-2}$, или $2p+2q=\sqrt{6pp-2}$: взявъ квадраты выдѣсть

$4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$, или $2pp = 8pq + 4qq + 2$, или $pp = 4pq + 2qq + 1$; отсюда найдётся $p = 2q + \sqrt{6qq + 1}$, которая формула первой равна и слѣдов. можно положить $q = 0$, выйдетъ $p = 1$, $n = 2$ по чему $\sqrt{6nn + 1} = 5$.

905.

Пусть еще $a = 7$ и $7nn + 1 = mm$, слѣдов. m больше нежели $2n$; чего ради положи $m = 2n + p$, будетъ $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, или $3nn = 4np + pp - 1$; отсюда найдётся $n = \frac{2p + \sqrt{7pp - 5}}{3}$; но понеже n больше нежели $\frac{1}{3}p$ и слѣдов. больше нежели p , то возми $n = p + q$, будетъ $p + 5q = \sqrt{7pp - 5}$; взявъ квадраты выйдетъ $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 5$; $6pp = 6pq + 9qq + 5$, или $2pp = 2pq + 3qq + 1$, отсюда найдётся $p = \frac{q + \sqrt{7qq + 2}}{2}$, но понеже здѣсь p больше нежели $\frac{1}{2}q$, и слѣдов. больше нежели q , то поставь $p = q + r$. будетъ $q + 2r = \sqrt{7qq + 2}$ взявъ квадраты $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$, или $6qq + 4qr + 4rr = 2$, или $3qq = 2qr + 2rr - 1$, по чему найдётся $q = \frac{r + \sqrt{7rr - 3}}{3}$; но понеже q больше

нежели r , то положи $q=r+s$, будетъ
 $2r+3s=\sqrt{(7rr-3)}$ взявъ квадраты $4rr$
 $+12rs+9ss=7rr-3$, или $3rr=12rs+9ss$
 $+3$ и $rr=4rs+3ss+1$; слѣдов. $r=2s+\sqrt{(7ss+1)}$, и сія формула прежней равна,
 то возми $s=0$ и получится $r=1$, $q=1$,
 $p=2$ и $n=3$ откуда $m=8$.

Сіе изчисленіе можно сократить слѣ-
 дующимъ образомъ, что и въ другихъ слу-
 чаяхъ мѣсто имѣеть. Когда $7nn+1=mt$,
 то m меньше нежели $3n$, чего ради возми
 $m=3n-p$, будетъ $7nn+1=9nn-6np+pp$,
 или $2nn=6np-pp+1$, отсюда $n=\frac{3p+\sqrt{(7pp+1)}}{2}$
 слѣдоват. n меньше нежели $3p$; для того
 положи $n=3p-q$ будетъ $3p-2q=\sqrt{(7pp+1)}$,
 взявъ квадраты $9pp-12pq+4qq$
 $=7pp+1$ или $2pp=12pq-4qq+1$ и $pp=6pq$
 $-2qq+1$; откуда $p=3q+\sqrt{(7qq+1)}$, здѣсь
 заразъ поставивъ можно $q=0$, будетъ p
 $=1$ и $n=3$, наконецъ $m=8$ какъ и прежде.

906.

Возмемъ еще $a=8$ такъ чтобы $8nn$
 $+1=mt$, по чему m меньше нежели $3n$,
 для того положи $m=3n-p$, будетъ $8nn$
 $+1=9nn-6np+pp$, или $m=6np-pp+1$;
 отку-

откуда $n = 5p + \sqrt{8pp + 1}$, которая формула равна первой, то можно положить $p = 0$, и получатся $n = 1$, а $m = 3$.

907.

Равнымъ образомъ поступай съ каждымъ другимъ числомъ a , сжели только оно положительное и не квадратъ; то придешь на конецъ на такой коренной знакъ, которой съ предложенною формулою сходень, какъ наприм. сей $\sqrt{att + 1}$, гдѣ должно положить $t = 0$, въ которомъ случаѣ неизвѣстность пропадетъ, а потомъ возвращаясь назадъ получишь величину для n , чтобъ $ann + 1$ было квадратъ.

Иногда скоро можно дойти до желаемого, а иногда многія къ тому дѣйствія требуются по состоянію числа a , о которомъ извѣстныхъ признаковъ дать не можно, до числа 15 идетъ нарочито скоро; а когда $a = 15$, то вычисленіе будетъ гораздо пространнѣе, и для того не худо изъяснить сей случай подробнѣе.

908.

И по сему пусть будетъ $a = 15$, такъ что должно быть $15nn + 1 = mm$, понеже здѣсь mm больше нежели $9nn$,
следов.

слѣдов. m больше нежели $3n$, то возьми $m=3n+p$, будетъ $13n+1=9nn+6np+pp$, или $4nn=6np+pp-1$, откуда $n=\frac{3p+\sqrt{(13p-4)}}{4}$ по чему n больше нежели $\frac{1}{4}p$, и слѣдов. больше нежели p , то положи $n=p+q$, выдешъ $p+4q=\sqrt{(13pp-4)}$; взявъ квадраты $13pp-4=pp+8pq+16qq$, $12pp=8pq+16qq+4$ раздѣливъ на 4, $3pp=2pq+4qq+1$, откуда $p=\frac{q+\sqrt{(13q+3)}}{3}$. Здѣсь p больше нежели $\frac{q+3}{3}$, слѣдов. больше нежели q : и такъ возьми $p=q+r$ будетъ $2q+3r=\sqrt{(13qq+3)}$, взявъ квадратъ, $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, т. е. $9qq=12qr+9rr-3$, раздѣливъ на 3, $3qq=4qr+3rr-1$, откуда $q=\frac{2r+\sqrt{(13rr-3)}}{3}$, гдѣ q больше нежели $\frac{2r+3r}{3}$, и слѣдов. больше нежели r , чего ради положи $q=r+s$ будетъ $r+3s=\sqrt{(13rr-3)}$; взявъ квадраты $13rr-3=rr+6rs+9ss$, или $12rr=6rs+9ss+3$, раздѣливъ на 3; $4rr=2rs+3ss+1$, отсюда $r=\frac{s+\sqrt{(13ss+4)}}{4}$. Здѣсь r больше нежели $\frac{s+3s}{4}$, или s , для того возьми $r=s+t$, будетъ $3s+4t=\sqrt{(13ss+4)}$; взявъ квадраты $13ss+4=9ss+24st+16tt$ и $4ss=24st+16tt-4$, раздѣливъ на 4 полу-

чается

числѣ $ss=6st+4tt-1$, по чему $s=3t+\sqrt{(13tt-1)}$, и слѣд. s больше нежели $3t+3t$, или $6t$, чего ради положи $s=6t+u$, будетъ $3t+u=\sqrt{(13tt-1)}$; взявъ квадраты, $13tt-1=9tt+6tu+uu$, откуда $4tt=6tu+uu+1$ и $t=\frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, гдѣ t больше нежели $\frac{3u}{4}$, и слѣдов. больше нежели u , для того положи $t=u+v$, будетъ $u+4v=\sqrt{(13uu+4)}$; взявъ квадраты получимся $13uu+4=uu+8uv+16vv$ и $12uu=8uv+16vv-4$, раздѣливъ на 4, выйдетъ $3uu=2uv+4vv-1$; по чему $u=\frac{v+\sqrt{(13vv-3)}}{3}$, гдѣ u больше нежели $\frac{1}{3}v$, и слѣдов. больше нежели v , то положи $u=v+x$, будетъ $2v+3x=\sqrt{(13vv-3)}$, взявъ квадраты $13vv-3=4vv+12vx+9xx$, или $9vv=12vx+9xx+3$, раздѣливъ на 3, $3vv=4vx+3xx+1$, откуда $v=\frac{2x+\sqrt{(13xx+1)}}{3}$, гдѣ v больше нежели $\frac{2}{3}x$, и слѣдов. больше нежели x , для того положи $v=x+y$, будетъ $x+3y=\sqrt{(13xx+3)}$ взявъ квадраты $13xx+3=xx+6xy+9yy$, или $12xx=6xy+9yy-3$, раздѣливъ на 3 выйдетъ $4xx=2xy+3yy-1$ и $x=\frac{y+\sqrt{(13yy-4)}}{4}$; гдѣ x больше нежели y , для того положи $x=y+z$,
будетъ

будетъ $3y+4z=\sqrt{13yy-4}$, взявъ квадраты $13yy-4=9yy+24yz+16zz$, или $4yy=24yz+16zz+4$ раздѣливъ на 4 $yy=6yz+4zz+1$, отсюда $y=3z+\sqrt{13zz+1}$ и сия формула наконецъ равна первой, то положи $z=0$ и возвращаясь назадъ, получишь какъ слѣдуетъ:

$$z=0$$

$$y=1$$

$$x=y+z=1$$

$$v=x+y=2$$

$$u=v+x=3$$

$$t=u+v=5$$

$$s=6t+u=35$$

$$r=s+t=38$$

$$q=r+s=71$$

$$p=q+r=109$$

$$n=p+q=180$$

$$m=5n+p=649$$

слѣдов. 180 послѣ n есть самое меньшее цѣлое число вмѣсто n , чтобы $13nn+1$ было квадратъ.

909.

Изъ сего примѣра довольно явствуется, сколь продолжительно иногда такое вычисленіе бываетъ, а въ большихъ еще

еще числахъ требуется въ десять разъ больше дѣла, нежели сколько было при числѣ 13, да и не можно напередъ видѣть при какихъ числахъ столь великой трудъ надобенъ; для того труды другихъ надлежитъ употреблять въ свою пользу и здѣлать таблицу, гдѣ для вѣхъ чиселъ, а отъ 1 до 100 знаменованія буквъ *m* и *n* изображены, дабы въ случаѣ можно было взять для каждаго числа *a* надлежащія буквы *m* и *n*.

910.

Между тѣмъ надлежитъ примѣчать, что при нѣкоторыхъ родахъ чиселъ знаменованія чиселъ *m* и *n* вообще найти можно; но сіе дѣлается при тѣхъ только числахъ, которыя единицею или двумя меньше, или больше квадратнаго числа, что особливаго достойно показанія.

911.

По сему пусть будетъ $a = ee - 2$, или двумя меньше квадратнаго числа, и должно бытъ $(ee - 2)nn + 1 = mm$; то явно есть, что *m* меньше нежели *en*, для того положи $m = en - p$, будетъ $(ee - 2)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, или $2nn = 2enp - pp + 1$ и отсюда

сюда $n = \frac{ep + \sqrt{(eep - pp + 1)}}{2}$, гдѣ заразъ видно что взявъ $p=1$ коренной знакъ уничтожится и будетъ $n=e$, а $m=ee-1$.

Когда бы было наприм: $a=23$, гдѣ $e=5$, то будетъ $23nn+1=mm$; ежели $n=5$ и $m=24$, то само чрезъ себя также явствуетъ, что положивъ $n=e$ т. е. когда $a=ee-2$, выдетъ $ann+1=e^2-2ee+1$ квадратъ изъ $ee-1$.

912.

Пусть будетъ $a=ee-1$; т. е. единицею меньше квадратнаго числа и должно быть $(ee-1)nn+1=mm$; то здѣсь опять m меньше нежели en , для того положи $m=en-p$, будетъ $(ee-1)nn+1=enp-2enp+pp$, или $nn=2enp-pp+1$, отсюда $n = \frac{ep + \sqrt{(eep - pp + 1)}}{2}$ гдѣ коренной знакъ уничтожится, когда $p=1$ и получится $n=2e$, а $m=2ee-1$. Сіе легко видѣть можно; ибо когда $a=ee-1$ и $n=2e$, то $ann+1=4e^2-4ee+1$ квадратъ изъ $2ee-1$. Пусть наприм. $a=24$ такъ что $e=5$, найдется $n=10$ и $24nn+1=2401=49^2$.

913.

Положимъ еще $a=ee+1$, или 1 цею больше квадратнаго числа и должно быть

(ee

$(ee+1)nn+1=mm$, гдѣ m , какъ видно, больше нежели en , для того возьми $m=ne+p$, будетъ $(ee+1)nn+1=eenn+2enp+pp$, или $mm=2enp+pp-1$, откуда $n=ep+\sqrt{(eerr+pp-1)}$, гдѣ $p=1$ взять должно и выдѣтъ $n=2e$, $m=2ee+1$. Сие легко усмотрѣть можно, ибо когда $a=ee+1$ и $n=2e$, то $ann+1=4e+4ee+1$ квадратъ изъ $2ee+1$. Возьми на прим. $a=17$ такъ что $e=4$, будетъ $17nn+1=mm$, когда $n=8$ и $m=33$.

914.

Пусть будетъ наконецъ $a=ee+2$, или двумя больше квадратнаго числа и должно быть $(ee+2)nn+1=mm$. Здѣсь видно, что m больше нежели en , чего ради положи $m=en+p$, выдѣтъ $eenn+2nn+1=eenn+2enp+pp$ или $2nn=2enp+pp-1$, отсюда $n=ep+\sqrt{(eerr+2pp-2)}$; возьми теперь $p=1$, будетъ $n=e$ и $m=ee+1$, то заразъ видно, что ежели $a=ee+2$ и $n=e$, будетъ $ann+1=e'+2ee+1$ квадратъ изъ $ee+1$. Положимъ наприм. $a=11$, такъ что $e=3$, то получится $11nn+1=mm$, когда $n=3$ и $m=10$; естли же бы похотѣли взять $a=83$, то было бы $e=9$, и найдется $83nn+nn+1=mm$, когда возмется $n=9$ и $m=82$.

Толѣ II.

Ф

Таб.

Таблица чисель m и n , изчисленныхъ для всѣхъ величинъ числа a отъ 2 до 100, шакъ что $mm=ann+1$

a	n	m	a	n	m
2	2	3	50	2	11
3	1	2	51	273	1520
5	4	9	52	3	17
6	2	5	53	4	23
7	3	8	54	6	35
8	1	3	55	1	6
10	6	19	57	12	73
11	3	10	58	6	37
12	2	7	59	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	50	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	12	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	65	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	5	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

ГЛАВА VIII.

О способѣ извлекать формулу $\sqrt[n]{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ изъ рациональной.

915.

Мы приступаемъ теперь къ формулѣ, въ которой x до третьей степени возвышенъ

Ф 2

шенъ, а потомъ пойдемъ далѣе къ четвертой, не смотря на то, что сѣи оба случая подобнымъ образомъ разсматривать должно.

И такъ пусть сѣю формулу $a+bx+cx^2+dx^3$ квадратомъ здѣлать надлежитъ. На сѣй конецъ потребны надлежащія величины вмѣсто x въ рациональных числахъ, и понеже въ сѣмъ большее уже затрудненіе бываетъ, то требуется также больше и искусства находить только ломанныя числа вмѣсто x и ими принуждены довольствоваться, а не прѣбывать рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ. Прѣжде всего примѣчать здѣсь должно, что никакого всеобщаго рѣшенія дать не лѣзя, какъ то прѣжде было; но каждое дѣйствіе дастъ намъ знать одно только знаменованіе вмѣсто x , когда напротивъ того прѣжней способъ ведетъ вдругъ къ безконечно многимъ рѣшеніямъ.

916.

Когда въ прѣдепоказанной формулѣ $a+bx+cx^2$ было безконечно много случаевъ, гдѣ рѣшенія совсемъ невозможны, то

то случается сіе гораздо чаще съ теперешнею формулою, гдѣ ни объ одномъ рѣшеніи упоминать не лзя, ежели одного еще неизвѣстно или не угадано; того ради для сихъ только случаевъ дасть мы правила въ состояніи, помощію которыхъ изъ одного извѣстнаго рѣшенія новое найтти можемъ, изъ котораго по томъ равнымъ образомъ другое новое найдемся, и сіе дѣйствіе далѣе продолжать можно.

Но между тѣмъ часто случается, что хотя одно рѣшеніе и извѣстно, то однакожъ изъ онаго о другомъ заключать не лзя, пакъ что въ семъ случаѣ одно только рѣшеніе мѣсто имѣсть, которое обстоятельство особливаго примѣчанія достойно. Ибо въ предъидущемъ случаѣ изъ одного рѣшенія безконечно много новыхъ найтти можно было.

917.

И такъ когда сія формула $a+bx+cx^2+dx^3$ должна быть квадратъ; то непременно нужно одинъ уже случай знать, въ которомъ она квадратомъ бываетъ. Такой случай легко видѣть можно

ф 5

жно

жно, ежели первой членъ будетъ квадратъ, и формула изобразится такъ: $ff+bx+cx^2+dx^3$, которая по видимому будетъ квадратъ, когда положится $x=0$.

Для того взявъ во первыхъ сію формулу рассмотримъ, какимъ образомъ изъ извѣстнаго случая $x=0$ другое знаменованіе вмѣсто x найти можно. Сіе можемъ мы совершить двумя образами, изъ которыхъ каждой особливо изъяснить мы здѣсь намѣрены, при томъ не худо будетъ здѣлать начало съ особенныхъ случаевъ.

918.

Пусть сію формулу $1+2x-xx+x^3$ надлежитъ здѣлать квадратомъ. Понеже здѣсь первой членъ 1 есть квадратъ, то возми корень сего квадрата такъ, чтобъ первые члены уничтожились; и для того положи квадратной корень $=1+x$, коего квадратъ нашей формулѣ долженъ быть равенъ и получится $1+2x-xx+x^3=1+2x+xx$, гдѣ передніе два члена уничтожаются и выходитъ сіе уравненіе $xx=-xx+x^3$, или $x^3=2xx$; раздѣливъ

ливъ на xx получится $x=2$, по чему формула наша будетъ $1+4-4+8=9$.

Равнымъ образомъ когда сѣя формула $4+6x-5xx+3x^3$ должна быть квадратъ, то положи корень $=2+nx$, и опредѣли такъ, чтобъ оба первые члена уничтожились. Понеже $4+6x-5xx+3x^3=4+4nx+nnxx$, то должно быть $4n=6$, слѣдов. $n=\frac{3}{2}$, откуда слѣдующее уравненіе выходитъ, $-5xx+3x^3=\frac{9}{4}xx$, или $3x^3=\frac{13}{4}xx$; откуда $x=\frac{13}{12}$, которое знаменованіе дѣлаетъ формулу нашу квадратомъ, коего корень $=2+\frac{13}{8}x=\frac{29}{8}$.

919.

Другой способъ состоятъ въ томъ, чтобъ въ корнѣ были 3 члена, яко $f+gx+hx^2$, кои бы такого были свойства, чтобъ въ уравненіи три передніе члена уничтожились.

Пусть дана наприм. слѣдующая формула: $1-4x+6xx-5x^3$; положивъ корень ея $=1-2x+hx^2$, должно быть $1-4x+6xx-5x^3=1-4x+4xx-4hx^3+hhx^4$, гдѣ $+2bx$
первые два члена пропадаютъ, а чтобъ и
Ф) 4 третьей

третей уничтожился, то надлежитъ быть $6=2h+4$ и слѣдов. $h=1$; отсюда получаемъ мы $-5x^3 = -4x^3 + x^3$, раздѣливъ на x получится $-5 = -4 + x$ и $x = -1$.

920.

Сии два способа употреблять можно, когда первой членъ a есть квадратъ, и имѣеть свое основаніе на томъ, что по первому способу даетъ два члена въ корнѣ, какъ $f+px$, гдѣ f квадратной корень перваго члена; а p берется такъ, чтобъ второй членъ уничтожился и слѣдов. третей только и четвертой члены нашей формулы т. е. cx^2+dx^3 сравнивать должно съ $prxx$, и тогда раздѣливъ уравненіе на xx выдѣтъ новое знаменованіе вмѣсто x , которое будетъ $=\frac{pr-c}{d}$. Во второмъ способѣ берутся три члена корня и полагается оной $=f+px+qxx$ т. е. когда $a=ff$, а p и q опредѣляются такъ, чтобъ первые 3 члена уничтожились, что дѣлается такимъ образомъ: когда $ff+bx+cx^2+dx^3 = ff+2fpx+2fqxx+2pqx^3+q^2xx^2$, то должно $b=2fp$, слѣдов. $p=\frac{b}{2f}$;

а $c = 2fq + pp$, слѣдов. $q = \frac{c - pp}{2f}$; а остальное $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$ можетъ раздѣлиться на x^3 и найдется $x = \frac{d - 2pq}{qq}$

921.

Между тѣмъ часто случается, что хотя $b = ff$; однакожъ по симъ способамъ величины вмѣсто x опредѣлить не лзя, какъ изъ сей формулы $ff + dx^3$ явствуется, гдѣ втораго и третьяго члена нѣтъ; ибо положи по первому способу корень $f + px$, такъ чтобы $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, то должно быть $0 = 2fp$ и $p = 0$, откуда получится $dx^3 = 0$, и $x = 0$, что не даетъ новаго знаменованія.

А ежели возмется корень по второму способу $f + px + qxx$, такъ чтобы $ff + 2fpx + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4 = ff + dx^3$, то выдестъ $0 = 2fp$, $p = 0$ и $2fq + pp = 0$ слѣдов. $q = 0$, откуда $dx^3 = 0$ и пакъ $x = 0$.

922.

Въ такихъ случаяхъ инаго дѣлать нѣчего, какъ только что смотрѣть, не можно ли отгадать такой величины вмѣ-

сто x , чтобы формула была квадратъ, а изъ нее уже по томъ можно найти по прежнему способу новую величину вмѣсто x ; что также учиниться можетъ, хотя первой членъ и не квадратъ.

Для показанія сего положимъ, что формула $3+x^3$ должна быть квадратъ, сіе учинится, ежели $x=1$: и такъ положивъ $x=1+y$ получится сія формула $4+3y+3yy+y^3$ въ которой первый членъ есть квадратъ; для того положи корень онаго по первому способу $2+py$, будетъ $4+3y+3yy+y^3=4+4py+pryy$, гдѣ для уничтоженія втораго члена должно быть $3=4p$ слѣдов. $p=\frac{3}{4}$ и получится $3+y=pr$, $-y=pr-3=\frac{3}{4}r-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(r-1)$, по чему $x=-\frac{1}{4}(r-1)$ новая величина вмѣсто x .

Положи еще по второму способу корень $=2+py+qyy$ будетъ $4+3y+3yy+y^3=4+4py+4qyy+2pqy^2+qqy^3$, гдѣ для уничтоженія втораго члена должно быть $3=4p$, или $p=\frac{3}{4}$, а чтобы третей членъ уничтожить, то $3=4q+pp$, слѣдов. $q=\frac{3-pp}{4}=\frac{3-\frac{9}{16}}{4}=\frac{33}{64}$ и будетъ $1=2pq+qqy$, то куда $y=\frac{1-2pq}{qq}$, или $y=\frac{1-\frac{33}{32}}{\frac{33}{64}}$; слѣдов. $x=\frac{1-\frac{33}{32}}{\frac{33}{64}}$.

923.

Теперь покажемъ, когда уже одна величина сыскана, какимъ образомъ другую новую находить должно. Сіе представимъ мы вообще въ сей формулѣ $a+bx+cx^2+dx^3$, о которой уже извѣстно, что она будетъ квадратъ, ежели $x=f$, и что тогда будетъ $a+bf+cff+df^3=gg$, потомъ положи $x=f+y$, то получится сія новая формула.

$$\begin{array}{r}
 a \\
 +bf+by \\
 +cff+2cfy+cy^2 \\
 +df^3+3dffy+3dfyy+dy^3 \\
 \hline
 gg+(b+2cf+3dff)y+(c+3df)yy+dy^3,
 \end{array}$$

въ которой формулѣ первой членъ есть квадратъ и слѣдов. оба прежніе способа употребить можно; чрезъ что новыя величины вмѣсто y и слѣдовательно также вмѣсто x получатся, а именно $x=f+y$.

924.

Но иногда сіе совсемъ ничего не помогаетъ, хотя величину вмѣсто x и отгадавъ, какъ то въ сей формулѣ дѣлается

ся

ся $1+x^2$, которая будетъ квадратъ, ежели возмется $x=2$, и такъ полагая $x=2+y$ выдеть ся формула $9+12y+6yy+y^2$, которая должна быть квадратъ, коего корень по первому способу пусть будетъ $3+py$, то $9+12y+6yy+y^2=9+6py+ppyy$, гдѣ должно быть $12=6p$ и $p=2$; по томъ $6+y=pp=4$, слѣдов. $y=-2$ откуда $x=0$, изъ котораго знаменованія далѣе ничего найти не можно. Но ежели возмемъ корень по второму способу $3+py+qyy$, будетъ $9+12y+6yy+y^2=9+6py+\frac{6yy^2}{1py}+2pqu'+qqy$, гдѣ должно быть во первыхъ $12=6p$ и $p=2$, по томъ $6=6q+pp=6q+4$, слѣдов. $q=\frac{2}{3}$; отсюда получится $1=2pq+qqy=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}y$, по чему $y=-\frac{3}{2}$, слѣдов. $x=-1$, а $1+x^2=0$, откуда далѣе ничего заключить не лзя; ибо ежели бы положили $x=-1+z$, то вышла бы ся формула $3z-5zz+z^3$, гдѣ первой членъ совсемъ уничтожается и слѣдов. ни того ни другаго способу употребить не можно. Изъ сего довольно явствуется, что ся формула $1+x^2$ квадратомъ быть не можеть, выключая сн 3 случая:

I) $x=2$

I) $x=2$, II) $x=0$, III) $x=-1$, что также и изъ другихъ основаній доказать можно.

925.

Для упражненія рассмотримъ еще сию формулу $1+3x^3$, которая въ сихъ случаяхъ будетъ квадратъ I) $x=0$, II) $x=1$, III) $x=2$; и поглядимъ можно ли еще другія такія величины найти.

Понеже извѣстно, что $x=1$, то положи $x=1+y$ и получится $4+9y+9yy+3y^3$; изъ сего корень пусть будетъ $2+py$, такъ что $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+prry$, гдѣ $9=4p$, слѣдов. $p=\frac{9}{4}$, а остальные члены $9+3y=pr=\frac{9}{4}y$ и $3y^3=\frac{9}{4}y^2$; по чему $x=\frac{7}{4}$. $1+3x^3$ слѣдов. будетъ квадратъ, котораго корень $=\frac{7}{4}$, или также $=\frac{11}{4}$. Ежели бы еще далѣе положить $x=\frac{7}{4}+z$, то можно бы было найти отсюда другія новыя величины. А естли бы за благо разсудилось положить корень прежней формулы по второму способу $=2+py+qyy$, такъ чтобы $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+2pqy^2+qqy^3$, то должно бы быть $9=4p$, слѣдов. $p=\frac{9}{4}$, по томъ $9=4q+pr=4q+\frac{9}{4}y$, по чему $q=\frac{3}{4}$; а изъ

остальныхъ членовъ будетъ $3 = 2pq + qqu$
 $= 197 + qqu$, или $576 + 128qqu = 384$, или
 $128qqu = -183$, или 126. $\frac{93}{22}u = -183$, или
 42. $\frac{93}{22}u = -61$, будетъ $u = -\frac{1011}{132}$, слѣдов.
 $x = -\frac{639}{132}$, и по прежнему показанію дру-
 гія новыя найдутся.

926.

Здѣсь изъ извѣстнаго случая $x=1$
 вывели уже мы двѣ новыя величины, изъ
 которыхъ, естли кто на себя трудъ
 принять похочетъ, другія новыя найти
 можно; но чрезъ то попадетъ онъ на
 весьма большія дроби.

Сего ради имѣемъ мы причину уди-
 вляться, что изъ сего случая $x=1$ не
 можно вывести другаго $x=2$, которой
 также легко виденъ, что безъ сомнѣнія
 есть знакомъ несовершенства найденнаго
 предъ симъ способа.

Также изъ случая $x=2$ можно най-
 ти другія новыя величины. На сей ко-
 нецъ возми $x=2+u$, такъ что $25+36u$
 $+18uu+3u^2$ должно быть квадратъ, ко-
 его корень по первому способу пусть
 будетъ $5+pu$, то $25+36u+18uu+3u^2$
 =

$=25+10py+pryu$ и найдется $36=10p$, или $p=\frac{1}{2}$.

Прочіе же члены раздѣливъ на yu , дадутъ $18+3y=pp=\frac{1}{4}$, слѣдов. $y=-\frac{1}{12}$, и $x=\frac{5}{12}$; по чему $1+3x^2$ будетъ квадратъ, коего корень есть $5+py=-\frac{1}{12}$, или $+\frac{1}{12}$. По второму же способу положивъ корень $5+py+quy$ будетъ $25+36y+18yu+3y^2=25+10py+\frac{1}{4}quy+2pquy+qqy^2$, гдѣ для уничтоженія вѣселаго и претвѣлаго члена должно быть $36=10p$. или $p=\frac{1}{2}$; по томъ $18=10p+pp$ и $10q=18-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, и $q=\frac{1}{12}$: остальные же члены раздѣливъ на y^2 даютъ $3=2pq+qqy$ или $qqy=3-2pq=-\frac{1}{12}$, слѣдов. $y=-\frac{1}{12}$, а $x=-\frac{5}{12}$.

927.

Сіе вычисленіе продолжительно и трудно въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ по другимъ основаніямъ очень легко общее рѣшеніе дать можно; какъ въ сей формулѣ $1-x-xx+x^2$, здѣсь можно взять вообще $x=n-1$, а n означаетъ каждое произвольное число. Когда $n=2$, будетъ $x=3$, и наша формула $1-3-9+27=16$ ежели возьмется $n=3$, выдетъ $x=8$ и формула наша $=1-8-64+512=441$.

Но

Но здѣсь совсемъ особое обстоятельство бываетъ, отъ котораго сіе легкое рѣшеніе зависить, и которое легко усмотрѣть можно, ежели мы нашу формулу раздробимъ на множителей, то увидимъ, что она на $1-x$ раздѣлится и частное выйдетъ $1-xx$, которое еще состоитъ изъ сихъ множителей $(1-x)(1+x)$, такъ что наша формула получитъ сей видъ $1-x-xx+x=(1-x)(1+x)1-x=(1-x)^2(1+x)$. Ежели она должна быть квадратъ, то понеже квадратъ раздѣленной на квадратъ, въ частномъ даетъ квадратъ, $1+x$ должно быть квадратъ; и обратно когда $1+x$ квадратъ, то будетъ также $(1-x)^2(1+x)$ квадратъ, для того положи только $1+x=nn$, то получится заразъ $x=nn-1$. Ежели бы сего обстоятельства примѣчено не было, то трудно бы по вышепоказаннымъ способамъ найти шесть только знаменований вмѣсто x .

928.

При каждой формулѣ весьма изрядное дѣло, раздроблять ея на множителей, ежели только возможно. Какимъ образомъ

разомъ сіе дѣлается, о томъ уже выше показано; а имянно, положи данную формулу $=0$ и ищи корень сего уравненія: ибо тогда каждой корень наприим $x=f$ даетъ множителя $f-x$, которое разысканіе тѣмъ легче здѣлать можно, когда ищутся здѣсь одни только рациональные корни, кои всѣ суть дѣлители чиселъ порознь взятыхъ.

929.

Сіе обстоятельство находится при нашей формулѣ $a+bx+cx^2+dx^3$, когда первые два члена уничтожаются, такъ чпо cx^2+dx^3 должно быть квадратъ; но раздѣливъ сію формулу на xx , частному, т. е. $c+dx$ несомнѣнно надлежитъ быть паки квадратомъ; положи $c+dx=n$, и найдется $x=\frac{n-n^2}{d}$, которое знаменованіе вдругъ бесконечно многія и при томъ всѣ возможныя рѣшенія въ себѣ содержать.

930.

Ежели при употребленіи втораго члена буквы p опредѣлять не похочешь, чтобы второй членъ уничтожился, то попадешь на другую неизвѣстную формулу,

Томъ II.

X

мулу,

жулу, которую должно будетъ здѣлать рациональною.

Пусть предложенная формула будетъ $\sqrt{f+bx+cx^2+dx^3}$, положи ся корень $=f+px$, и получится $\sqrt{f+bx+cx^2+dx^3} = f+px$, и получится $\sqrt{f+bx+cx^2+dx^3} = f+px$, гдѣ первые члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на x , даютъ $b+cx+dx^2=2fp+ppx$, которое уравненіе есть квадратное, отсюда найдется x какъ слѣдуетъ: $dx^2=ppx-cx+2fp-b$, слѣдов.

$$x = \frac{pp-c + \sqrt{(p^2-2cpr+8dfp+cc-4bd)}}{2d}.$$

Теперь дѣло состоитъ, чтобъ найти вмѣсто p такія величины, при которыхъ бы формула $\sqrt{p^2-2cpr+8dfp+cc-4bd}$ была квадратъ. Но понеже здѣсь четвертая степень числа p попадаетъ, то надлежитъ сей случай до слѣдующей главы.

Г Л А В А IX.

О способѣ извлекать формулу $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}$ здѣлать извлекаемою.

931.

Теперь пришли мы къ такой формулѣ, гдѣ неопредѣленное число x до четвертой

вертой степени возвышено; при чемъ должно намъ окончать разысканіе о квадратномъ коренномъ знакѣ: ибо столь далеко мы еще не дошли, чтобъ дѣлать квадратами такія формулы, гдѣ вышшіе степени числа x попадаются.

При сей формулѣ 3 случая входятъ въ разсужденіе, изъ коихъ первой бываетъ, когда первой членъ a квадратъ, другой ежели послѣдней членъ квадратъ; и на конецъ, когда первой и послѣдней вдругъ квадраты, которые 3 случая порознь разсмотримъ мы здѣсь намѣрены.

932.

I. разрѣшеніе формулы $\sqrt{ff+bx+cx+dx^2+ex^3}$. Понесже здѣсь первой членъ квадратъ, то по первому способу можно положить корень $=f+px$ и p опредѣлить такъ, чтобъ оба первые члены уничтожились, а остальные бы на xx могли раздѣлиться; но однакожъ въ уравненіи было бы еще xx и слѣдов. при опредѣленіи числа x потребенъ бы былъ новый коренной знакъ; для того возьмемъ заразъ второй способъ и положимъ корень $=f$

X 2

+

$+px+qxx$, по томъ буквы p и q такъ надлежитъ опредѣлить, чтобъ три первые члена вонъ вышли, а остальные бы на x^3 могли раздѣлиться; и тогда получится одно простое уравненіе, изъ котораго x безъ кореннаго знака опредѣлится.

933.

По сему возми корень $=f+px+qxx$, и должно быть $ff+bx+cx^2+dx^3+ex^4=ff+2fpx+2fqxx+2pqx^3+qqx^4$, гдѣ первые члены сами собою уничтожаются; для втораго положи $b=2fp$, или $p=\frac{b}{2f}$, для третьяго члена должно быть $c=2fq+pp$, или $q=\frac{c-pp}{2f}$, и по учиненіи сего остальные члены могутъ раздѣлиться на x^3 , и выйдетъ сіе уравненіе $d+ex=2pq+qqx$, откуда найдется $x=\frac{d-2pq}{qq-e}$.

934.

Но легко видѣть можно, что по сему способу ничего не найдется, ежели втораго и третьяго члена въ формулѣ не будетъ, или когда $b=0$ и $c=0$; ибо тогда $p=0$ и $q=0$ слѣдов. $x=\frac{d}{e}$, но изъ сего обыкновенно ничего новаго найти не лзя,

а особливо когда и $d=0$, то получится $x=0$, которое знаменоваіе ни мало не вспомо- ществуетъ; почему сей способъ для такихъ формулъ, какова $ff+ex'$, ни мало не служить. Сіе самое обстоятельство бываетъ также, когда $b=0$ и $d=0$, или когда втораго и четвертаго члена нѣтъ; и формула имѣ- етъ такой видъ $ff+cx+ex'$, тогда бу- деть $p=c$, а $q=\frac{c}{x}$, откуда найдется $x=0$, которое знаменоваіе заразъ видно и ни къ чему далье насъ не ведетъ.

955.

II. разрѣшеніе формулы $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ggy)}$. Сію формулу можно бы топ- чась привести къ первому случаю пола- гая $x=\frac{y}{y}$; но понеже иногда сія формула $a+\frac{b}{y}+\frac{c}{y^2}+\frac{d}{y^3}+\frac{g}{y^4}$ должна быть квадратъ, то помноживъ на квадратъ y^4 надлежало бы оной вышши квадратомъ: и получится $ay^4+by^3+cy^2+dy+gg$, которая будучи написана наизворотъ съ прежнею во всемъ сходствуетъ.

Но сіе не нужно; корень можно по- ложить и такъ $gxx+px+q$, или наизво-

рошь $q+px+gxx$, будетъ $a+bx+cxx+dx^3+gqx^4=qq+2prqx+2gqxx+2gprx^2+ggx^3$.

Понеже здѣсь пятые члены сами чрезъ себя уничтожаются, то опредѣли сперва p , такъ чтобъ и четвертые члены вонъ вышли; что учинится, когда $d=2gr$ или $p=\frac{d}{2g}$; потомъ опредѣлили еще q , чтобъ и третіе члены уничтожились, что здѣлается полагая $c=2gq+pp$, или $q=\frac{c-pp}{2g}$; по учиненіи же сего первые два члена даютъ сіе уравненіе $a+bx=qq+2prqx$, откуда $x=\frac{a-qq}{2pq-b}$.

936.

Здѣсь опять попадаетъся прежде реченной недостатокъ, когда втораго и четвертаго члена нѣтъ, или когда $b=0$ и $d=0$; ибо выйдетъ тогда $p=0$, а $q=\frac{c}{2g}$ откуда $x=\frac{a-qq}{0}$, которая величина есть безконечно большая и столь же мало служить какъ и $x=0$ въ первомъ случаѣ. И такъ сего способа при уравненіяхъ $a+cxx+gx^3$ упоминаять не можно.

937.

937.

III Разрѣшеніе формулы $\sqrt{ff+bx+cx^2+dx'+ggx'}$. Явно есть, что въ сей формулѣ оба прежніе способа употребить можно; ибо первой членъ есть квадрасть, то положи корень $=f+px+qxx$, дабы первые 3 члена уничтожить; по томъ когда послѣдней членъ есть также квадрасть, то можно взять корень $=q+px+gxx$, чтобы изключить 3 послѣдніе члена, слѣдов. двѣ величины вмѣсто x найдутся.

Но можно сію формулу еще двумя другими способами разрѣшить, кои ей свойственны: по первому способу положи корень $=f+px+gxx$ и опредѣли p такъ, чтобы вторыя члены уничтожились; понеже надлежитъ быть:

$$ff+bx+cx^2+dx'+ggx' = ff+2fpx+2fgxx+2gpx'+ggx',$$

то возми $b=2fp$, или $p=\frac{b}{2f}$, и тогда не только первые два члена, но и послѣдніе уничтожаются; а остальные раздѣливъ на xx дають сіе уравненіе $c+dx=2fg+pp+2gpx$, откуда

X 4
x

$x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}$, или $x = \frac{pp + 2fg - c}{d - 2gp}$. Здѣсь особливо примѣчать надлежитъ, что въ формулѣ попадаетъ только квадратъ gg , коего корень g какъ отрицательный, такъ и положительной взять можно, по чему другая еще величина вмѣсто x получится: а именно $x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}$, или $= \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}$.

938.

Есть еще другой путь къ разрѣшенію сей формулы: а именно положи корень какъ и прежде $f + px + gxx$, и опредѣли p такъ, чтобъ четвертые члены уничтожились, т. е. ежели положится въ прежнемъ уравненіи $d = 2gp$, или $p = \frac{d}{2g}$, и понеже тогда первой членъ съ двумя послѣдними уничтожается, а остальные раздѣливъ на x даютъ сіе простое уравненіе $b + cx = 2fp + 2fgx + pp x$, откуда $x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c}$. При чемъ надлежитъ примѣчать, что въ сей формулѣ находится только квадратъ ff , коего корень также

и

и $-f$ взять можно, такъ что будетъ

$$x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c},$$
 по чему двѣ искомыя величины вмѣсто x найдутся, и слѣдовательно чрезъ показанные до сихъ мѣстъ способы всѣхъ навсе 6 новыхъ величинъ вывести можно.

939.

Но здѣсь пакн скучное обстоятельство случается, когда втораго и четвертаго члена нѣтъ, или $b=0$ и $d=0$, то ни одной надлежащей величины вывести не можно, и слѣдов сая формулы $ff+cx+x+g gx$ разрѣшить чрезъ то не лзя; ибо когда $b=0$, и $d=0$ то изъ обынхъ способовъ будетъ $p=0$, и по сему изъ перваго $x = \frac{c-2fg}{0}$ равно безконечному; а изъ другаго $x=0$, изъ конхъ далѣе ни чего найти не можно.

940.

Сии суть 3 формулы, въ которыхъ показанные до сихъ поръ способы употреблять можно; но ежели въ предложенной формулѣ ни первой ни послѣдней членъ не квадраты, то ничего дѣ-

ласть не лзя прежде , нежели отгадана не будетъ такая вмѣсто x величина, при которой формула наша будетъ квадратъ.

Положимъ, что формула наша будетъ квадратъ, когда положится $x=h$, такъ что $a+bh+chh+dh'+eh'=kk$, то возми только $x=h+y$, и получится новая формула, въ которой первой членъ kk квадратъ: и такъ первой случай употребить можно. Сіе превращеніе употребляется такожде, когда уже въ предыдущихъ случаяхъ знаменованіе вмѣсто x , какъ на пр. $x=h$, найдено; ибо тогда надлежитъ только прибавить $x=h+y$, то получится новое уравненіе, къ которому прежніе способы употребить можно; а изъ найденныхъ уже величинъ вмѣсто x другіе новые найдутся и съ сими новыми равнымъ образомъ поступать, и слѣдов. больше величинъ вмѣсто x находить можно.

941.

Особливо же примѣчать должно о часто напоминаемой формулѣ, гдѣ второго и четвертаго члена недостаетъ, что

что ни какого рѣшенія надѣяться не
льзя, ежели одного, такъ сказать, не оп-
гадано; а какъ въ такомъ случаѣ посту-
пать, то покажетъ сія формула $a+ex$,
которая весьма часто попадаетъся.

И по сему положи, что уже величи-
ну $x=h$ нашли такъ, что будетъ $a+eh^2$
 $=kk$; а для нахождения другихъ возми
 $x=h+y$, то должна сія формула быть
квадратъ $a+eh+4eh^2y+6ehhy+4ehy^2$
 $+ey^2$, то есть $kk+4ehy+6ehhy+4ehy^2+ey^2$,
которая надлежитъ до перваго способа;
чего ради положи квадратной ея корень
 $=k+py+quy$, и будетъ наша формула
равна сему квадрату $kk+2kpy+2kquy$
 $+2pqy^2+quy^2$, гдѣ во первыхъ p и q такъ
опредѣлить должно, чтобъ второй и
третей членъ уничтожились; для того
должно быть $4eh^2=2kp$, слѣдов. $p=\frac{2eh^2}{k}$;

$$6ehh=2kq+pp; \text{ отсюда } q=\frac{6ehh-pp}{2k}, \text{ или } \\ q=\frac{3ehhkk-2ech^2}{k^2}, \text{ или } q=\frac{ehh(3kk-2eh^2)}{k^2}, \text{ или}$$

понеже

понеже $eh' = kk - a$, будетъ $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k'}$.

По томъ слѣдующіе члены раздѣливъ на y даютъ $4eh + ey = 2pq + qqu$, откуда найдемся $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$. Числитель

сся дроби получить такую формулу $\frac{4ehk' - 4eeh(kk + 2a)}{k'}$, которая, понеже $eh' = kk - a$,

превратится въ сію $\frac{4ehk' - 4eh(kk - a)(kk + 2a)}{k}$,

или $\frac{4eh(-akk + 2aa)}{k'}$, или $\frac{4aeh(2a - kk)}{k'}$; а

знаменатель $qq - e = \frac{e(kk - a)(kk + 2a)^2 - ek6}{k6}$

$= e \frac{(3ak' - 4a^2)}{k6} = \frac{ea(3k' - 4aa)}{k6}$; откуда иско-

мая величина будетъ $y = \frac{4aeh(2a - kk).k^6}{k4 \quad ae(3k' - 4aa)}$,

т.е. $y = \frac{4hkk(2a - kk)}{3k - 4aa}$, слѣдов. $x = \frac{h(8akk - k' - 4aa)}{3k' - 4aa}$,

или $x = \frac{h k' - 8akk + 4aa}{4aa - 3k}$. Поставивъ сію ве-

личину вмѣсто x , формула наша $a + ex^*$, будетъ квадратъ, косоу корень $k + py + qu$ и которой въ сію формулу обра-
титъ.

$$\text{пится } k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^3-4aa} \\ + \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^3-4aa)^2}; \text{ ибо изъ } \\ \text{прежняго } p = \frac{2eh^2}{k}, q = \frac{ehh(kk+2a)}{k^2} \text{ и } \\ y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^3-4aa}.$$

942.

Побудемъ еще при формулѣ $a+ex^*$, и когда извѣстной случай естъ $a+eh^2=kk$, то, можемъ мы его взять за два случая, по тому что какъ $x=-h$, такъ $x=+h$; и для того можемъ мы сию формулу превратить въ другую третьяго рода, въ которой первой и послѣдней членъ будутъ квадраты. Сие учинится полагая $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, которой пріемъ намъ много вспомошествоуетъ. И такъ формула наша будетъ $\frac{a(1-y)^2+eh^2(1+y)^2}{(1-y)^4}$, или $\frac{kk+4(kk-2a)y+6kkyy+4(kk-2a)y^2+kk y^4}{(1-y)^4}$, сего возми квадратной корень по третьему

сему случаю $\frac{k+py-kyu}{(1-y)^2}$, такъ что числитель нашей формулы долженъ быть равенъ сему квадрату $kk + 2kpy - 2kkuy + ppy^2 - 2kpy' + kky'$ и здѣлай, чтобъ вторые члены уничтожились, что учинится полагая $4kk - 8a = 2kp$, или $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, остальные же члены раздѣливъ на yu , даютъ $6kk + 4(kk - 2a)y = 2kk + pp - 2kpy$, или $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$; но понеже $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, и $pk = 2kk - 4a$, то $y(8kk - 16a) = \frac{4k^3 - 16akk + 16aa}{kk}$ откуда $y = \frac{-k^3 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, а чтобъ найти отсюда x , то впервыхъ $1 + y = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}$, $1 - y = \frac{3k^3 - 4aa}{kk(-kk - 4a)}$, слѣдов. $\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{3k^3 - 4aa}$ и такъ $x = \frac{k^3 - 8akk + 4aa}{3k^3 - 4aa}$.

h. Сие тоже самое изъясненіе, которое мы нашли прежде.

943.

Для изъясненія сего примѣромъ, пусть будетъ дана сія формула $2x^4 - 1$, которая должна быть квадратъ. Здѣсь $a = -1$, $e = 2$ и извѣстной случай, въ которомъ сія формула будетъ квадратъ, есть, когда $x = 1$, слѣдов. $h = 1$ и $kk = 1$, т. е. $k = 1$; отсюда получаемъ мы заразъ новую величину $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$; но понеже числа x четвертая степень входитъ, то можно положить $x = +13$ по чему $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Когда же сей случай возьмемъ за извѣстной, то будетъ $h = 13$, $k = 239$, откуда по прежнему новая выѣсто x величина получится, а именно $x = \frac{815730721 + 228488 + 4}{2447192163 - 4} \cdot 13 = \frac{815959213}{2447192159}$.
13 слѣд. $x = \frac{10607469769}{2447192159}$.

944.

Подобнымъ образомъ рассмотримъ всеобщую формулу $a + cxx + ex^4$ и возьмемъ

мемъ за извѣстной случай, въ которомъ она формула квадрата, $x=h$, такъ что $a+chh+eh^2=kk$; а для нахождения другихъ возьми $x=h+y$ и тогда формула наша получитъ такой видъ:

a

$$chh+2chy+cuu$$

$$eh^2+4eh^2y+6ehhuu+4ehu^2+eu^2$$

$$kk+(2ch+4eh^2)y+c(c+6ehh)uu+4ehu^2+eu^2$$

гдѣ первой членъ есть квадратъ, коста корень положи $k+py+quu$, такъ что наша формула равна сему квадрату $k^2+2kpy+2kquu+2pqu^2+qu^2$; теперь

опредѣлили p и q такъ, чтобъ второй и четвертой членъ уничтожились, къ чему во первыхъ требуется, чтобъ $2ch+4eh^2=2kp$, или $p=\frac{ch+2eh^2}{k}$, а по томъ $c+6ehh$

$$=2kq+pp, \text{ или } q=\frac{c+6ehh-pp}{2k}, \text{ слѣдующіе}$$

же члены раздѣливъ на y^2 даютъ сіе уравненіе: $4eh+eu=2pq+quu$, откуда $y=\frac{4eh-2pq}{qu-e}$; напоследокъ $x=h+y$, въ кото-

ромъ случаѣ квадратной корень нашей формулы

формулы будетъ $k+py+quy$, и ежели сіе возьмемъ за первоначальной извѣстной случай, то найдемъ изъ онаго пакн новой, и такимъ образомъ продолжать можно сколько кто пожелаетъ.

945.

Для изъясненія сего пусть данная формула будетъ $1-xx+x^a$, гдѣ $a=1$, $c=-1$, $e=1$, и извѣстной случай заразъ виденъ: а имянно, $x=1$, такъ что $h=1$ и $k=1$; положи теперъ $x=1+y$, а квадратной корень нашей формулы $1+py+quy$, то будетъ сперва $p=1$, а по томъ $q=0$, откуда $y=0$ и $x=1$, которой уже случай извѣстенъ и слѣдов. новаго не найдено; но изъ другихъ оснований можно доказать, что сія формула квадратомъ не будетъ кромѣ случаевъ $x=0$ и $x=\pm 1$.

946.

Пусть будетъ еще сія формула дана $2-3xx+2x^a$, гдѣ $a=2$, $c=-3$ и $e=2$. Извѣстной случай заразъ виденъ $x=1$, и такъ пусть $h=1$, будетъ $k=1$; ежели же теперъ положится $x=1+y$, а квадрат-

Томъ II.

Ц

ной

ной корень $1+py+quy$, будетъ $p=1$; $q=4$ и получится $y=0$, откуда паки ничего новаго не найдется.

Другой примѣръ пусть будетъ сѣя формула $1+8xx+x^2$, гдѣ $a=1$, $c=8$ и $e=1$; по маломъ разсмотрѣннн найдется случай $x=2$, возми $h=2$ будетъ $k=7$; положивъ $x=2+y$, а корень $=7+py+quy$, должно быть $p=\frac{3}{7}$, $q=\frac{24}{49}$; отсюда $y=-\frac{11}{49}$ и $x=-\frac{13}{49}$, гдѣ знакъ $-$ опустить можно. Въ семъ примѣрѣ примѣчать надлежитъ, что когда послѣдней членъ самъ по себѣ квадратъ, то и въ новой формулѣ квадратомъ останется; и корень можно, также еще взять по прежнему третьему случаю.

По сему пусть будетъ, какъ и прежде $x=2+y$, то получимъ.

1

$$32+32y+8yy$$

$$16+32y+24yy+8y^2+q^2$$

$49+64y+32yy+8y^2+y^2$, что разными способами квадратомъ быть можетъ; ибо положи сперва корень $=7+yp+yy$ такъ, что наша формула равна будетъ сему.

квад-

квадрату $49 + 14py + 14yy + 2py^2 + y^4$; те-
 перь можно здѣлать, что послѣдніе члены
 пропадутъ, ежели положится $2p=8$, или
 $p=4$, а остальные раздѣливъ на y даютъ
 $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$; от-
 куда $y=-4$, а $x=-2$, или $+2$, которой
 есть извѣстной случай. Когда же p воз-
 мется такъ, чтобъ вторыя члены уни-
 чтожились, то будетъ $14p=64$ и $p=\frac{32}{7}$;
 а оставшіеся члены раздѣливъ на yy даютъ
 $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, или $\frac{17}{2} + \frac{8}{7}y = 32$
 $+ 8y$; отсюда $y=-\frac{7}{11}$, слѣдов. $x=-\frac{1}{11}$, или
 $+\frac{1}{11}$, которая величина дѣлаетъ форму-
 лу нашу квадратомъ, коего корень есть
 $\frac{7 \pm 11}{11}$. Но $-yy$ есть итакже корень послѣдняго
 члена, то можно квадратной корень взять,
 и такъ $7 + py - yy$, или формула равна се-
 му квадрату $49 + 14py - 14yy - 2py^2 + y^4$,
 для исключенія предпослѣдняго члена по-
 ложим $8=-2p$, или $p=-4$, а остальные
 члены раздѣливъ на y даютъ $64 + 32y$
 $= 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, откуда $y=-$
 -4 , какъ и прежде.

Естьли же вторыя члены уничтожат-
 ся, то будетъ $64=14p$ и $p=\frac{32}{7}$ а остав-

шіеся раздѣливъ на yy даютъ $32+8y=-14+pr-2ry$, или $32+8y=\frac{312}{49}=-\frac{64}{7}y$, слѣдов. $y=-\frac{7}{14}$ и $x=\frac{1}{14}$, тоже что и прежде. 947.

Такимъ же образомъ поступать можно со всеобщіею формулою $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, когда случай $x=h$ извѣстенъ, и она будеть квадратъ, т. е. kk ; ибо тогда возми $x=h+y$, и получится формула въ столькихъ же членахъ, изъ коихъ первой kk ; положи теперь корень ея $k+ry+quy$ и опредѣли r и q такъ, чтобъ вторые и третіи члены уничтожились; а остальные раздѣливъ на y^3 дадутъ простое уравненіе, откуда y и слѣдов. x опредѣлишь можно.

Но здѣсь отмѣщаются только тѣ случаи, гдѣ новонайденное знаменованіе числа x съ извѣстнымъ $x=h$ одинаково; ибо тогда ничего новаго найти не лзя. Въ такихъ случаяхъ формула или сама по себѣ не возможна, или должно угадать другой случай, гдѣ она будеть квадратъ. 948.

Въ рѣшеніи квадратныхъ коренныхъ знаковъ дошли мы до сего мѣста; только

ко когда вышшая степень не превышаетъ 4ной. Еслили же въ такой формулѣ 5тая, или еще большая степень случится, то употребляемыхъ по се мѣсто прѣсмовъ не довольно дать ей рѣшеніе, хотя бы уже одинъ случай и былъ извѣстенъ; а что бы се показать яснѣе, то разсмотримъ теперь формулу $kk+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$, гдѣ первой членъ уже квадратъ, и когда бы мы захотѣли положить корень какъ и прежде $k+px+qxx$, а p и q опредѣлить такъ, чпобы вторые члены уничтожились, то останутся еще 3, кои раздѣливъ на x^2 даютъ квадратное уравненіе; по чему должно бы было опредѣлить x новымъ кореннымъ знакомъ. Еслили же бы положили корень $k+px+qxx+rx^3$, то была бы уже въ квадратѣ 6 тая степень и три буквы p , q и r надлежало бы такъ опредѣлить чпобъ вторые, третьи и четвертые члены уничтожились, то останутся еще 4тая, 5тая и 6тая степень, которые раздѣливъ на x^3 опять ведутъ къ квадратному уравненію, и слѣдов. x безъ кореннаго знака опредѣлить не можно; чего ради принуждены мы о-

ставить такія формулы, кои квадратами быть должны и приступимъ къ кубическимъ кореннымъ знакамъ.

Г Л А В А X.

о способѣ формулу

$\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ *зѣлать рациональною.*

949.

Здѣсь пребудутся такія величины вмѣсто x , чтобъ формула $a+bx+cx^2+dx^3$ была кубическое число, и слѣдовательно можно бы было изъ оной извлечь кубической корень. При семъ упомянуть надлежитъ, что сія формула 3тью степень превышать не должна; по тому что въ противномъ случаѣ рѣшить се не лзя бы было. Когда же формула до второй только степени возходитъ и членъ бы dx^3 уничтожился, то бы рѣшеніе сіе не легче было; но ежели послѣдніе два члена уничтожатся, такъ чтобъ формулу $a+bx$ кубомъ зѣлать надлежало, то бы дѣло ни какой трудности не имѣло; ибо дол-

должно бы только положить $a+bx=p^2$,
а опшуда заразъ найдется $x=\frac{p^2-a}{b}$.

950.

Здѣсь опять прежде всего примѣчать надлежитъ, что если ни первой ни послѣдней членъ не кубы, то ни о какомъ рѣшеніи помышлять не лзя, когда случая не будетъ извѣстно, въ которомъ формула будетъ кубъ. Оной или самъ собою виденъ будетъ, или чрезъ пробу найдется.

Первое дѣлается, когда первой членъ кубъ и формула будетъ $f^3+bx+cxx+dx^3$, гдѣ извѣстной случай $x=0$; по томъ также если послѣдней членъ кубъ и формула такого состоянія $a+bx+cxx+g^3x^3$. Изъ сихъ обоихъ случаевъ рождается третей, гдѣ какъ первой такъ и послѣдней членъ кубы, которые три случая теперь мы рассмотримъ.

951.

Пусть предложенная формула будетъ $f^3+bx+cxx+dx^3$, которую кубомъ здѣлать надлежитъ.

Ц 4

Положи

Положи корень ея $f+px$, такъ чтобъ наша формула была равна сему кубу $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$, гдѣ первые члены сами собою уничтожаются; опредѣли p такъ, чтобъ и впорые исключить, что учинится, когда $b=3ffp$, или $p=\frac{b}{3ff}$; по томъ остальные члены раздѣливъ на xx даютъ се уравнение $c+dx=3fpp+p^3x$, откуда $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$; когда же бы послѣдняго члена dx^3 не было, то можно бы просто положить кубичной корень $=f$, и тогда бы нашлось $f^3=f^3+bx+cx^2$, или $b+cx=0$, слѣдов. $x=-\frac{b}{c}$; но изъ сего далье ничего заключить не лзя.

952.

Предложенная формула пусть будетъ во впорыхъ имѣть такой видъ: $a+bx+cx^2+g^3x^3$, коей кубичной корень возми $p+gx$, котораго кубъ $p^3+3gppx+3ggprxx+g^3x^3$; понеже здѣсь послѣдніе члены уничтожаются, то опредѣли p такъ, чтобъ и предпослѣдніе вонъ вышли, что здѣлается, когда $c=3ggp$, или $p=\frac{c}{3gg}$, а первые два

да-

даютъ сіе уравненіе: $a+bx=p^3+3gppx$,
откуда $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$. Ежели бы перваго чле-
на a не было, то можно бы кубичной
корень просто взять $=gx$, и тогда бы
 $g^3x^3=bx+cx^2+g^3x^3$, или $0=b+cx$, слѣ-
дов. $x=-\frac{b}{c}$; но сіе ни къ чему далье не
служить.

953.

Пусть наконецъ данная формула бу-
детъ $f+bx+cx^2+g^3x^3$, въ которой какъ
первой, такъ и послѣдней членъ кубы; че-
го ради оную по обоимъ предыдущимъ
способамъ рѣшить можно, и слѣдов. двѣ
величины вмѣсто x найдутся.

Сверхъ сего можно также еще по-
ложить корень $f+gx$, такъ чпо наша
формула равна кубу $f^3+3ffgx+3fggx^2+g^3x^3$,
гдѣ первые и послѣдніе члены
уничтожаются, а остальные раздѣливъ
на x даютъ сіе уравненіе $b+cx=3ffg+3fggx$,
отсюда $x=\frac{b-3ffg}{3fgg-c}$

954.

Когда же данная формула не будетъ
надлежать ни до одного изъ сихъ 3 спо-

собою, то дѣлать больше нѣчего, какъ только отгадать величину, которая бы была кубъ, и ежели такая найдется на прим. $x=h$, такъ что $a+bh+chh+dh^3=k^3$, то возми $x=h+y$, и наша формула получитъ такой видъ.

$$\begin{array}{l} a \\ bh+by \\ chh+2chy+cuu \\ dh^3+3dhhy+3dhyy+dy^3 \end{array}$$

$k^3+(b+2ch+3dhh)y+(c+3dh)yy+dy^3$,
которая надлежитъ до перваго способа, и слѣдов. величину для y найти можно; а отсюда получится новое знаменованіе вмѣсто x , изъ котораго послѣ такимъ же образомъ еще и больше найти можно.

955.

Сей способъ намѣрены мы изъяснить нѣкоторыми примѣрами и возьмемъ во первыхъ сію формулу $1+x+xx$, которая должна быть кубъ, да при томъ и надлежитъ до перваго способа; по чему можно бы заразъ положить кубичной корень $=1$, откуда найдемся $x+xx=0$, т. е. $x(1+x)=0$, слѣдов. или $x=0$, или $x=-1$, но изъ сего далѣе ни чего не слѣдуетъ. Сего ради

ди возми кубичной корень $1+px$, коего кубъ есть $1+3px+3prxx+p^3x^3$, и положи $1=3p$, или $p=\frac{1}{3}$, и оспавшіеся члены раздѣливъ на xx дають $1=3pp+p^3x$, или $x=\frac{1-3pp}{p^3}$,

но $p=\frac{1}{3}$, найдется $x=\frac{1-\frac{3}{27}}{\frac{1}{27}}=\frac{\frac{24}{27}}{\frac{1}{27}}=24$. И по се-

му формула наша $1+18+524=543$, изъ чего кубичной корень $1+px=7$. Ежели бы захотѣли положить еще $x=18+y$, то получила бы наша формула такой видъ: $543+37y+yu$, откуда по первому правилу кубичной корень надлежало бы положить $7+py$, коего кубъ $543+147py+21pryu+p^3y^3$; положи $37=147p$, или $p=\frac{37}{147}$, а остальные члены дають сіе уравненіе: $1=21pp+p^3y$, слѣдов. $y=\frac{1-21pp}{p^3}$

т. е. $y=\frac{-540.21.147}{37^3}=\frac{-1049580}{50553}$; откуда

еще новыя величины находить можно.

956.

Пусть дана будетъ сія формула $2+xx$, которая должна быть кубъ. Здѣсь прежде всего надлежитъ отгадать случай, въ которомъ сіе дѣлается, какой есть

x

$x=5$; и такъ положи $x=5+y$ и получи-
 чися $27+10y+yu$; изъ сего пусть бу-
 деть кубичной корень $3+py$, и слѣдов.
 самая формула равна сему кубу, $27+27$
 $py+9pryu+p^3y^3$, возми $10=27p$, или $p=\frac{10}{27}$,
 и получится $1=9pr+p^3y$, откуда $y=$
 $\frac{1-9pr}{p^3}$, т. е. $y=-\frac{19 \cdot 27}{1000}$, или $y=-\frac{513}{1000}$, а $x=$
 $\frac{383}{1000}$; по сему наша формула $2+xx=\frac{214689}{1000000}$,
 откуда кубичный корень $2+py=\frac{123}{1000}$.

957.

Разсмотримъ еще сію формулу $1+x^3$,
 можетъ ли она быть кубомъ сверхъ
 двухъ очевидныхъ случаевъ $x=0$ и $x=-1$.
 Хотя сія формула и надлежитъ до тре-
 тьяго случая, однакожь корень $1+x$ намъ
 ни чего не помогаетъ, по тому что его
 кубъ $1+3x+3xx+x^3$ положивъ равнымъ
 нашей формулѣ дастъ $3x+3xx=0$, или
 $x(1+x)=0$, т. е. или $x=0$ или $x=-1$.

Еслили же положимъ $x=-1+y$, то
 получится сія формула $3y-3yu+y^3$, ко-
 торая должна быть кубъ, и надлежитъ
 до втораго случая. Положивъ кубичной
 корень $p+y$, коего кубъ $p^3+3pryu+3pyy$
 $+y^3$, возмешь $-3=3p$, или $p=-1$, то о-
 стальные

стальные члены дадутъ $3y = p^3 + 3pry = -1 + 3y$, слѣдов. $y = 0$ т. е. бесконечной, откуда слѣдовательно ни чего не найдется. Тщетной будетъ трудъ искать еще друга для x величины: ибо изъ другихъ оснований доказать можно, что формула $1 + x^3$ кромѣ упомянутыхъ случаевъ ни когда кубомъ не будетъ. Понеже показано, что сумма двухъ кубовъ какъ $t^3 + x^3$ никогда кубомъ быть не можетъ, по сему также не возможно, когда $t = 1$.

958.

Утверждаютъ также, что $2 + x^3$ кубомъ быть не можетъ, исключая случай $x = -1$. Сія формула хотя и надлежитъ до втораго случая, но по показанному тамъ правилу вывести ничего не лзя, по тому что среднихъ членовъ недостаетъ. Ежели же положишь $x = -1 + y$, то получится сія формула $1 + 3y - 3yy + y^3$, которую по всѣмъ тремъ случаямъ рѣшить можно. Взявъ по первому корень $1 + y$, коего кубъ $1 + 3y + 3yy + y^3$, будетъ $-3yy = 3yy$, или $y = 0$, что только дѣлается когда $y = 0$. Положи по второму случаю корень -1
+

$+y$, коего кубъ $-1+3y-3yy+y^3$, и будетъ $1+3y=-1+3y$ и $y=\frac{2}{3}$ бесконечной. По третьему способу должно бы было взять корень $=1+y$, что уже прежде было.

959.

Пусть будетъ дана сѣя формула $3+3x^3$, которая должна быть кубъ. Сѣе учинится только въ случаѣ $x=-1$, но отсюда ничего заключить не лзя; по томъ также въ случаѣ $x=2$, для того положи $x=2+y$, и выдетъ сѣя формула $8+12y+6yy+y^3$, или $27+36y+18yy+3y^3$, которая надлежитъ до перваго случая, и по сему возми корень $=3+py$, коего кубъ $27+27py+9ppyy+p^3y^3$, положи $36=27p$; или $p=\frac{4}{3}$, а остальные члены раздѣливъ на yy даютъ $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, или $\frac{17}{27}y=-2$, откуда $y=-\frac{36}{17}$, слѣдов. $x=-\frac{20}{17}$; по чему формула наша $3+3x^3=-\frac{2061}{1717}$; коей кубичной корень есть $3+py=-\frac{21}{17}$; изъ сего знаменованія можно бы было еще болѣе найти, есѣли бы только захо- тѣли.

960.

960.

Разсмотримъ еще наконецъ формулу $4+x^2$, которая въ двухъ извѣстныхъ случаяхъ будетъ кубъ; а именно когда $x=2$ и $x=11$, взявъ сперва $x=2+y$, формула сія $8+4y+y^2$ будетъ кубъ, коего корень пусть будетъ $2+\frac{1}{3}y$, а кубъ $=8+4y+\frac{1}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, откуда $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{27}y$ слѣдов. $y=9$, а $x=11$, другой извѣстнойслучай. Положивъ по томъ $x=11+y$ получился $125+22y+y^2=$ кубу изъ $5+py$ т. е. $125+75py+15p^2yy+p^3y^3$; взявъ $p=\frac{32}{27}$ будетъ $1=15pp+p^3y$ или $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{27}$, откуда $y=-\frac{122625}{13648}$, слѣдов. $x=$

Понесе же x какъ положительной, такъ и отрицательной быть можетъ, то возмн $x=\frac{2+2y}{1-y}$, формула наша будетъ $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, которая должна быть кубъ, помножь въ верьху и въ низу на $1-y$, чщобъ знаменатель былъ кубъ, и получится $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, гдѣ числителя только 8

-8y

$-8y+8yy-8y^3$, или раздѣливъ на 8 т. е. $1-y+yy-y^3$ кубомъ здѣлать должно, которая формула до всѣхъ трехъ способовъ принадлежишь. Положи по первому корень $=1-\frac{1}{3}y$, коего кубъ $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$, будетъ $1-y+\frac{1}{3}y$, или $27-27y=9-y$, откуда $y=\frac{26}{26}$, слѣдов. $1+y=\frac{53}{26}$ и $1-y=\frac{1}{26}$, слѣдов. $x=11$ какъ и прежде; по второму способу положивъ корень $\frac{1}{3}-y$ тоже самое найдется.

По третьему взявъ корень $1-y$, коего кубъ $1-3y+3y^2-y^3$, получится $-1+y=-3+3y$, откуда $y=1$, слѣдов. $x=\frac{2}{3}$ безконечной, и такъ по сему способу ничего новаго не найдется.

961.

Зная уже сіи два случая $x=2$ и $x=11$ можно положить $x=\frac{2+11y}{1+y}$, и когда $y=0$, будетъ $x=2$; но ежели y безконечной, то $x=\frac{2}{3}$; и по сему пусть во первыхъ $x=\frac{2+11y}{1+y}$ будетъ наша формула $4 + \frac{4+44y+121yy}{1+2y+yy}$, или $\frac{8+52y+125yy}{(1+y)^2}$
помножь

помножь въ верьху и въ низу на $1+y$, чшобъ знаменатель былъ кубъ , а здѣлать бы только числителя, которой будетъ $8+60y+177yy+125y^3$, кубомъ.

И такъ положивъ корень $=2+5y$, чрезъ что не только два первые члена, но и послѣднїе уничтожатся, и слѣдов. ничего не найдется.

Положи по второму способу корень $=p+5y$, коего кубъ $p^3+15pry+75pyy+125y^3$, и возми $177=75p$, или $p=\frac{177}{75}$ будетъ $8+60y=p^3+15pry$, откуда $-\frac{177}{75}y=$
 $\frac{80170}{11525}$ и $y=\frac{80170}{367875}$, и отсюда можно бы было найти x .

Естьли же бы положили корень по 3 ему способу $2+5y$, то бы отсюда ничего не вышло ; но можно также положить $x=\frac{2+11y}{1-y}$, и тогда будетъ наша

$$\text{формула } 4+\frac{4+44y+121yy}{1-2y+yy}=\frac{8+36y+125yy}{(1-y)^2}$$

коей числителя помноживъ на $1-y$ выдетъ $8+28y+89yy-125y^3$.

Ежели теперь положимъ по первому способу корень $=2+\frac{1}{2}y$, коего кубъ $8+28y+\frac{3}{4}yy+\frac{1}{8}y^3$, то выдетъ $89-125y$

Томъ II.

Ч

=

$=\frac{28}{3}+\frac{147}{37}y$, или $\frac{1718}{37}y=\frac{169}{3}$ слѣдов. $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$;
по чему $x=11$, что уже извѣстно.

Возми еще по третьему способу корень $2-5y^2$, коего кубъ $8-60y+150yy-125y^3$ откуда найдется $28+89y=-60+150y$; слѣд. $y=\frac{9}{22}$, а отсюда $x=-\frac{1090}{27}$ по чему формула наша будетъ $\frac{1191016}{729}$, кубъ числа $\frac{106}{9}$.

962.

Сии то суть извѣстные способы, помощію которыхъ формулу, или квадратомъ или кубомъ здѣлать можно, когда только въ первомъ случаѣ вышшая степень неопредѣленнаго числа не превышаетъ второй, а въ послѣднемъ третьей степени.

Можно бы еще случай присоединить, когда предложенную формулу биквадратомъ здѣлать надлежитъ, въ которомъ вышшая степень второй не превышаетъ; такъ когда формула $a+bx+cx^2$ должна быть биквадратъ, то прежде всего надлежитъ оную здѣлать квадратомъ, а потомъ корень сего квадрата еще квадратомъ; о чемъ уже правила показаны.

Такъ когда наприм. $xx+7$ должно быть биквадратъ, то здѣлай прежде сію форму-

формулу квадратомъ, что учинится по-
ложивъ $x = \frac{7pp - qq}{2pq}$ или $x = \frac{qq - 7pp}{2pq}$ и фор-
мула наша равна сему квадрату
 $\frac{q^4 - 14qqpp + 49p^4}{4ppqq} + 7 = \frac{q^4 + 14qqpp + 49p^4}{4ppqq}$

откуда корень $\frac{7pp + qq}{2pq}$, которой еще квад-
ратомъ здѣлать должно. На сей конецъ
помножь въ верху и въ низу на $2pq$,
чтобъ знаменатель былъ квадратъ, а чис-
литель $2pq(7pp + qq)$ долженъ быть
также квадратъ, чего иначе учинить не
льзя, какъ отгадать только случай: сего
ради можно взять $q = pz$, чтобъ сія фор-
мула $2ppz(7p' + p'z) = 2p'z(7 + zz)$, и раз-
дѣливъ на p' , т. е. $2z(7 + zz)$, была квад-
ратъ; здѣсь извѣстной случай $z = 1$; и
такъ положивъ $z = 1 + y$ получишь $(2 + 2y)$
 $(8 + 2y + yy) = 16 + 20y + 6yy + 2y^2$, отсюда
корень пусть будетъ $4 + \frac{1}{2}y$, котораго
квадратъ $16 + 20y + \frac{1}{4}yy$ положивъ рав-
нымъ формулъ нашей получишь $6 + 2y$
 $= \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$ и $z = \frac{3}{2}$, но $z = \frac{q}{p}$ будетъ $q = 9$ и
 $p = 8$; по сему $x = \frac{367}{112}$, слѣдов. формула на-
ша $7 + xx = \frac{279941}{25736}$, коей квадратной корень

есть $\frac{11}{12}$, а сего еще квадратной корень
есть $\frac{11}{12}$, котораго наша формула би-
квадратъ.

963.

Наконецъ въ сей главѣ упомянуть
надлежитъ, что есть нѣкоторыя форму-
лы, кои вообще кубомъ здѣлать можно ;
такъ когда sxx должно быть кубическое
число, то положи его корень $=px$, бу-
детъ $sxx = p^3 x^3$, или $s = p^3 x$, слѣдов. $x = \frac{s}{p^3}$
возми $\frac{1}{q}$ вмѣсто p , получится $x = \frac{s}{q^3}$.
Причина сему видна; по тому что фор-
мула содержитъ въ себѣ квадратъ, чего
ради всѣ такія формулы $a(b+cx)^2$, или
 $abb + 2abcx + acsxx$ весьма легко кубомъ
здѣлать можно: ибо положивъ кубичной
ея корень $= \frac{b+cx}{q}$ будетъ $a(b+cx)^2$
 $= \frac{(b+cx)^2}{q^2}$ и раздѣливъ на $(b+cx)^2$ полу-
чится $a = \frac{b+cx}{q^2}$, откуда $x = \frac{aq^2 - b}{c}$, гдѣ
 q по изволению брать можно.

Отсюда

Отсюда явствуется, сколь велика польза разрѣшать формулу на ея множители, когда только сіе учинить можно, о которой маатеріи намѣрены мы говорить пространнѣе въ слѣдующей главѣ.

ГЛАВА XI.

О разрѣшеніи на множителей формулы
 $axx+bxu+cuu.$

964.

Здѣсь буквы x и u значать цѣлыя только числа; мы уже видѣли, въ какихъ случаяхъ дробями довольствоваться должно, и какимъ образомъ приводится вопросъ въ цѣлыя числа. Когда наприм. искомое число x будетъ дробь, то надлежитъ только взять $x=\frac{t}{u}$ и тогда вмѣсто t и u завсегда можно брать цѣлыя числа; и понеже сія дробь въ самомъ меньшемъ видѣ изъяслена быть можетъ, то обѣ буквы t и u за такія числа почесть можно, кои общаго дѣлителя не имѣютъ.

Въ предложенной формулѣ x и u значать цѣлыя только числа, и прежде не-

жели можемъ мы показать, какимъ образомъ оную квадратою, или кубомъ или другою вышшею степенью здѣлать можно, надлежитъ напередъ рассмотреть, какія знаменованія буквамъ x и y дать должно, чѣмъ формула содержала въ себѣ два или больше множителей.

965.

Здѣсь 3 случая входятъ въ разсужденіе: *первой*, когда сія формула дѣйствительно на 2 раціональные множителя разрѣшиться можетъ; что учинится, какъ уже мы и прежде видѣли, когда $bb - 4ac$ будетъ квадратное число.

Другой случай, когда оба сіи множителя равны между собою, въ которомъ сама формула дѣйствительною квадратъ содержишь.

Третьей случай, когда формула не иначе какъ на ирраціональные множители раздроблена быть можетъ, хотя они или просто ирраціональные, или совсемъ невозможные будутъ. Первое учинится, когда $bb - 4ac$ есть положительное число, но не квадратъ; а послѣднее, ежели $bb - 4ac$
бу-

будетъ отрицательное : сн по сущъ 3 случая, кои мы рассмотримъ имѣемъ.

966.

Ежели формула наша на два раціо-
нальные множителя разрѣшится, то мо-
жно ее представить такъ : $(fx+gy)(hx$
 $+ky)$, которая уже по своему свойству
заключаетъ въ себѣ двухъ множителей.
А когда за благо разсудится, чтобъ она
большее число множителей въ себѣ заклю-
чала, то возми только $fx+gy=pq$ и hx
 $+ky=rs$, и тогда наша формула равна
сему произведенію $pq\ rs$, слѣдов. 4 мно-
жителей въ себѣ содержитъ, коихъ число
по произволению увеличить можно, а изъ
сего получаемъ мы двоякое знаменованіе

вмѣсто x , а именно: $x=\frac{pq-gy}{f}$ и $x=\frac{rs-ky}{h}$

по чему будетъ $hfpq-hgy=frs-fky$, слѣдов.

$y=\frac{frs-hfpq}{fk-hg}$ и $x=\frac{kpq-grs}{fk-hg}$. Для изъясненія

буквъ x и y , въ цѣлыхъ числахъ надле-
житъ взять p, q, r и s такъ, чтобъ чи-
слитель дѣйствительно могъ раздѣлиться
на знаменателя, что учинится, ежели

Ч 4

или

или p и r , или q и s на него раздѣляясь.
967.

Для изъясненія сего, пусть предложена будетъ формула $xx-yy$, которая состоитъ изъ сихъ множителей $(x+y)(x-y)$, а ежели она еще больше множителей имѣть долженствуетъ, то положи $x+y=pq$; $x-y=rs$ и получится $x=\frac{pq+rs}{2}$, $y=\frac{pq-rs}{2}$; но что бы сии числа были цѣлыя, то должны оба числа pq и rs быть вдругъ или четныя или оба нечетныя.

Пусть наприм. $p=7$, $q=5$, $r=3$, и $s=1$, будетъ $pq=35$ и $rs=3$, слѣдов. $x=19$ и $y=16$, откуда найдется $xx-yy=105$, которое число дѣйствительно состоитъ изъ множителей 7, 5, 3, 1, и такъ сей случай не имѣетъ ни малѣйшаго затрудненія.

968.

Еще меньше трудности имѣетъ другой случай, гдѣ формула два равные множителя въ себѣ заключаешь, и по сему такъ представлена быть можетъ: $(fx+gy)^2$, которой квадрасть никакихъ другихъ мно-
жи-

жителей имѣть не можетъ, кромѣ тѣхъ, кои. изъ его корня $fx+gy$ рождаются. И такъ положивъ $fx+gy=pqr$, будетъ формула наша $ppqqrr$, и слѣдов. столько множителей имѣть можетъ, сколько за благо разсудится.

Здѣсь изъ двухъ чиселъ x и y одно только опредѣляется, а другое оставляется на наше произволеніе; и когда получится $x=\frac{pqr-gy}{f}$, гдѣ y легко можно взять такъ, что дробь уничтожится. Наилегчайшая сего роду формула есть xx , ежели возмется $x=pqr$, то квадрасть xx заключаетъ въ себѣ три квадратные множителя, а именно: pp , qq и rr .

969.

Гораздо больше имѣетъ трудности претей случай, гдѣ формула наша на 2 раціональные множителя разрѣшиться не можетъ, и требуется къ сему особое искусство находить вмѣсто x и y такія знаменованія, изъ которыхъ бы формула 2, или больше множителей въ себѣ содержала. А чтобы облегчить сіе разысканіе, то должно примѣчать, что наша форму-

ла легко перемѣниться можетъ въ другую, гдѣ средняго члена нѣтъ; а именно надлежитъ только взять $x = \frac{z-y}{2}$, и получится сія формула $\frac{zz-byz+byy}{4a} + \frac{byz-bbyy}{2a} + cyy = \frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}$; опустимъ

теперь средней членъ и рассмотримъ формулу $axx+cyy$, гдѣ все дѣло въ томъ состоить, какія бы знаменованія буквамъ x и y дасть должно, что бы сія формула множителей имѣла. Легко усмотрѣть можно, что сіе отъ свойства чиселъ a и c зависитъ, и для того начнемъ съ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ сего рода формуль.

970.

Пусть во первыхъ дана будетъ формула $xx+yy$, которая всѣ числа въ себѣ содержитъ, кои сумму двухъ квадратовъ изъявляютъ, и представимъ здѣсь самыя меншія до 50.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50, между коими находятся нѣкоторые первыя числа, кои ни какихъ множите-

жителей не имѣютъ ; по сему вопросу будетъ яснѣя , какія знаменованія буквамъ x и y дать должно , чѣмъ формула $xx+yy$ дѣлителей или множителей въ себѣ имѣла; да при томъ столько, сколько за благо разсудится. При чемъ прежде всего исключаемъ мы тѣ случаи, гдѣ x и y общаго дѣлителя имѣютъ, по тому что тогда $xx+yy$ на онаго дѣлителя и на квадратъ его могло бы раздѣлиться ; ибо когда на прим. $x=7p$ и $y=7q$, то сумма ихъ квадратовъ $=49pp+49qq=49(pp+qq)$ можетъ на 49 раздѣлиться; итакъ надлежитъ вопросъ до такихъ формулъ , гдѣ x и y общаго дѣлителя не имѣютъ , или между собою недѣлимы. Затрудненіе здѣсь заразъ попадаетъ; ибо хотя и видно что оба числа x и y нечетныя , однакожъ формула $xx+yy$ четное число будетъ и слѣд. на 2 дѣлимо ; но если одно четное, а другое нечетное, то формула будетъ нечетъ : а имѣетъ ли она дѣлителей или нѣтъ, то не скоро узнать можно. Оба же числа x и y четныя быть не могутъ, по тому что они не должны имѣть общаго дѣлителя.

971.

По сему пусть будутъ оба числа x и y между собою недѣлимыя, и хотя формула $xx+yy$ должна въ себѣ заключать 2 или больше множителей, однако въ такомъ случаѣ прежній способъ имѣть мѣста не можетъ; по тому что сія формула на 2 раціональные множителя разрѣшиться не можетъ. Но ирраціональные множители, на которые формула раздробляется, и изъясняется чрезъ произведеніе $(x+yy-1)(x-yy-1)$, могутъ намъ туже показать услугу; ибо когда формула $xx+yy$ дѣйствительно множителей имѣетъ, то сіи ирраціональные множители должны паки имѣть множителей. Когда же бы сіи множители дѣлителей далѣе не имѣли, тобы и произведеніе оныхъ также ни какихъ множителей не имѣло. Но когда сіи множители суть ирраціональные, да и совсемъ невозможные, то числа x и y равнымъ образомъ общаго дѣлителя имѣть не должны, и слѣдов. не могутъ они имѣть ни какихъ раціональныхъ множителей, а будутъ ирраціональными, или совсемъ невозможными.

972.

972.

И такъ когда потребуется, чтобы формула $xx+yy$ состояла изъ двухъ рациональныхъ множителей, то оба иррациональные множители раздоби паки на два множителя и положи во первыхъ $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$; а понеже $\sqrt{-1}$, какъ положительной такъ и отрицательной взять можно, то само собою будетъ $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, и произведение опшуда дастъ нашу формулу, т. е. $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ такъ что она два рациональные множителя имѣетъ, т. е. $pp+qq$ и $rr+ss$. Но здѣсь осталось еще опредѣлить знаменованія чиселъ x и y , которыя также рациональныя быть должны.

Помноживъ неизвлекаемыхъ множителей между собою выдесть $x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$ и $x-y\sqrt{-1}=pr-qs-qr\sqrt{-1}-ps\sqrt{-1}$, сложивъ сѣи формулы, будетъ $x=pr-qs$; когда же вычтешь одну изъ другой, то получится $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, или $y=ps+qr$. По сему взявъ $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$ формула наша $xx+yy$ заподлинно имѣть будетъ двухъ
множи-

множителей и выдешь $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$.

Но ежели потребуется большее число множителей, то должно только взять p и q , такъ чтобъ $pp+qq$ имѣло двухъ множителей, и тогда бы нашлось 3 множителя, коихъ число по произволению увеличить можно.

973.

Понеже здѣсь квадраты только чиселъ p , q , r и s входятъ, то можно сіи взять также и отрицательными: возми наприим. q отрицательное, будетъ $x=pr+qs$ и $y=ps-qr$, коихъ сумма квадратовъ та же самая, какъ и прежде. Отсюда усматриваемъ мы, что ежели число произведенію $(pp+qq)(rr+ss)$ равно, то оно двоякимъ образомъ на два квадрата раздроблено быть можетъ; ибо сперва найдено $x=pr-qs$ и $y=ps+qr$, а по томъ $x=pr+qs$ и $y=ps-qr$. Пусть наприим. $p=2$, $q=3$, $r=2$ и $s=1$, такъ что бы сіе произведеніе вышло 13. $5=65=xx+yy$, то будетъ тогда или $x=4$, а $y=7$, или $x=8$, а $y=1$, и въ обоихъ случаяхъ $xx+yy=65$. Когда

мно-

много такихъ чиселъ помножишь между собою, то произведеніе еще больше разъ будетъ изъяслять сумму двухъ квадратныхъ чиселъ различными образами. Умножь на прим. $2^2+1^2=5$; $3^2+2^2=13$ и $4^2+1^2=17$ между собою, и выйдетъ 1105, которое число на два квадрата раздроблено будетъ слѣдующимъ образомъ:

I) 33^2+4^2 ; II) 32^2+9^2 ; III) 31^2+12^2 ; IV) 24^2+23^2 .

974.

Между содержащимися въ формулѣ $xx+yy$ числами находятся такія, кои изъ двухъ или больше такихъ чиселъ по умноженію составлены, а по томъ и такія, кои такъ не составлены. Сіи называть станемъ простыми числами, а тѣ сложными: и такъ простыя числа въ формулѣ $xx+yy$ будутъ слѣдующія: 1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, и проч. въ которомъ ряду двоякія числа попадаются, а именно: первыя числа, или такія, кои дѣлителей не имѣютъ, какъ 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, которыя всѣ кромѣ 2 такого состоянія, что опнявъ опъ нихъ 1 цу, остатокъ на 4 раздѣлится, или они со-
дер-

держатся въ формулѣ $4n+1$. По томъ попадающіяся квадратныя числа, яко 9, 49, коихъ корни 3 и 7 не находятся. При чемъ примѣчать надлежитъ, что сїи корни 3 и 7 въ формулѣ $4n-1$ содержатся: но очевидно, что ни одно число изъ сей формулы $4n-1$ не можетъ быть суммою двухъ квадратовъ: ибо когда сїи числа нечетныя, то должно одному изъ обоихъ квадратовъ быть четному, а другому нечетному. Но мы видѣли, что всѣ четные квадраты на 4 дѣлятся, а нечетные въ формулѣ $4n+1$ содержатся; и такъ ежели четной квадратъ съ нечетнымъ сложится, то сумма получаетъ за всегда формулу $4n+1$, а никогда $4n-1$. Что же всѣ первыя числа формулы $4n+1$ суть суммы двухъ квадратовъ, то хотя и извѣстно, но доказать не столь легко можно.

975.

Поступимъ далѣе и рассмотримъ формулу $xx+2yy$, дабы увидѣть, какія знаменованія x и y имѣть должны, чтобъ найти ея множителей. Понеже сїя формула въ мнимыхъ множителяхъ представляется

вляется такъ $(x+yz\sqrt{-2})(x-yz\sqrt{-2})$, по разумѣется, какъ и прежде, ежели формула наша имѣетъ множителей, то и сія мнимая формула должна имѣть своихъ. Для того положи во первыхъ $x+yz\sqrt{-2} = (p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2})$, то видно, что $x-yz\sqrt{-2} = (p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$; по чему наша формула будетъ $xx+2yuz = (pp+2qq)(rr+2ss)$, и слѣдовательно двухъ множителей имѣетъ, изъ коихъ припомъ каждой того же роду. Для учиненія сего надлежитъ опредѣлить надлежащія знаменованія вмѣсто x и y , что здѣлается слѣдующимъ образомъ: понеже $x+yz\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$, а $x-yz\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, то сумма дастъ $2x = 2pr - 4qs$, слѣдов. $x = pr - 2qs$, а разность $2yz\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$, откуда $y = qr + ps$. И такъ когда наша формула $xx+2yuz$ должна имѣть множителей, то оныя бываютъ всегда такого свойства, что одинъ изъ нихъ $pp+2qq$; а другой $rr+2ss$, или они оба суть числа одного роду съ $xx+2yuz$. Для сей причины можно x и y двоякимъ образомъ опредѣлить, по тому что q какъ положительное, такъ и отри-

рицательное взять можно, и найдется $x = pr - 2qs$ и $y = ps + qr$; а по томъ $x = pr + 2qs$ и $y = ps - qr$.

976.

Сія формула $xx + 2yy$ заключаесть въ себѣ всѣ тѣ числа, которыя изъ одинакаго и удвоеннаго квадрата состоятъ, и кои мы здѣсь до 50 предлагаемъ:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 38, 41, 43, 44, 49, 50, и которыя, какъ и прежде, на простыя и составныя раздѣлить можно; простыя, кои изъ предыдущихъ не составлены, суть слѣдующія: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, между которыми всѣ, кромѣ квадратовъ 25 и 49 суть первыя числа; а которыхъ здѣсь нѣтъ, оныхъ попадаются квадраты. Здѣсь надлежитъ также примѣчать, что всѣ первыя числа содержащіяся въ нашей формулѣ, заключаются или въ сей $8n + 1$, или въ сей $8n + 3$, напротивъ того остальные, кои или въ формулѣ $8n + 5$, или въ сей $8n + 7$ содержатся, никогда изъ одинакаго и удвоеннаго квадрата состоять не могутъ. Но и то извѣстно, что

что всѣ первыя числа заключающіяся въ одной изъ первыхъ двухъ формулъ $8n+1$ и $8n+3$ могутъ всегда на одинакой и двойной квадратъ разрѣшиться.

977.

Равнымъ образомъ приступимъ къ общей формулѣ и рассмотримъ, какія знаменованія чиселъ x и y дасть надлежитъ, чтобъ формула сія множителей имѣла. Понеже оную чрезъ слѣдующее произведеніе предсавить можно $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то изобрази каждого изъ сихъ множителей въ двухъ множителяхъ равнаго свойства; а имянно: возми $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$ и $x-y\sqrt{-c}=(q-p\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$ и будетъ наша формула $xx+cuu=(pp+cqq)(rr+css)$, откуда явствуетъ, что множители съ самою формулою будутъ пакіи того же роду; а знаменованія чиселъ x и y получатся слѣдующимъ образомъ: $x=pr+cqs$, или $x=pr-cqs$; $y=qr+ps$, или $y=ps-qr$; и отсюда легко уже узнать можно, какимъ образомъ формула наша еще большее число множителей имѣть можетъ.

Ш 2

978.

978.

Теперь не трудно раздробить и сію формулу $xx-cyy$ на множителей; по тому что только $-c$ на мѣсто $+c$ ставить должно; между тѣмъ можно ихъ также найти непосредственно такимъ образомъ: когда наша формула равна сему произведению $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, то возми, какъ слѣдуетъ $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+s\sqrt{c})$ и $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-s\sqrt{c})$: откуда найдутся сіи множители: $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, кои также съ нашею формулою одного роду; знаменованіе же чисель x и y можно опредѣлить двоякимъ образомъ:

$x=pr+cqs$, $y=qr+ps$; по томъ $x=pr-cqs$ и $y=ps-qr$, но ежели пожелаешь извѣдать выдетъ ли такимъ образомъ найденное произведеніе, то здѣлай пробу съ первыми знаменованіями и будетъ $x^2=pprr+2cqprrs+ccqqss$, $yy=ppss+2pqr s+qqrr$, и $cyy=cppss+2cpqr s+cqqrr$, откуда получится $xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$, что съ найденнымъ произведеніемъ $(pp-cqq)(rr-css)$ согласуется.

979.

По сіе мѣсто разсматривали мы одинъ только первой членъ; а теперь помножимъ оной буквою a , и станемъ искать какихъ формула $axx+cuu$ множителей имѣть можетъ.

Здѣсь видно, что наша формула равна будетъ сему произведенію $(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c})$, которые оба множителя еще въ множителяхъ изъяснить должно; но при семъ бываетъ нѣкоторое затрудненіе: ибо ежели бы слѣдую прежнему способу положили

$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac}$, и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac}$, то получили бы отсюда $2x\sqrt{a}=2apr-2cqs$, а $2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac}$, и слѣдов. какъ для x , такъ и для y нашлись бы ирраціональныя знаменованія, кои здѣсь имѣть мѣста не могутъ.

980.

Сему затрудненію можно пособить слѣдующимъ образомъ, положивъ $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$, $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$.

$-c)(r-s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a-cqs\sqrt{a-gr\sqrt{-c-aps\sqrt{-c}}}}$;
откуда выѣсто x и y слѣдующія раціональныя знаменованія найдутся; $x=pr-cqs$, $y=qr+aps$, по томъ получить формула наша слѣдующихъ множителей: $axx+cuu=(app+cqq)(rr+acss)$, изъ которыхъ одинъ только такой же съ нашею формулою видъ имѣеть, а другой совсемъ иной.

981.

Между тѣмъ однакожь обѣ сіи формулы великое сходство имѣютъ: ибо всѣ числа содержащіяся въ первой будучи помножены на числа другой обращаются паки въ первую формулу. Мы уже видѣли, что 2 числа второй формулы $xx+cuu$, кои съ числами первой $xx+cuu$ согласуютъ; будучи же между собою помножены производятъ паки число второй формулы.

И такъ надлежитъ еще разыскать, когда два числа первой формулы $axx+cuu$ между собою помножатся, то къ которой формулѣ надлежитъ произведеніе. Чего ради помноживъ формулы перваго рода

да

Ц. 1. 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49, Помножимъ число перваго рода наприм. 35 на одно втораго роду наприм. 31, произведение будетъ 1085, которое число заподлинно въ формулѣ $2xx + 3yy$ содержится, или можно вмѣсто y такое найти число, чѣмъ $1085 - 3yy$ было удвоенной квадратъ, т. е. $2xx$; сѣ учинится I) когда, $y=3$: ибо тогда $x=23$, по томъ также II) ежели $y=11$, будетъ $x=19$; III) когда $y=13$, то $x=17$, и наконецъ IV) ежели $y=19$, будетъ $x=1$. Сн оба рода чисель можно опять раздробить на простыя и составныя. Составныя суть тѣ, кои изъ двухъ, или больше, меньшихъ чисель одного, или другаго рода состоятъ. Такимъ образомъ перваго рода простыя числа будутъ слѣдующія:

2, 3, 5, 11, 29, а составныя сѣи 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50 и проч.

Втораго же рода простыя числа суть сѣи 1, 7, 31; прочіежъ всѣ составныя, яко 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

ГЛАВА XII.

О превращеніи формулы $axx+cuu$ въ квадраты, или въ высшія степени.

983.

Мы уже прежде видѣли, что чиселъ формулы $axx+cuu$ иногда квадратами здѣлать не лзя; но какъ скоро сіе возможно будетъ, то помянутую формулу въ другую превратить можно, въ которой $a=1$, какъ наприм. сія формула $2pp-qq$ будетъ квадратъ, и можно ея представить въ семь видѣ: $(2p+q)^2-2(p+q)^2$; взявъ теперь $2p+q=x$ и $p+q=u$ получится формула $xx+2uu$, гдѣ $a=1$ и $c=-2$. Подобное превращеніе завсегда имѣетъ мѣсто, сколь часто такую формулу квадратомъ здѣлать можно, и по сему когда формулу $axx+cuu$ квадратомъ, или другою вышшею четною степенью здѣлать надлежитъ; то мы заподлинно положить можемъ $a=1$; а прочіе случаи почтемъ за не возможные.

984.

Пусть предложена будетъ формула $xx+cuu$, которую квадратомъ здѣлать

Ш 5

должно

должно. Понеже она состоить изъ сихъ множителей $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, то должны оныя быть или квадраты, или помноженные на одно число квадраты; ибо когда произведеніе двухъ чиселъ должно быть квадратъ на прим. pq , то требуется чтобъ или $p=rr$, а $q=ss$, т. е. чтобъ каждой множитель былъ квадратъ, или чтобъ $p=mrr$, а $q=mss$, т. е. чтобъ множители были квадраты на одно число помноженные. Чего ради положи $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})^2$, и будетъ само по себѣ $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})^2$, откуда получаемъ $xx+суу=mm(pp+cqq)^2$ и слѣд. квадратное число. А для опредѣленія буквъ x и y имѣемъ мы сн уравненія; $x+y\sqrt{-c}=mrr+2mrq\sqrt{-c}-mcqq$ и $x-y\sqrt{-c}=mrr-2mrq\sqrt{-c}-mcqq$, гдѣ какъ видно x равенъ будетъ рациональной части, а $y\sqrt{-c}$ иррациональной, т. е. $x=mrr-mcqq$ и $y\sqrt{-c}=2mrq\sqrt{-c}$, или $y=2mrq$.

И по сему положивъ $x=mrr-mcqq$, а $y=2mrq$, формула наша $xx+суу$ будетъ квадратъ; а именно $mm(pp+cqq)^2$, коего корень есть $mrr+mcqq$.

985.

Когда два числа x и y одно на другое не дѣлимо, или общаго дѣлителя не имѣютъ, то надлежитъ положить $m=1$; такъ ежели $xx+суу$ должно быть квадратъ, то возми только $x=pp-cqq$ а $y=2pq$, и тогда сѣя формула равнабудетъ квадрату $pp+cqq$. Въмѣсто того, чтобъ брать $x=pp-cqq$, можно также положить $x=cqq-pp$, по тому что въ обоихъ случаяхъ квадратъ xx одинаковъ. Сѣи суть тѣ же самыя формулы, кои мы совсемъ изъ другихъ нашли основаній, чѣмъ исправность сего способа подтверждается. Ибо по прежнему способу, когда $xx+суу$ долженствуешь быть квадратъ, положи корень $=x+\frac{py}{q}$ и получится $xx+суу = xx+\frac{2pxy}{q}+\frac{ppy}{qq}$, гдѣ xx уничтожается, а остальные члены раздѣливъ на y и помноживъ на qq дають $cqqy=2pqx+ppy$, или $cqqy-ppy=2pqx$, раздѣливъ теперъ на $2pq$ и на y будетъ $\frac{x}{y}=\frac{cqq-pp}{2pq}$. Понсеже x и y должно быть недѣлимыя числа такъ какъ

p

p и q , то долженъ x числителю, а y знаменателю быть равенъ, слѣдов, $x = cq - pr$ а $y = 2rq$ какъ и прежде.

986.

Сіе рѣшеніе тоже самое будетъ, хотя бы число c было положительное или отрицательное; но ежели оно само имѣетъ множителей такъ какъ предложенная формула $xx + asyy$: которая должна быть квадратъ; то прежнее рѣшеніе не только имѣетъ мѣсто, гдѣ $x = acq - pr$ а $y = 2rq$, но еще и сіе $x = cq - apr$ и $y = 2rq$; ибо тогда равнымъ образомъ будетъ $xx + asyy = ccq^2 + 2acrq + aarp = (cq + ar)^2$, что также учинится, когда возмется $x = apr - cq$, по тому что квадратъ x выходитъ одинаковъ.

Сіе новое рѣшеніе по употребляемому здѣсь способу найдется такимъ образомъ. Положи $x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2$ а $x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2$, чтобъ вышло $xx + asyy = (arp + cq)^2$ и слѣдов. квадратъ; но тогда будетъ $x + y\sqrt{-ac} = arp + 2rq\sqrt{-ac} - cq$ и $x - y\sqrt{-ac} = arp - 2rq\sqrt{-ac} - cq$, откуда слѣдуетъ $x = arp - cq$ и $y = 2rq$.

И

И такъ когда число ac различными способами на 2 множителю раздѣлился можетъ, то и многія рѣшенія дать можно.

987.

Мы намѣрены сіе изъяснить нѣкоторыми опредѣленными формулами, и I. когда формула $xx+yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=1$, то взявъ $x=pp-qq$ и $y=2pq$ будетъ $xx+yy=(pp+qq)^2$. II. Если формула $xx-yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=-1$, то возьми $x=pp+qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-yy=(pp-qq)^2$; III. когда сія формула $xx+2yy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=2$, то положивъ $x=pp-2qq$, или $x=2pp-qq$, а $y=2pq$ будетъ $xx+2yy=(pp+2qq)^2$ или $(2pp+qq)^2$.

IV. Если формула $xx-2yy$ квадратомъ быть долженствуетъ, гдѣ $ac=-2$, то возьми $x=pp+2qq$, а $y=2pq$ и получится $xx-2yy=(pp-2qq)^2$. V. Если формула $xx+byy$ должна быть квадратъ, гдѣ $ac=b$, и слѣдов. или $a=1$, а $c=b$ или $a=2$, а $c=3$, то можно положить сперва $x=pp-6qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+byy=(pp+6qq)^2$. По томъ можно также взять

$x=$

$x=2pr-3qq$, а $y=2pq$ и тогда $xx+byy=(2pr+3qq)^2$.

988.

Но ежели бы формулу $axx+cyu$ квадратомъ здѣлать надлежало, то уже выше объявлено, что сему учиниться не лзя, ежели нѣтъ случая напередъ извѣстнаго, въ которомъ сія формула дѣйствительно квадратомъ быть можетъ. И по сему извѣстной случай пусть будетъ когда $x=f$, а $y=g$, такъ что $aff+cgg=hh$, и тогда формулу нашу въ другую сего рода $tt+acuu$ обратить можно, положивъ

$$t=\frac{afx+cgy}{h}, \text{ а } u=\frac{gx-fy}{h} \text{ будетъ } tt=\frac{aaffxx}{hh} + \frac{2acfgxy+cgggyy}{hh} \text{ и } uu=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{hh},$$

$$\text{откуда слѣдуетъ } tt+acuu=\frac{aaffxx+cgggyy}{hh} + \frac{acggxx+acffyy}{hh} - \frac{axx(aff+cgg)+cyu(aff+cgg)}{hh},$$

но $aff+cgg=hh$, то $tt+acuu=axx+cyu$; и такимъ образомъ предложенная формула $axx+cyu$ перемѣнится въ сію $tt+acuu$, которая по данному здѣсь правилу легко квадратомъ здѣлана быть можетъ.

989.

989.

Поступимъ теперь далѣе и рассмотримъ, какимъ бы образомъ формулу $axx + cyy$, гдѣ x и y между собою недѣлимы, кубомъ здѣлать можно было; къ чему прежнія правила недостаточны, но показанные здѣсь способы съ наилучшимъ успѣхомъ употребить можно. При чемъ сіе особливо примѣчанія достойно, что сію формулу завсегда кубомъ здѣлать можно, какого бы свойства числа a и c ни были, чего при квадратахъ не бывало, ежели ни одного случая напередъ не было извѣснаго: что также о всѣхъ четныхъ степеняхъ разумѣется; а въ нечетныхъ яко въ 3 ей, 5 той, 7 мой рѣшеніе завсегда возможно.

990.

И такъ когда формулу $axx + cyy$ кубомъ здѣлать надлежитъ, то положи подобнымъ образомъ, какъ и прежде, $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3$, а $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3$: тогда выдетъ изъ того произведеніе $axx + cyy = (app + cqq)^3$, слѣдов. наша формула кубъ. Все дѣло въ томъ только состоятъ, можно ли здѣсь x и y р-пре-

предѣлить рациональными, что учинится когда положенные кубы дѣйствительно взяты будутъ, и тогда получимъ мы сіи два уравненія $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=ar^3\sqrt{a}+3arprq\sqrt{-c}-3crqq\sqrt{a}-cq^3\sqrt{-c}$, и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=ar^3\sqrt{a}-3arprq\sqrt{-c}-3crqq\sqrt{a}+cq^3\sqrt{-c}$; откуда очевидно слѣдуетъ, что $x=ar^3-3crqq$, а $y=3arprq-cq^3$.

Сыскать наприим. два квадрата xx и yy , коихъ бы сумма $xx+yy$ составила кубъ: понеже здѣсь $a=1$ и $c=1$, то получимъ мы $x=r^3-3prq$ и $y=3prq-q^3$ и будетъ $xx+yy=(pp+qq)^3$. Пусть будетъ $p=2$ и $q=1$ найдется $x=2$ а $y=11$; отсюда $xx+yy=125=5^3$.

991.

Разсмотримъ сію формулу $xx+3yy$, которую кубомъ здѣлать должно. Понеже здѣсь $a=1$, $c=3$, будетъ $x=r^3-8prq$ и $y=3prq-3q^3$ и получится $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Понеже сей случай часто попадаетъ, то изобразимъ здѣсь самые легчайшіе;

$r=1$ и $q=1$	2, 1	1, 2	3, 1	1, 3	5, 8
$x=8$ и $y=0$	10, 9	15, 18	0, 24	80, 72	81, 30
$xx+3yy=64=4^3$	343=7 ³	2197=13 ³	1728=12 ³	21952=28 ³	9261=21 ³

992.

Ежели же предписанъ будетъ договоръ, что оба числа x и y должны быть между собою недѣлимыя, то бы вопросъ никакой не имѣлъ трудности: ибо когда $axx + cyu$ должно быть кубическое число, то положивъ $x = tz$, а $y = uz$ формула наша будетъ $attzx + ciuuz$, которую уравнивъ кубу v^3 , найдется заразъ $z = v^3$ ($att + ciu$), слѣдов. искомыя знаменованія вмѣсто x и y ; $x = tv^3(att + ciu)$, а $y = uv^3(att + ciu)$, кои кромѣ куба v^3 еще $att + ciu$ общимъ дѣлителемъ имѣють. Сіе рѣшеніе даетъ $axx + cyu = v^6(att + ciu)^2(att + ciu) = v^6(att + ciu)^3$ кубъ изъ $v^3(att + ciu)$.

993.

Употребляемые здѣсь способы тѣмъ наипаче достопамятнѣе, что помощью ирраціональныхъ, или еще и мнимыхъ формулъ такія рѣшенія сысканы, къ чему одни только раціональныя, да еще и цѣлыя требовались числа. Но гораздо достопамятнѣе, что въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ неизвлекаемость уничтожается, способъ нашъ больше не годится; ибо когда на-

Томъ II.

Щ

прим.

прим. $xx+суу$ должно быть кубическое число, то заподлинно заключить можно, что и оба неизвлекаемые множители отсюда $x+y\sqrt{-c}$ и $x-y\sqrt{-c}$ кубы быть должны; по тому что оныя между собою недѣлимы; ибо число x и y общаго дѣлителя не имѣютъ. Но если бы неизвлекаемость $\sqrt{-c}$ уничтожилась, какъ наприм. $c=-1$, то бы основаніе се болѣе мѣста не имѣло; по тому что тогда бы оба множителя $x+y$ и $x-y$ имѣли общихъ дѣлителей, не смотря на то, что x и y оныхъ имѣть не будутъ; а именно когда они оба нечетныя числа.

И такъ ежели $xx-yу$ должно быть кубическое число, то не нужно, чтобъ какъ $x+y$, такъ и $x-y$ само по себѣ было кубомъ; но можно положить $x+y=2p^3$, а $x-y=4q^3$, и тогда $xx-yу$ безспорно было бы кубомъ, а именно $8p^3q^3$, коего корень кубической есть $2pq$, и слѣд. будетъ $x=p^3+2q^3$, и $y=p^3-2q^3$. Но ежели формула $axx+суу$ на 2 рациональные множителя раздробиться не можетъ, то и никакія другія рѣшенія имѣть мѣста не могутъ, кромѣ тѣхъ, кои здѣсь предложены.

994.

Сіе разсужденіе намѣрены мы изъяснить нѣкоторыми достопамятными вопросами.

Вопросъ. Требуется въ цѣлыхъ числахъ квадратъ xx , къ которому когда придастся 4, то бы вышелъ кубъ. Оные сушь 4 и 121, но не можно ли еще больше такихъ найти, о томъ здѣсь спрашивается?

Понеже 4 есть квадратное число, то ищи сперва случай, гдѣ $xx+yy$ будетъ кубъ, что, какъ изъ прежняго явствуетъ, здѣлается, когда $x=p^3-3prq$ и $y=3prq-q^3$, но здѣсь $yy=4$, т. е. $y=\pm 2$, слѣдов. должно быть $3prq-q^3=\pm 2$, или $3prq-q^3=-2$. Въ первомъ случаѣ будетъ $q(3pr-q^2)=2$, слѣдов. q дѣлитель 2 хъ, и по сему пусть будетъ сперва $q=1$, и получится $3pr-1=2$, слѣдов. $p=1$; по чему $x=2$, а $xx=4$.

Возми $q=2$, будетъ $6pr-8=\pm 2$ взявъ знакъ $+$ найдется $6pr=10$ и $pr=\frac{5}{3}$, по чему знаменованіе p было бы неизвлечкомое и здѣсь бы не годилось. Взявъ знакъ $-$ будетъ $6pr=6$ и $p=1$, слѣдов. $x=11$

Ц 2

и

и больше случаевъ не бываетъ. По чему два только квадрата даны быть могутъ, а именно 4 и 121, къ которымъ когда придастся 4, то произойдутъ кубы.

995.

Вопросъ. Найти такіе квадраты въ цѣлыхъ числахъ, къ которымъ когда придастся 2, то произойдутъ кубы, какъ то съ квадратомъ 25 дѣлается; спрашивается, не можно ли еще больше такихъ найти?

Когда $xx + 2$ должно быть кубическое число, а 2 есть удвоенной квадратъ, то при слѣдующемъ случаѣ, въ которомъ формула $xx + 2 = y^3$ будетъ кубъ; что изъ прежней 99^а статьи извѣщается, гдѣ $a = 1$, и $c = 2$, $x = p^2 - 6prq$ и $y = 3prq - 2q^3$; но здѣсь $y = \pm 1$, то должно быть $3prq - 2q^3 = q(3pr - 2q^2) = \pm 1$, и слѣдоват. q есть дѣлитель 1 цы; по сему пусть $q = 1$, будетъ $3pr - 2 = \pm 1$, взявъ верхней знакъ, получится $3pr = 3$ и $p = 1$, слѣдоват. $x = 5$, а нижней знакъ даетъ для p неизвлечемое означеніе, которое здѣсь не годится; откуда слѣдуетъ, что только одинъ квадратъ

ратъ 25 въ цѣлыхъ числахъ желаемое свойство имѣеть.

996.

Вопросъ. Сыскать такіе квадраты, кои будучи помножены на 5 и сложены съ 7 мью дѣлають кубъ, или $5xx+7$ будетъ кубъ? Ищи сперва тѣ случаи, когда $5xx+7yy$ будетъ кубъ, что по 991 статьѣ учинишся, гдѣ $a=5$, $c=7$; $x=5p^2-21prq$ и $y=15prq-7q^2$; понеже здѣсь $y=\pm 1$, то $15prq-7q^2=q(15pr-7q)$, ± 1 и q должно быть дѣлителемъ 1, тѣмъ, следовательно 1. По сему $15pr-7=\pm 1$; но оба случая даютъ вмѣстѣ p и q что нецѣлемое, однакожь, изъ сего заключить не лзя, чтобы вопросъ былъ совсемъ невозможенъ, по тому что p и q дроби быть могутъ, когда $y=\pm 1$, а x цѣлое число. Сіе дѣйствительно бываетъ, когда $p=\frac{1}{5}$, $q=\frac{2}{5}$, то будетъ $y=1$, $x=2$, но съ другими дробями дѣйствіе сіе невозможно.

997.

Вопросъ. Требуется такіе квадраты въ цѣлыхъ числахъ, кои взявъ вдвое и отнявъ изъ нихъ 5 дають кубъ, или $2xx-5$ должно быть кубъ? Ищи сперва такіе

III 3.

слу-

случай, въ которыхъ $2xx-5yy$ будетъ кубъ, что здѣлается по 991 статьѣ, гдѣ $a=2$ и $c=-5$, тогда $x=2p^3+15pqq$ и $y=6ppq+5q^3$, но здѣсь должно быть $y=\pm 1$, следовательно $6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1$, чему въ цѣлыхъ числахъ быть не лзя, да и въ дробяхъ такожде, для того сей случай весьма достоинъ примѣчанія, въ которомъ хотя рѣшеніе и имѣеть мѣсто, а именно: ежели $x=4$, ибо тогда будетъ $2xx-5=27$ кубъ $3x^3$ и не малой стоить важности сыскать сему причину.

998.

Возможное дѣло, что $2xx-5yy$ будетъ кубъ, коего корень имѣеть сію формулу $2pp-5qq$ т. е. когда $x=4$, $y=1$, $p=2$, $q=1$ и еще имѣемъ случай, въ которомъ $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, не смотря на то, что оба множители изъ $2xx-5yy$ т. е. $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ и $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$ не кубы. Однакожъ они по сему способу кубы изъ $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ и $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ быть должны; ибо въ нашемъ случаѣ $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$; напротивъ того $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, что совсѣмъ съ $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ не согласуеть.

Но

Но надлежитъ примѣчать, что формула $rr-10ss$ въ бесконечно многихъ случаяхъ 1, или -1 быть можетъ; а именно когда $r=3$ и $s=1$; по томъ когда $r=19$ и $s=6$, кои на формулу $2pp-5qq$ помноживъ, дають пакъ число послѣдней формулы.

И по сему пусть будетъ $ff-10gg=1$, и вмѣсто прежняго $2xx-5yy=(2pp-5qq)$ положимъ вообще $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)$; взявъ множителей будетъ $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})'$; но сіе какъ уже мы видѣли $(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})'=(2p^2+15qq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^2)\sqrt{5}$ вмѣсто сего ради краткости поставимъ $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, что на $f\pm g\sqrt{10}$ помноживъ даетъ $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, которое должно быть равно $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$, откуда выходитъ $x=Af+5Bg$ и $y=Bf+2Ag$; а по неже $y=\pm 1$, то необходимо нужно, чтобъ $6ppq+5q^2=1$ было. Но довольно сѣ ели только формула $Bf+2Ag$, т. е. $f(6ppq+5q^2+2g(2p^2+15qq))$ равно ± 1 , гдѣ f и g различныя знаменованія имѣть могутъ. Пусть будетъ наприм. $f=3$ и $g=1$, то сія формула $(18ppq+15q^2+4p^2+30ppq)$ должна быть равна ± 1 , или должно

$$\text{быть } 4p^4 + 18prpq + 30rqqq + 15q^4 = \pm 1.$$

999.

Сие затрудненіе, выводить всѣ такіе возможные случаи, бываетъ только тогда, когда въ формулѣ $axx+суу$ число c будетъ отрицательное; ибо тогда сія формула $axx-суу$, или сія $xx-асуу$, которая съ нею великое сходство имѣетъ, единица быть можетъ; чему однако никогда статься не лзя, когда c положительное число; понеже $axx+суу$ или $xx+асуу$ даетъ завсегда большія числа, чѣмъ больше берутся x и y , того ради предписанной здѣсь способъ въ такихъ только случаяхъ съ пользою употреблять можно, когда возмущся оба числа a и c положительныя.

1000.

Теперь приступасмъ мы къ четвертой степени и прежде всего усматриваемъ, что ежели формула $axx+суу$ должна быть биквадратъ, то число a надлежитъ быть $=1$; ибо ежели оно не квадратъ, то или бы совсемъ не лзя сей формулы здѣлать только квадратомъ, или ежели бы возможно было, то можно бы ее превратить

тить

тишь въ такой видъ: $tt+аси$; и такъ ограничиваемъ мы вопросъ на послѣдней формулѣ, съ которою прежняя $xx+су$ когда $a=1$ сходствуешь. Теперь дѣло состоитъ въ томъ, какого состоянія должны быть знаменованія чиселъ x и y , чтобъ сія формула $xx+су$ была биквадратъ. Она состоитъ изъ двухъ множителей $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$ то долженъ каждой биквадратъ; и для того надлежитъ положить $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^*$ и $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})$ откуда формула наша равна будетъ сему биквадрату $(pp+qq)^*$, а самыя буквы x и y изъ разрѣшенія сей формулы опредѣлятся, какъ слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} x+y\sqrt{-c} &= p^*+4p^3q\sqrt{-c}-6cprpq-4cprq^3\sqrt{-c}+ccq^* \\ x-y\sqrt{-c} &= p^*-4p^3q\sqrt{-c}-6cprpq+4cprq^3\sqrt{-c}+ccq^* \quad \text{слѣдов.} \quad x=p^*6cprpq+ccq^* \quad \text{и} \quad y \\ &= 4p^3q-4cprq^3. \end{aligned}$$

1001.

И такъ когда $xx+су$ долженствуешь быть биквадратомъ, и понеже здѣсь $c=1$, то имѣемъ мы сии знаменованія $x=p^*-6prpq+q^*$ и $y=4p^3q-4prq^3$ и тогда будетъ $xx+су=(pp+qq)^*$.

III 5

По-

Положивъ наприм. $p=2$ и $q=1$, получится $x=7$ и $y=24$; отсюда будетъ $xx+yy=625=5^4$ взявъ еще $p=3$ и $q=2$ найдемся $x=119$ и $y=120$, по чему $xx+yy=13^4$.

1002.

Во всѣхъ четныхъ степеняхъ, кои-ни формулу здѣлать надлежитъ, необходимо нужно, чтобъ сію формулу квадратомъ здѣлать можно было, на которой конецъ довольно знать одинъ только случай, въ которомъ сіе бываетъ; и тогда можно сей формулѣ, какъ уже мы видѣли, дать сей видъ $tt+acuu$, гдѣ первой членъ умноженъ на 1, и слѣдов. въ формулѣ $xx+суу$ содержицца, которую послѣ подобнымъ образомъ какъ 6 тою, такъ и другою еще вышшею здѣлать можно.

1003.

Въ нечетныхъ степеняхъ сей договоръ не нужень, но числа a и c , какого бы свойства ни были, то завсегда можно формулу $axx+суу$ каждою нечетною здѣлать. Желаю наприм. знать 5 тую степень, то надлежитъ только положить

x/a

$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$ и $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$ и будетъ очевидно $axx+cyu=(app+cqq)^5$. Понеже теперь 5 тая степень изъ $p\sqrt{a}+q\sqrt{-c}$ есть $aap^5\sqrt{a}+5aap^4\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccp^2q^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}$, откуда заразъ заключить можно, что $x=aap^5-10acp^3qq+5ccp^2q^4$ и $y=5aap^4q-10acppq^3+ccq^5$.

Потребно сумму двухъ квадратовъ $xx+yy$ здѣлать 5 тою степенью. Здѣсь $a=1$, $c=1$; когда теперь возмется только $p=2$ и $q=1$ будетъ $x=38$, $y=41$ и $xx+yy=3125=5^5$.

Г Л А В А XIII.

О нѣкоторыхъ формулахъ сего рода ax^4+by^4 ,
коихъ квадратами здѣлать не можно.

1004.

Много труда положено въ изобрѣтеніи двухъ биквадратовъ, коихъ бы сумма или разность была квадратное число: но весь трудъ былъ тщетной, и сыскано на конецъ доказательство, что ни формулы x^4+y^4 , ниже сей x^4-y^4 никогда квадратами

помъ здѣлать не можно, выключая только 2 случая, а именно когда въ первой или $x=0$ или $y=0$; а въ другой сжали $y=0$, или $y=x$, въ которыхъ случаяхъ дѣло совсемъ видно; но что во всѣхъ остальныхъ оное не возможно, тѣмъ наипаче достопамятно; ибо когда рѣчь о простыхъ квадратахъ, то бесконечно много рѣшеній имѣють мѣсто.

1005.

А чтобы сіи доказательства надлежащимъ предложить порядкомъ, то прежде всего примѣчать надлежитъ, что оба числа x и y , какъ недѣлимые между собою въ разсужденіе берутся; ибо ежели бы они должны были имѣть общаго дѣлителя на прим. D , такъ чтобы можно было положить $x=Dp$ и $y=Dq$, то была бы наша формула $D^*p^*+D^*q^*$ и $D^*p^*-D^*q^*$, которые, ежели бы они были квадраты, раздѣливъ на D^* остались бы квадратами. Такъ чтобы сіи формулы p^*+q^* и p^*-q^* были квадраты, гдѣ теперь числа p и q никакого больше общаго дѣлителя не имѣютъ; и по сему довольно доказано, что сіи

ств формулы въ случаѣ, когда x и y между собою недѣлимы, квадратами быть не могутъ и доказательство само по себѣ простирается до всѣхъ случаевъ, въ коихъ x и y общаго дѣлителя имѣютъ.

1006.

И такъ здѣлаемъ начало съ суммы двухъ биквадратовъ п. е. съ формулы $x^4 + y^4$, гдѣ мы x и y какъ недѣлимыя между собою числа разсматривать будемъ; а чтобы показать что $x^4 + y^4$, выключая помянутые случаи, квадратъ быть не можетъ, то производится доказательство слѣдующимъ образомъ; если бы кто захотѣлъ опровергнуть наше положеніе, то бы надлежало утверждать, что такія знаменованія для x и y возможны, чтобы $x^4 + y^4$ было квадратъ, оныя знаменованія сколь бы велики ни были: ибо заподлинно въ малыхъ ни одного не попадаетъ.

Но ясно показать можно, что хотя бы такія знаменованія для x и y , и въ самыхъ большихъ числахъ попались; то бы изъ оныхъ заключить можно было и о малыхъ числахъ; а изъ сихъ бы еще о
 меньшихъ

меншихъ, и такъ далѣе. Но понеже въ малыхъ числахъ такихъ знаменованій нѣтъ, выключая два помянутыя, но которыя ни къ какимъ другимъ насъ не приводятъ, то заодно можно заключить, что и въ большихъ да и въ самыхъ пребольшихъ числахъ нѣтъ такихъ знаменованій для x и y . Равнымъ образомъ о разности двухъ биквадратовъ x^4 и y^4 доказывається, какъ мы заразъ покажемъ.

1007.

Дабы показать, что $x^4 + y^4$ квадратъ быть не можетъ, выключая два случая, кои сами чрезъ себя видны, то надлежитъ примѣчать слѣдующія положенія.

- I. Полагаемъ мы, что числа x и y между собою недѣлимы, или общаго дѣлителя не имѣютъ, слѣдов. оба или нечетныя, или одно четное, а другое нечетъ.
- II. Но оба нечетныя быть не могутъ, ибо сумма двухъ нечетныхъ квадратовъ ни когда квадратомъ быть не можетъ; по тому что нечетной квадратъ всегда въ формулѣ $8n+1$ содержится, и слѣдов. сумма двухъ нечетныхъ квадратовъ имѣла бы формулу $8n+2$, которая на 2, а не на 4 дѣлится, и слѣдов.

квад-

квадратомъ быть не можетъ; что также съ двумя нечетными биквадратами бываетъ.

III. И по сему ежели бы $x^2 + y^2$ было квадратъ, то должно одному быть четному, а другому нечетному, какъ мы выше сего видѣли, что ежели сумма двухъ квадратовъ должна быть квадратъ, то корень одного чрезъ $pr - qq$, а другаго чрезъ $2pq$ изъяснить можно, откуда слѣдуетъ, что должно быть $xx = pr - qq$, а $yy = 2pq$ и тогда бы было $x^2 + y^2 = (pr + qq)^2$.

IV. И такъ было бы здѣсь y четное, а x нечетное число, и $xx = pr - qq$, то надлежитъ одному изъ чиселъ p и q быть четному, а другому нечетному; но первое p не можетъ быть четное: по тому что иначе $pr - qq$, какъ число формулы $4n - 1$, или $4n + 3$, никогда квадратомъ быть не можетъ, и слѣдов. должно бы быть p нечетное, а q четное, гдѣ само по себѣ разумѣется, что оныя должны быть между собою нецѣлыми.

V. Когда $pr - qq$ должно быть равно квадрату xx , то учинится сіе, какъ мы прежде

прежде видѣли, ежели $p = rr + ss$ и $q = 2rs$; ибо отсюда было бы $xx = (rr - ss)^2$ и слѣдов. $x = rr - ss$.

VI. Но xy долженствуетъ также быть квадратъ, и когда мы только имѣли $yy = 2pq$, то будетъ и теперь $yy = 4rs(rr + ss)$, которая формула должна быть квадратъ, слѣдов. $rs(rr + ss)$ должно быть такожде квадратъ, гдѣ r и s недѣлимые между собою числа, и по тому находящіяся здѣсь 3 множителя r , s и $rr + ss$ общаго дѣлителя не имѣютъ.

VII. Но ежели произведение изъ большаго числа множителей, кои между собою недѣлимы, должно быть квадратъ, то каждой множитель самъ по себѣ долженъ быть квадратъ; и такъ положи $r = tt$ и $s = uu$, то должно также $t^2 + u^2$ быть квадратъ; и по сему ежели бы $x^2 + y^2$ было квадратное число, то бы также и $t^2 + u^2$, т. е. сумма двухъ биквадратовъ была бы квадратъ. При чемъ надлежитъ примѣчать, что было бы $xx = t^2 + u^2$ и $yy = 4ttuu(t^2 + u^2)$, гдѣ очевидно числа t и u гораздо меньше нежели x и y , затѣмъ что x и y опредѣляются

быть $y=0$, которой случай въ разсужденіе не входить.

1008.

Теперь приступаемъ мы къ другому главному положенію, что и разность двухъ биквадратовъ $x^2 - y^2$ никогда квадратомъ быть не можетъ, кромѣ случаевъ $y=0$ и $y=x$: ради сего доказательства надлежитъ примѣчать слѣдующіе пункты.

I. Когда числа x и y между собою неѣлимы, и слѣдов. или оба нечетныя, или одно четное а другое нечетъ, то въ обоихъ случаяхъ разность двухъ квадратовъ можетъ быть паки квадратъ; чего ради сѣи два случая особливо примѣчать должно.

II. И такъ пусть будутъ въпервыхъ оба числа x и y нечетныя; и положи $x=p+q$ а $y=p-q$, и тогда одно изъ чиселъ p и q должно быть четное, а другое нечетъ, то будетъ $xx - yy = 4pq$, $xx + yy = 2pp + 2qq$, слѣдов. наша формула $x^2 - y^2 = 4pq(2pp + 2qq)$, которая долженствуешь быть квадратъ, по чему и четвертая ея часть, т. е. $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, коей множители между собою

собою недѣлимы, и слѣдов. каждой долженъ быть квадратъ; а понеже одно число p четное, а другое q нечетъ, то имѣемъ мы 3 хъ между собою недѣлимыхъ множителей $2p, q$ и $pp+qq$. И такъ чтобъ первые два зѣлать квадратами, то положи $2p=4rr$, или $p=2rr$, а $q=ss$, гдѣ s нечетъ будетъ трешей множитель $4r^2+s^2$, которой также квадратъ быть долженъ.

III. Но s^2+4r^2 есть сумма двухъ квадратовъ; изъ которыхъ s^2 нечетъ, а $4r^2$ четъ, то положи корень перваго $ss=tt-uu$, гдѣ t нечетъ, а u четъ, послѣдней же $2rr=2tu$, или $rr=tu$, гдѣ t и u между собою недѣлимы.

IV. Понеже $tu=rr$ квадратъ быть долженствуешь, то какъ t такъ и u надлежитъ быть квадратомъ; сего ради положи $t=mm$ а $u=nn$, гдѣ m нечетъ а n четъ, будетъ $ss=m^2-n^2$, такъ что опять разность двухъ биквадратовъ, а именнo m^2-n^2 должна быть квадратъ, но явно есть, что сии числа были гораздо меньше нежели x и y .

По тому что r и s очевидно меньше нежели x и y , а сверхъ сего еще m и n

меньше нежели r и s , и такъ ежели бы въ большихъ числахъ дѣло было возможное и $x' - y'$ было бы квадратъ, то было бы и въ самыхъ малыхъ также возможно, и такъ далѣе, пока бы не пришли къ самымъ малымъ числамъ, гдѣ бы дѣло было возможное.

V. Но самыя меншія числа, въ которыхъ сіе возможно, суть, когда одинъ биквадратъ равенъ 0, или равенъ другому. По первому надлежало бы быть $n=0$, слѣдов. $u=0$, по томъ $r=0$ и $p=0$, $x=-y$, или $x'=y'$; но здѣсь о такомъ случаѣ не говорится. А ежели бы $n=t$, то было бы $t=u$, по томъ $s=0$ и $q=0$ и наконецъ $x=y$, которой случай мѣста здѣсь не имѣеть.

1009.

Здѣсь можно сказать, что когда t нечетъ, а n четъ, то послѣдняя разность не сходствуесть больше съ первою, и такъ отсюда далѣе о малыхъ числахъ заключать не лзя. Но довольно когда отъ первой разности дошли до другой и теперь покажемъ, что также $x' - y'$ квадратомъ быть не можетъ, когда одинъ би-

ква-

квадратъ четной, а другой нечетной.

I. По первому когда бы x^* четъ, а y^* нечетъ, то бы дѣло само по себѣ было невозможное, по тому что вышло бы число формулы $4n+5$, которое квадратомъ быть не можетъ. И по сему пусть будетъ x нечетъ, а y четъ, то должно быть $xx=pp+qq$ и $y=2pq$ и тогда выдетъ $x^2-y^2=p^2-2ppqq+q^2=(p^2-qq)^2$, гдѣ изъ p и q одно должно быть четное, а другое нечетное.

II. Когда $pp+qq$ должно быть квадратъ, то будетъ $p=rr-ss$, а $q=2rs$, слѣдов. $x=rr+ss$; но отсюда $yy=2(rr-ss)2rs$ или $yy=4rs(rr-ss)$, которое должно быть квадратъ и слѣдоват. четвертая онаго также часть т. е. $rs(rr-ss)$, гдѣ множители между собою недѣлимы.

III. И такъ положивъ $r=tt$, $s=uu$ будетъ третей множитель $rr-ss=t^2-u^2$, которой равнымъ образомъ долженъ быть квадратъ; но оной также есть разность двухъ биквадратовъ, кои гораздо меньше первыхъ, то получаетъ чрезъ сѣ доказательство совершенную крѣпость; такъ что если бы въ большихъ

числахъ разность двухъ биквадратовъ была квадратъ, то бы можно отсюда найти завсегда меньшія такія разности, не приходя къ очевиднымъ двумъ случаямъ; и по сему заподлинно въ большихъ числахъ сіе также не возможно.

1010.

Первую часть сего доказательства, когда оба числа x и y взяты нечетныя, можно сократить слѣдующимъ образомъ. Ежели бы $x^2 - y^2$ было квадратъ, то должно бы быть $xx = pp + qq$ и $yy = pp - qq$, гдѣ изъ буквъ p и q одна четная, а другая нечетъ; но тогда бы вышло $xy = p^2 - q^2$, слѣдов. $p^2 - q^2$ должно бы также быть квадратомъ, что есть разность двухъ такихъ биквадратовъ, изъ коихъ одинъ четной, а другой нечетъ; а что сему спастись не лзя, то вторая доказательства часть показывася.

1011.

И такъ доказали мы сіи два главныя правила, что ни сумма, ни разность двухъ биквадратовъ никогда квадратнымъ числомъ быть не можеть, выключая немногіе очевидные случаи.

По

По чему ежели другія формулы, кои квадрапами здѣлать надлежитъ, такого свойства будутъ, что или сумма или разность двухъ биквадратовъ должна быть биквадратъ, то равнымъ образомъ такія формулы невозможны. Сіе случается въ нижеслѣдующихъ формулахъ, кои мы при-совокупить намѣрены.

I. Не возможно, чтобъ формула $x^4 + 4y^4$ была квадратъ, ибо она есть сумма двухъ биквадратовъ; то должно бы быть $xx = pp - qq$ и $2yy = 2pq$, или $yy = pq$, но p и q между собою недѣлимыя числа, и для того надлежало бы каждому быть квадрапомъ; сего ради положивъ $p = rr$, $q = ss$ будетъ $xx = r - s$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ должна быть квадратъ, чему статься не лзя.

II. Не можно также, чтобъ формула $x^4 - 4y^4$ была квадратъ; ибо надлежало бы быть $xx = pp + qq$, $2yy = 2pq$, но тогда вышло бы $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$: но $yy = pq$, то должно бы p и q каждому быть квадрапомъ. Взявъ $p = rr$, $q = ss$ получится $xx = r^4 + s^4$, слѣдов. сумма двухъ биква-

драповъ долженствовала бы быть квадратомъ, чему спастся не лзя.

III. Формула $4x^4 - y^4$ не можетъ также быть квадратомъ; ибо тогда y неопмѣнно должно бы быть четное число: положивъ $y = 2z$ было бы $4x^4 - 16z^4$ и четвертая сего часть $x^4 - 4z^4$ должна быть квадратъ; что по прежнему не возможно.

IV. Формула $2x^4 + 2y^4$ квадратомъ быть не лзя, по тому что оной долженъ быть четной и слѣд. $2x^4 + 2y^4 = 4zz$, то вышло бы $x^4 + y^4 = 20z$ и по сему $2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$, слѣдов. квадратъ. Равнымъ образомъ было бы $2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$ также квадратъ. Но понеже какъ $2zz + 2xxyy$ такъ и $2zz - 2xxyy$ вышли бы квадраты, то надлежало бы ихъ произведению $4z^4 - 4x^4y^4$ и четвертой сего части быть квадратомъ; но сія четвертая часть есть $z^4 - x^4y^4$ и слѣдов. разность двухъ биквадратовъ, чему спастся не можно.

V. На конецъ формула $2x^4 - 2y^4$ квадратомъ быть не можетъ; ибо оба числа x и y нечетныя; въ противномъ случаѣ имѣли бы они общаго дѣлителя. Также
одно

одно четное, а другое нечетное быть не могутъ: по тому что иначе одна бы часть на 4, а другая только на 2 и слѣдов. самая формула на 2 только могла бы раздѣлиться; для того надлежитъ обоимъ быть нечетнымъ. Возми $x=p+q$ и $y=p-q$, то одно изъ чиселъ p и q четное, а другое нечетъ, и понеже $2x^2-2y^2=2(xx+yy)(xx-yy)$, то получится $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$, а $xx-yy=4pq$, и по сему формула наша $16pq(pp+qq)$ и 16тая ея часть $pq(pp+qq)$ должна быть также квадратъ. Но когда множители между собою недѣлимы, то каждому надлежитъ быть квадратомъ. Положивъ вмѣсто двухъ первыхъ $p=rr$, $q=ss$ будетъ третей $=r^2+s^2$, которой также долженъ бы быть квадратъ; но сему спастись не можно.

1012.

Подобнымъ образомъ доказать можно, что формула x^2+2y^2 квадратомъ быть не можетъ; самое же доказательство состоятъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

I. x не можетъ быть четное число, ибо

Ъ 5

у

y было бы нечетное и формула могла бы только на 2, а не на 4 раздѣлиться; чего ради x должно быть нечетное число.

II. Положи квадратной корень формулы

нашей $=xx + \frac{2pyy}{q}$, чтобы оной былъ

нечетъ и будетъ $x^2 + 2y^2 = x^2 + \frac{4pxxyy}{q}$

$+ \frac{4prry^2}{qq}$, гдѣ x^2 уничтожается, а осталь-

ные члены раздѣливъ на yy и помноживъ на qq даютъ $4pqxx + 4prryy = 2qqyy$, или

$4pqxx = 2qqyy - 4prryy$, отсюда $\frac{xx}{yy} = \frac{qq - 2pr}{2pq}$,

слѣдовательно $xx = qq - 2pr$, а $yy = 2pq$, такія же формулы, какъ и прежде были.

III. И такъ $qq - 2pr = xx$ надлежало бы паки быть квадратъ, что иначе учиниться не можетъ, какъ только ежели $q = rr + 2ss$, а $p = 2rs$, и тогда бы было $xx = (rr + 2ss)^2$, а по томъ $yy = 4rs(rr + 2ss)$ и четвертая сего также часть $rs(rr + 2ss)$ должна бы быть квадратъ, слѣдов. r и s каждой особливо. Положивъ $r = it$, $s = ki$ будетъ третей множителъ

житель $rr + 2ss = t^2 + 2u^2$, которой также долженъ быть квадратъ.

IV. Чего ради ежели бы $x^2 + 2y^2$ было квадратъ, то бы и $t^2 + 2u^2$ было квадратомъ, гдѣ числа t и u были бы гораздо меньше нежели x и y , и такимъ бы образомъ завсегда доходить можно было до меньшихъ чиселъ; но когда сія формула въ малыхъ числахъ квадратомъ быти не можетъ, то она, какъ легко усмотрѣть можно, не будетъ также квадратомъ и въ большихъ числахъ.

1013.

Что же напротивъ того до формулы $x^2 - 2y^2$ касается, то объ ней доказать нельзя, чтобъ она не могла быть квадратомъ; и когда подобнымъ образомъ изчисленіе производить станешь, то можно безконечно много найти случаевъ, въ которыхъ она дѣйствительно будетъ квадратъ; ибо ежели $x^2 - 2y^2$ должно быть квадратомъ, то выше сего показано, что $xx = rr + 2qq$, а $y = 2pq$, и получится тогда $x^2 - 2y^2 = (rr - 2qq)^2$, но и $rr + 2qq$ также квадратъ быть долженствуетъ. Сіе учинится

нись, ежели $p = rr - 2ss$, а $q = 2rs$ и будетъ $xx = (rr + 2ss)^2$. Но здѣсь примѣчать надлежитъ, что здѣлалось бы сіе положивъ $p = 2ss - rr$, $q = 2rs$; по чему сіи два случая разсмотрѣть должно.

I. Пусть будетъ во первыхъ $p = rr - 2ss$, $q = 2rs$, и будетъ $x = rr + 2ss$; а понеже $yy = 2pq$, то $yy = 4rs(rr - 2ss)$ и должны r и s быть квадратами: чего ради взявъ $r = tt$ $s = uu$, будетъ $yy = 4ttuu(t^2 - 2u^2)$ и слѣдов. $y = 2tu\sqrt{t^2 - 2u^2}$; а $x = t^2 + 2u^2$.

И такъ ежели $t^2 - 2u^2$ есть квадратъ, то будетъ такожде $x^2 - 2y^2$ квадратъ. Хотя t и меньшія числа нежели x и y , то не лзя по прежнему заключить, чтобъ $x^2 - 2y^2$ могло быть квадратъ, понеже опшуду приходимъ мы къ подобной формулѣ въ меньшихъ числахъ; ибо $x^2 - 2y^2$ можетъ быть квадратъ не доходя до формулы $t^2 - 2u^2$, по тому что сіе инымъ образомъ учиниться можетъ, а именно: въ другомъ случаѣ, которой мы еще разсмотрѣть имѣемъ.

II. По сему пусть будетъ $p = 2ss - rr$, $q = 2rs$, то хотя и будетъ по прежнему $x = rr + 2ss$; но для y получится $yy = 2pq$

$\equiv 2pq \equiv 4rs (2ss - rr)$. Взявъ теперь $r \equiv tt$, $s \equiv uu$ получится $yy \equiv 4ttuu (2u^* - t^*)$. слѣд. $y \equiv 2tu \sqrt{(2u^* - t^*)}$, а $x \equiv t^* + 2u^*$; откуда явствуется, что формула наша $x^* - 2y^*$ также квадратъ быть можетъ, ежели сн $2u^* - t^*$ квадратомъ будетъ. Сие очевидно сдѣлается, когда $t \equiv 1$, $u \equiv 1$, по чему получить $x \equiv 3$, $y \equiv 2$, откуда формула наша будетъ $81 - 2 \cdot 16 \equiv 49$.

III. Мы уже прежде видѣли, что $2u^* - t^*$ будетъ квадратъ, когда $u \equiv 13$ и $t \equiv 1$, по тому что тогда $\sqrt{(2u^* - t^*)} \equiv 239$. Поставивъ теперь сн знаменованія вмѣсто t и u получимъ новой случай для нашей формулы; а именно $x \equiv 1 + 2 \cdot 13^* \equiv 57123$ и $y \equiv 2 \cdot 13 \cdot 239 \equiv 6214$.

IV. Но какъ скоро найдены знаменованія вмѣсто x и y , то можно оныя поставить въ формулѣ No 1, вмѣсто t и u и получатся новыя вмѣсто x и y .

Нашедъ $x \equiv 3$, $y \equiv 2$, положимъ въ первомъ рѣшеніи $t \equiv 3$, $u \equiv 2$, и тогда $\sqrt{(t^* - 2u^*)} \equiv 7$, то получимъ новыя знаменованія $x \equiv 81 + 2 \cdot 16 \equiv 113$ и $y \equiv 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \equiv 84$, а отсюда найдемъ $xx \equiv 12769$, $x^* \equiv 165047361$, по томъ $yy \equiv 7056$, $y^* \equiv 49787136$, по сему
будетъ

будеть $x^2 - 2y^2 = 63473089$, чего квадратной корень есть 7967, которой во всемъ сходствуесть съ положенными съ начала $pp - 2qq$; ежели $t = 3$, $u = 2$ будетъ $r = 9$ и $s = 4$, чего ради $p = 81 - 32 = 49$ и $q = 72$; отсюда $pp - 2qq = 2401 - 10368 = -7967$.

Г Л А В А XIV.

Разрѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ принадлежащихъ до сей части аналитики.

1014.

До сихъ поръ изъясняли мы нужные пріемы случающіеся въ сей части аналитики, дабы рѣшить всѣ сюда принадлежащіе вопросы, и сіе самое намѣрены мы здѣсь пространнѣе изъяснить нѣкоторыми предложенными вопросами съ ихъ рѣшеніемъ.

1015.

Вопросъ. Найти число, къ которому когда придастся, или изъ онаго вычтется 1, то бы въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадратъ?

Положи искомое число x , то какъ $x + 1$, такъ и $x - 1$ должно быть квадратъ,
для

для перваго возми $x+1=pp$, будетъ $x=pp-1$, а $x-1=pp-2$, что также должно быть квадратомъ. Положивъ корень его $p-q$ будетъ $pp-2=pp-2pq+qq$, гдѣ pp уничтожается и найдется $p=\frac{qq+2}{2q}$, а отсюда по томъ

сыщется $x=\frac{q^2+4}{4qq}$, гдѣ q по изволению и въ дробяхъ также взять можно; того ради положи $q=\frac{r}{s}$ и получится $x=\frac{r^2+4s^2}{4rss}$, котораго меньшія знаменованія здѣсь предложимъ.

$$\begin{array}{l} \text{Когда } r=1 \mid 2 \mid 1 \mid 5 \\ \quad \quad s=1 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \\ \text{будетъ } x=\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4} \mid \frac{61}{16} \mid \frac{81}{36} \end{array}$$

1016.

Вопросъ. Сыскавъ число, къ которому когда два произволяющія числа на прим. 4 и 7 придадутся, то бы въ обоихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему двѣ формулы $x+4$ и $x+7$ должны быть квадраты, чего ради положи для первой $x+4=pp$, будетъ $x=pp-4$, а другая формула $pp+3$ также

же квадратомъ быть должна ; положивъ
 ся корень $=p+q$ будетъ $pp+3=pp+2pq$
 $+qq$, откуда найдется $p=\frac{3-qq}{2q}$, слѣд.

$x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Взявъ вмѣсто q дробь

$\frac{r}{s}$, получимъ $x=\frac{9s^4-22rrss+r^4}{4rrss}$, гдѣ вмѣ-

сто r и s всѣ произволяющія числа брать
 можно.

Положи $r=1$ и $s=1$ будетъ $x=-3$,
 а отсюда $x+4=1$, $x+7=4$. Но ежели
 пожелаешь имѣть вмѣсто x положитель-
 ные числа, то возьми $s=2$, $r=1$ и полу-
 чится $x=\frac{17}{16}$, и по чему $x+4=\frac{141}{16}$ и $x+7$
 $=\frac{169}{9}$. Еслили же положить $s=3$, $r=1$, то
 найдется $x=\frac{113}{9}$, откуда $x+4=\frac{169}{9}$ и $x+7$
 $=\frac{196}{9}$.

Но когда послѣдней членъ долженъ
 превышать средней, то возьми $r=5$, $s=1$,
 и будетъ $x=\frac{21}{33}$, а отсюда $x+4=\frac{131}{33}$. и x
 $+7=\frac{196}{33}$.

1017.

Вопросъ. Сыскать такую дробь, ко-
 торую когда или придашь къ 1, или вы-
 чтешь

чтешь изъ оной, тобъ въ обоихъ случаяхъ вышелъ квадрапъ.

Когда сѣ двѣ формулы $1+x$ и $1-x$ должны быть квадрапами, то положи для первой $1+x=pp$, будетъ $x=pp-1$, а другая формула $1-x=2-pp$, также должна быть квадратомъ; но здѣсь ни первой ни послѣдней членъ не квадрапы, то надлежитъ смотрѣть, не лзя ли попасть на такой случай, въ которомъ сѣ дѣлается. Такой случай заразъ попадается, а именно, когда $p=1$, для того возьми $p=1-q$, такъ что $x=qq-2q$ и будетъ наша формула $2-pp=1+2q-qq$, коей корень положивъ $=1-qr$, получится $1+2q-qq=1-2qr+qqrr$, отсюда $2-q=-2r+qrr$ и $q=\frac{2r+2}{rr+1}$, по чему $x=\frac{4r-4r^3}{(rr+1)^2}$. Понеже r

есть дробь, то возьми $r=\frac{t}{u}$ и будетъ $x=\frac{4tu^3-4t^3u}{(tt+uu)^2}=\frac{4tu(uu-tt)}{(tt+uu)^2}$, слѣдов. x должно быть меньше нежели t . и по сему положи $u=2$, $t=1$ выдетъ $x=\frac{4}{15}$; взявъ $u=3$, $t=2$ найдется $x=\frac{120}{169}$, а отсюда $1+x=\frac{179}{169}$, $1-x=\frac{49}{169}$, кои оба суть квадраты.

Томъ II.

Ы

1018.

1018.

Вопросъ. Найти такія числа x , которыя когда къ 10 придадутся, или изъ 10 вычтутся, тобъ вышли квадраты?

Объ сѣ формулы $10+x$ и $10-x$ должны быть квадратами, и сѣ могло бы учиниться по прежнему способу; но чтобъ показать другой путь, то приве-ди себѣ на память, что и произведе-ніе сихъ формулъ должно быть также квад-ратъ, а имянно $100-xx$. Но здѣсь первой членъ уже квадратъ, то положи корень $=10-px$, и будетъ $100-xx=100-20px+prxx$, откуда $x=\frac{20p}{pp+1}$, но изъ сего слѣдуетъ, что произведение только квад-ратъ, а не каждое число особливо. Есть-ли же одно будетъ квадратъ, то и дру-гое неотмѣнно также быть долженству-етъ. Первое здѣсь $10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}$
 $=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$, но $pp+2p+1$ уже квадратъ, то надлежитъ еще сей дроби $\frac{10}{pp+1}$ быть квадратомъ, слѣдов. и сей

$\frac{10rp+10}{(rp+1)^2}$. Теперь нужно только, чтобы число $10rp+10$ было квадратъ, гдѣ опять случай отгадать надлежитъ. Оной будетъ, когда $p=3$; чего ради положивъ $p=3+q$ получится $100+60q+10qq$, возьми сего корень $=10+qr$, и будетъ $100+60q+10qq=100+20qr+qqrr$, откуда $q=\frac{60-20r}{rr-10}$ по томъ $p=3+q$ и $x=\frac{20p}{rp+1}$.

Взявъ $r=3$, будетъ $q=0$, $p=3$ и $x=6$; отсюда $10+x=16$ и $10-x=4$. Но когда возьмется $r=1$, то получится $q=-\frac{40}{9}$, $p=-\frac{13}{9}$ и $x=-\frac{234}{25}$; но все равно положить $x=\frac{234}{25}$ и будетъ $10+x=\frac{244}{25}$ и $10-x=\frac{16}{25}$, кои оба суть квадраты.

1019.

Примѣчаніе. Ежели соизволишь сей вопросъ здѣлать всеобщимъ и для каждаго даннаго числа a число x найди пожелаешь, что бы какъ $a+x$ такъ и $a-x$ были квадраты, то рѣшеніе сіе бываетъ иногда не возможно, а именно во всѣхъ случаяхъ, гдѣ число a меньше суммы двухъ

Ы 2

квад-

квадратовъ. Мы уже прежде видѣли, что отъ 1 до 50 слѣдующія числа суммы двухъ квадратовъ, или кои въ формулѣ $xx+yy$ содержатся:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50. слѣдоват. остальные 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48 не могутъ раздѣлиться на два квадрата. Слѣдов. какъ скоро a будетъ одно изъ сихъ послѣднихъ чиселъ, то вопросъ будетъ невозможной.

Для изъясненія сего положивъ $a+x=pp$ и $a-x=qq$ найдемся по сложенію $2a=pp+qq$, такъ что $2a$ должно быть суммою квадратовъ. Но когда $2a$ есть такая сумма, то и a также быть долженствуетъ, и по сему ежели a не будетъ сумма двухъ квадратовъ, то не возможно, чтобъ $a+x$ и $a-x$ были квадратами.

1020.

По сему когда $a=3$, то вопросъ невозможной, для того 3 не сумма двухъ квадратовъ. Хотя и можно сказать, что най-

найдутся можетъ быть два квадрата въ ломаныхъ числахъ, коихъ сумма составитъ квадратъ; но и сему также стать ся не лѣзя: ибо ежели бы было $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$, то помноживъ на $qqss$ вышло бы $3qqss = ppss + qqrr$, гдѣ $ppss + qqrr$ есть сумма двухъ квадратовъ, которые бы на 3 могли раздѣлиться; но мы прежде видѣли, что сумма двухъ квадратовъ другихъ дѣлителей имѣть не можетъ кромѣ тѣхъ, кои сами суть такія же суммы.

Хотя числа 9 и 45 на 3 раздѣлить можно, но оныя также и на 9 дѣлимы; да и каждой при томъ квадратъ, изъ которыхъ они состоятъ, а именно $9 = 3^2 + 0^2$ и $45 = 6^2 + 3^2$; что здѣсь мѣста не имѣетъ. По чему сіе слѣдствіе справедливо, что ежели число a въ цѣлыхъ числахъ суммою двухъ квадратовъ не будетъ, то сему и въ дробяхъ стать ся не лѣзя. А когда число a въ цѣлыхъ числахъ сумма двухъ квадратовъ, то оно и въ дробяхъ бесконечно многими способами быть можетъ суммою двухъ квадратовъ, что мы показать намерены.

Вопросъ. Число, которое есть сумма двухъ квадратовъ, раздробить безконечно многими способами на суммы двухъ квадратовъ?

Пусть будетъ предложенное число $ff+gg$, и надлежитъ сыскать другіе два квадрата, яко xx и yy , конхъ сумма $xx+yy$ равна числу $ff+gg$, итакъ что $xx+yy = ff+gg$. Здѣсь заразъ видно, что ежели x будетъ больше или меньше нежели f , то напротивъ того y долженъ быть меньше или больше числа g ; чего ради возми $x=f+pz$; $y=g-qz$ и будетъ $ff+2fpz+ppz+gg-2gqz+qqz=ff+gg$, гдѣ ff и gg уничтожаются, а остальные члены на z могутъ раздѣлиться; и получится $2fp+ppz-2gq+qqz=0$, или $ppz+qqz=2gq-2fp$, слѣдов. $z=\frac{2gq-2fp}{pp+qq}$, откуда для x и y слѣдующія найдутся знаменованія $x=\frac{2gpr+f(qq-pp)}{pp+qq}$ и $y=\frac{2fpr+g(pp-qq)}{pp+qq}$, гдѣ вмѣсто p и q всѣ возможные числа брать можно. Пусть наприм. данное число

сло будетъ 2, такъ что $f=1$ и $g=1$, бу-
дешь $xx+yy=2$; когда $x=\frac{2pq+qq-pp}{pp+qq}$ и

$$y=\frac{2pq+pp-qq}{pp+qq},$$

то положивъ $p=2$, а $q=$

1 найдемся $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2}$.

1022.

Вопросъ. Когда число a есть сумма двухъ
квадратовъ, найти такія числа, чинобъ
какъ $a+x$, такъ и $a-x$ были квадраты?

Пусть данное число $a=13=9+4$;
взявъ $13+x=pp$, $13-x=qq$, сложение
дастъ впервыхъ $26=pp+qq$, а вычитаніе
 $2x=pp-qq$; слѣдов. p и q такого состо-
янія быть должны, чтобъ $pp+qq$ равно
было 26 пш, которое число есть также
сумма двухъ квадратовъ, а именно $25+1$,
и такъ се число 26 надлежитъ раздро-
бить на 2 квадрата, изъ коихъ большей
взять вмѣсто pp , а меньшей вмѣсто qq
и получимся $p=5$, $q=1$, откуда $x=12$.

А по томъ по прежнему число 26 можно
безконечно многими способами раздѣлить
на два квадрата: поуже $f=5$ и $g=1$, то
ежели въ прежнихъ формулахъ вмѣсто
буквъ p и q напомнимъ t и u , а на мѣсто

x и y поставимъ p и q , то найдемъ $p = \frac{2tu + 5(уи - tt)}{tt + уи}$ и $q = \frac{10tu + tt - уи}{tt + уи}$. Когда же

теперь возмущся вмѣсто t и u числа по изволению и опредѣлятся изъ нихъ буквы p и q , то получится искомое число

$$x = \frac{pp - qq}{2}.$$

Пусть будетъ наприм. $t = 2$, $u = 1$, то выйдетъ $p = \frac{11}{5}$ и $q = \frac{23}{5}$, слѣдов. $pp - qq = \frac{408}{25}$ и $x = \frac{204}{25}$.

1025.

А чтобы сему вопросу дать общее рѣшеніе, то пусть данное число будетъ $a = cc + dd$, а искомое $= x$, такъ что син формулы $a + x$ и $a - x$ должны быть квадратами.

Положивъ $a + x = xx$ и $a - x = yy$ будетъ впервыхъ $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$; слѣдов. квадраты x и y такого свойства быти должны, чпобъ $xx + yy = 2(cc + dd)$, гдѣ $2(cc + dd)$ есть также сумма двухъ квадратовъ, а именно: $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Возми ради краткости $c + d = f$, $c - d = g$, такъ что будетъ $xx + yy = ff + gg$; но сіе по пре-
жне-

жнему учинится взявъ $x = \frac{2gprq - f(qq - pp)}{pp + qq}$

и $y = \frac{2fprq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, откуда получаемъ

самое легкое рѣшеніе, когда положимъ $p=1$ и $q=1$; ибо тогда найдется $x = \frac{2}{5} = g = c - d$, а $y = f = c + d$; слѣдов. $z = 2cd$; а отсюда $cc + ad + 2cd = (c + d)^2$ и $cc + dd - 2cd = (c - d)^2$. Для нахождения другаго рѣшенія пусть будетъ $p=2$, $q=1$ и выдешъ $x = \frac{c-7d}{5}$, а $y = \frac{7c+d}{5}$, гдѣ какъ c и d такъ

x и y можно взять отрицательными, по тому что ихъ квадраты только входятъ; но когда x долженъ быть больше нежели y , то возми d отрицательное, и найдется $x = \frac{c+7d}{5}$, а $y = \frac{7c-d}{5}$; откуда $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, которая величина ко-

гда придастся къ a , то дастъ $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$

чего квадратной корень есть $\frac{c+7d}{5}$. Если

же z вычтешь изъ a , то останется

$\frac{49cc-14cd+dd}{25}$ сего квадратной корень есть
 $\frac{7c-d}{5}$ т. е. первой x , а сей y .

1024.

Вопросъ. Найти число x , такое, что ежели какъ къ нему самому, такъ и къ его квадрату xx придастся 1, тобъ въ обоихъ случаяхъ вышли квадраты?

По сему обѣ формулы $x+1$ и $xx+1$ надлежитъ здѣлать квадратами: чего ради положи для первой $x+1=pp$ и будетъ $x=pp-1$; а вторая формула $xx+1=p^2-2pp+2$, также должна быть квадратомъ; но оная есть такого свойства, что никакого рѣшенія найти не можно, прежде нежели извѣснаго случая не будетъ; а такой случай заразъ попадаетъ, а именно: когда $p=1$; для того возьми $p=1+q$, и будетъ $xx+1=1+4qq+4q^2+q^2$, что многими способами квадратомъ здѣлать можно.

I. Взявъ корень $=1+qq$, будетъ $1+4qq+4q+q^2=1+2qq+q^2$, откуда $4q+4qq=2q$,

$=2q$, $q+4q=2$ и $q=-\frac{1}{3}$, слѣдов. $p=\frac{1}{3}$ а $x=-\frac{1}{3}$.

II. Положивъ корень $=1-qq$ получится $1+4qq+4q^2+q^3=1-2qq+q^3$, отсюда $q=-\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{3}$, слѣдов. $x=-\frac{1}{3}$, какъ и прежде.

III. Возми корень $=1+2q+qq$, чтобы первые и два послѣдніе члены уничтожились, и будетъ $1+4qq+4q^2+q^3=1+4q+6qq+4q^2+q^3$; отсюда $q=-2$ и $p=1$, по чему $x=0$.

IV. Можно также положить корень $=1-2q-qq$, и будетъ $1+4qq+4q^2+q^3=1-4q+2qq+4q^2+q^3$ отсюда $q=-2$, какъ и прежде.

V. Для уничтоженія 2хъ первыхъ членовъ возми корень $=1+2qq$, и будетъ $1+4qq+4q^2+q^3=1+4qq+4q^2$, отсюда $q=\frac{1}{3}$ и $p=\frac{2}{3}$, слѣдов. $x=\frac{1}{3}$, а изъ сего $x+1=\frac{4}{3}=(\frac{2}{3})^2$ и $xx+1=\frac{16}{9}=(\frac{4}{3})^2$.

Когда кто пожелаетъ сыскать больше знаменований вмѣсто q , то надлежитъ взять одно изъ найденныхъ напр. $-\frac{1}{3}$ и положить по томъ $q=-\frac{1}{3}+r$, но отсюда было бы $p=\frac{1}{3}+r$, $pp=\frac{1}{9}+r+r^2$ и $p^3=\frac{1}{27}+\frac{1}{3}r+\frac{2}{3}rr+\frac{1}{3}r^3+r^3$; по чему формула наша $\frac{1}{27}-\frac{1}{3}r-\frac{2}{3}rr+\frac{1}{3}r^3+r^3$, которая должна
быть

быть квадратъ, и слѣдов. умноженная на 16 также п. с. $25 - 24r - 8rr + 32r^2 + 16r^4$, которой формулы возми

I. корень $5 + fr + 4rr$, такъ что $25 - 24r - 8rr + 32r^2 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr \pm 8fr^2 + ffrr$

$+ 16r^4$; но понеже первые и послѣдние члены здѣсь уничтожаются, то опредѣли f такъ, чѣмъ и вторые члены уничтожились, что учинится положивъ $-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$, остальные же члены раздѣливъ на rr даютъ $-85 + 2r = \pm 40 + ff \pm 8fr$; удержавъ верхней знакъ будетъ

$-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, откуда $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$

но $f = -\frac{12}{5}$, то $r = \frac{31}{20}$, слѣдов. $p = \frac{31}{20}$ и $x = \frac{19}{20}$, а отсюда $xx + 1 = (\frac{99}{40})^2$.

II. Взявъ нижней знакъ будетъ $-8 + 32r$

$= -40 + ff - 8fr$, и найдется $r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}$, по

$f = -\frac{12}{5}$, то $r = -\frac{41}{25}$, слѣдов. $p = \frac{31}{20}$, и отсюда прежнее выходитъ уравненіе.

III. Пусть будетъ корень $4rr + 4r \pm 5$,

такъ что $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr \pm 40r + 25$, гдѣ два первые и послѣдній членъ уничтожаются,

а остальные раздѣливъ на r даютъ $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, или $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$; взявъ верхней знакъ будемъ $-24r - 24 = 40r + 40$, или $0 = 64r + 64$, или $0 = r + 1$, т. е. $r = -1$ и $p = -\frac{1}{2}$, которой случай уже мы имѣли, и тотъ же самой слѣдуетъ, когда возьмется исподней знакъ.

IV. Положивъ корень $= 5 + fr + grr$ определи буквы f и g , такъ чтобъ 3 первые члена уничтожились. Понесже здѣсь $25 - 24r - 8rrr + 32r^3 + 16r^5 = 25 + 10fr + 10grr + ffr + 2fgr^3 + ggr^5$, то въпервыхъ $-24 = 10f$, слѣдов. $f = -\frac{12}{5}$; по томъ $-8 = 10g + f$, по чему $g = \frac{-8 - f}{10}$, или $g = -\frac{32}{25} = -1\frac{7}{25}$; а оба послѣдніе члена раздѣливъ на r^3 даютъ $32 + 16r = 2fg + ggr$, откуда $r = \frac{2fg - 32}{16 - gg}$. Здѣсь числитель $2fg - 32 = \frac{24.172.32.625}{5.125} = \frac{32.496}{625}$, или $\frac{16.32.31}{625}$ а знаменатель $16 - gg = (4 + g)(4 - g) = \frac{32.473}{125}$, или $9. \frac{41.8.4.21}{25.625} = \frac{8.52.41.21}{25.625}$; отсюда $r =$

— $\frac{1}{12}$ и $p = -\frac{1}{12}$; а изъ сего новое знаменование числа x найдется т. е. $x = pr - 1$.

1025.

Вопросъ. Къ даннымъ тремъ числамъ a , b и c найди такое число x , которое естъли къ каждому изъ нихъ приложится, то произойдутъ квадраты, т. е. сн 3 формулы $x+a$, $x+b$ и $x+c$ надлежишь здѣлать квадратами?

Положи для первой $x+a = zz$, такъ что $x = zz - a$, то прочія формулы будутъ $zz + b - a$ и $zz + c - a$, изъ коихъ каждая должна быть квадратомъ; но сему общаго рѣшенія дать не лзя, по тому что сіе часто бываетъ невозможно и зависить единственно отъ свойства обоихъ чиселъ $b-a$ и $c-a$; ибо ежели бы наприм. было $b-a = 1$ и $c-a = -1$. т. е. $b = a + 1$ и $c = a - 1$, то должно бы обѣимъ формуламъ быть квадратами, а именно: $zz + 1$ и $zz - 1$, гдѣ безъ сомнѣнія z долженствуетъ быть дробь; него ради положивъ $z = \frac{p}{q}$ были бы сн формулы квадратами, а именно: $pp + qq$ и $pp - qq$, слѣдов. и ихъ произведение т. е. $p^2 - q^2$ также должно быть квадратъ; но что

что сему стапсья не лъзя, прежде сего уже показано.

Когда $b-a=2$ и $c-a=-2$ то есть $b=a+2$ и $c=a-2$, то взявъ $z=\frac{p}{q}$ сн двѣ формулы $pp+2qq$ и $pp-2qq$ должны бы бытъ квадратами, слѣдов. и ихъ произведение p^2-q^2 также, но сіе равнымъ образомъ невозможно.

Положи вообще $b-a=m$ и $c-a=n$, по томъ также $z=\frac{p}{q}$, то должны формулы $pp+mq$ и $pp-nqq$ быть квадратами; что, какъ мы уже и видѣли, невозможно, ежели $m=+1$, а $n=-1$, или когда $m=+2$, а $n=-2$.

Не возможно также, когда $m=ff$, а $n=-ff$; ибо было бы тогда произведеніе $p^2-f^2q^2$ разность двухъ квадратовъ, которая никогда квадратомъ бытъ не можетъ.

Равнымъ образомъ ежели $m=2ff$, и $n=-2ff$, то обѣ формулы $pp+2ffqq$ и $pp-2ffqq$ не могутъ быть квадратами, по тому что ихъ произведение $p^2-4f^2q^2$ также долженствовало бы быть квадратомъ; слѣд. положивъ $fq=r$ сія формула p^2-4r^2 , чему невозможность прежде уже показана.

Когда

Когда же $m=1$ и $n=2$, такъ что формулы $pp+qq$ и $pp+2qq$ квадратами быть должны, то положивъ $pp+qq=rr$ и $pp+2qq=ss$ будетъ изъ первой $pp=rr-qq$, слѣдов. другая $rr+qq=ss$, по чему какъ $rr-qq$ такъ и $rr+qq$ должны быть квадраты и ихъ произведеніе также; однакожь сему спастись не лзя. Отсюда довольно явствуется что не легко прибрать такія числа вмѣсто m и n , чтобъ рѣшеніе было возможно.

Средство угадывать, или находить вмѣсто m и n надлежащія знаменованія, есть слѣдующее.

Положивъ $ff+mgg=hh$ и $ff+ngg=kk$, изъ первой получится $m=\frac{hh-ff}{gg}$ а изъ второй $n=\frac{kk-ff}{gg}$, возьми теперь вмѣсто f, g, h и k числа

по изволенію, и получатся для m и n такія знаменованія, гдѣ рѣшеніе будетъ возможно.

Пусть на прим. $h=3$, $k=5$, $f=1$ и $g=2$, то будетъ $m=2$, а $n=6$. Теперь мы увѣрены, что возможно обѣ формулы $pp+2qq$ и $pp-6qq$ здѣлать квадратами: сіе учинишя, когда $p=1$ и $q=2$. Первая формула

мула будетъ квадратъ, ежели $p=rr-2ss$ и $q=2rs$: ибо тогда получится $pp+2qq=(rr+2ss)^2$, другая же формула $pp+6qq=r^2+2Orrss+4s^2$, гдѣ извѣстной случай, въ которомъ будетъ она квадратъ, есть когда $p=1$ и $q=2$, что учинится положивъ $r=1$ и $s=1$ или $r=s$ и формула наша выдетъ $25s^2$. Зная теперь сей случай возьмемъ $r=s+t$ и будетъ $rr=ss+2st+tt$, а $r^2=s^2+4s^2t+6sstt+4st^2+t^2$, по чему наша формула будетъ $25s^2+44s^2t+26sstt+4st^2+t^2$, коея корень пусть будетъ $5ss+fst+tt$, котораго квадратъ есть $25s^2+10fs^2t+10sstt+2fst^2+t^2$, гдѣ первые и послѣдніе члены сами чрезъ себя уничтожаются. Возми теперь f такъ, чтобъ и предпослѣдніе уничтожились, что здѣлается когда $4=2f$ и $f=2$, а остальные раздѣливъ на sst даютъ уравненіе $44s+26t=10fs+10t+fft=20s+14t$, или $2s=-t$, $s=-\frac{1}{2}$ и $\frac{s}{t}=-\frac{1}{2}$, по чему $s=-1$ и $t=2$, или $t=-2s$, слѣдов. $r=-s$ и $rr=ss$ самой извѣстной случай. Возми f такъ, чтобъ вторые члены уничтожились; сіе здѣлается, когда $44=10f$, или $f=\frac{22}{5}$, остальные

Толѣ II. Ъ же

же члены раздѣливъ на stt даютъ $2bs+4t$
 $=10s+ffs+2ft$, т. е. $-\frac{1}{3}s=\frac{2}{3}t$, слѣдов. $t=-\frac{1}{2}s$, и такъ $r=s+t=\frac{1}{2}s$, или $\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$, по чему $r=3$ и $s=10$; откуда получаемъ мы,
 $p=2ss-rr=191$ и $q=2rs=60$, по чему формула наша $pp+2qq=43681=209^2$ и $pp+6qq=58081=241^2$.

1026.

Примѣчаніе. Такихъ чиселъ, которыя формулу нашу дѣлаютъ квадратомъ, по прежнему способу найти еще и больше можно; но надлежитъ примѣчать, что содержаніе сихъ чиселъ m и n по произволению брать можно.

Пусть будетъ сіе содержаніе какъ a : b и возми $m=az$, а $n=bz$, то дѣло состоятъ только въ томъ, какимъ образомъ опредѣлить z , чѣмъ обѣ формулы $pp+azqq$ и $pp+bzqq$ квадратами здѣлать можно было, что мы въ слѣдующемъ вопросѣ покажемъ.

1027.

Вопросъ. Даны числа a и b , сыскать число z , чѣмъ обѣ формулы $pp+azqq$
 и

и $pp+bxqq$ были квадратами, и при томъ самыя меньшія взять знаменованія для p и q ?

Положи $pp+azqq=rr$, $pp+bxqq=ss$ и помножь первую на b , а другую на a , то разность ихъ дастъ сіе уравненіе $(b-a)pp=brr-ass$, откуда $pp=\frac{brr-ass}{b-a}$, которая формула должна быть квадратъ, что и учинится положивъ $r=s+(b-a)t$ и будетъ $pp=\frac{brr-ass}{b-a}=\frac{b(s+(b-a)t)^2-ass}{b-a}$
 $=\frac{(b-a)ss+2b(b-a)st+b(b-a)^2tt}{b-a}=ss+2bst$
 $+b(b-a)tt$; положивъ $p=s+\frac{x}{y}t$ будетъ $pp=ss+\frac{2}{y}st+\frac{x^2}{y^2}tt$, гдѣ ss уничтожается, а остальные члены раздѣливъ на t и помноживъ на yy даютъ $2bsyy+b(b-a)tyy=2sxy$
 $+txx$, откуда $t=\frac{2sxy-2bsyy}{b(b-a)yy-xx}$, по чему $\frac{t}{s}$
 $=\frac{2xy-2byy}{b(b-a)yy-xx}$, слѣдов. $t=2xy-2byy$ а $s=b$
 $(b-a)yy-xx$: по томъ $r=2(b-a)xy-b(b-a)$
 $yy-xx$ и отсюда $p=s+\frac{x}{y}t=b(b-a)yy+xx$

$-2bxy = (x-by)^2 - aby$. Нашедъ p , r и s осталось еще сыскать z ; на сей конецъ выпиши первое уравненіе $pp + azqq = rr$ изъ другаго $pp + bzqq = ss$, остатокъ будетъ $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r)(s-r)$; но $s+r = 2(b-a)xy - 2xx$, $s-r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$; или $s+r = 2x(b-a) = y-x$ и $s-r = 2by(b-a)y - (b-a)x = 2(b-a)y(by-x)$; отсюда $(b-a)zqq = (2x(b-a)y-x) \cdot (2(b-a)y(by-x))$ или $zqq = (2x(b-a)y-x)(2y(by-x)) = 4xy(b-a)y-x)(by-x)$ слѣдов. $z = \frac{4xy(b-a)y-x)(by-x)}{qq}$ по чему

вмѣсто qq берется самой большой квадратъ, на котораго числитель можетъ раздѣлиться, а вмѣсто p нашли уже мы $p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - aby$, откуда видно, что сѣи формулы будутъ простѣе, когда возмется $x-by = v$, или $x = v+by$ и будетъ $p = vv - aby$, а $z = \frac{4(v+by)y(v)(v+ay)}{qq} = \frac{4vy(v+ay)(v+by)}{qq}$;

гдѣ числа v и y по изволенію взять можно и найдется сперва qq , когда вмѣсто его большой квадратъ возмется, которой содержится въ числитель, а отсюда уже найдется z , по помѣ $m=az$, $n=bz$, и наконецъ

нецъ $p=vv-avyu$; а отсюда получатся искомыя формулы.

I. $pp+azqq=(vv-avyu)^2+4avy(v+ay)(v+by)$
 квадратъ, коего корень естъ $r=-vv-2avy-avyu$, а другая формула $pp+bzqq=(vv-avyu)^2+4bvy(v+ay)(v+by)$, которая также квадратъ, коего корень $s=-vv-2bvy-avyu$, гдѣ знаменованія чисель r и s положительныя также быть могутъ. Сіе потребно изъяснить нѣкоторыми примѣрами.

1028.

Примѣръ. Пусть будетъ $a=-1$ и $b=+1$; найти такія числа вмѣсто x , чтобъ сіи 2 формулы $pp-xqq$ и $pp+xqq$ могли быть квадратами, а именно первая $=rr$, а другая $=ss$?

Здѣсь будетъ $p=rr+yu$, а чтобъ найти x , то надлежитъ рассмотреть формулу $x=\frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$ и взять вмѣсто v и y слѣдующія числа;

v	$=2----$	3	4	5 --	16	8	
y	$=1----$	2	1	4 --	9	1	
			Б 3				v

$v-y=1$ ----	1	3	1 - -	7	7
$v+y=3$ ----	5	5	9 - -	25	9
$zqq=4.2.1.3$	120	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
$qq=4$ ----	4	16	9.16	36.25.16	16.9.
$z=6$ ----	30	15	5 - -	7 - - - -	14
$p=5$ ----	13	17	41	337 - -	65

откуда имѣемъ мы слѣдующія вмѣсто z знаменованія

I	II	III	IV	V	VI
6	30	15	5	7	14

по чему слѣдующія формулы могутъ разрѣшиться.

- I. формулы $pp-6qq$ и $pp+6qq$ могутъ быть квадратами, когда $p=5$ и $q=2$; ибо первая будетъ $25-24=1$, а другая $=25+24=49$.
- II. Также сии двѣ $pp-30qq$ и $pp+30qq$ будутъ квадратами, когда $p=13$ и $q=2$; ибо первая $=169-120=49$, а другая $=169+120=289=17^2$.
- III. Слѣдующія двѣ формулы $pp-15qq$ и $pp+15qq$ будутъ также квадратами, ежели $p=17$ и $q=4$; первая будетъ $=289-240=49$, а другая $=529=23^2$.
- IV. Квадратами также могутъ быть сии двѣ формулы $pp-5qq$ и $pp+5qq$, что учинится, когда $p=41$ и $q=12$; первая бу-

будеть $=1681-720=961=31^2$, а другая $2401=49^2$.

V. Наконецъ формулы $pp-7qq$ и $pp+7qq$ будутъ квадратами, полагая $p=337$, а $q=120$; первая выдеть $=113569-100800=12769=113^2$, а другая $=113569+100800=214369=463^2$.

1029.

Примѣръ. Когда оба числа m и n содержатся между собою какъ 1:2, т. е. когда $a=1$ и $b=2$, слѣдов. $m=x$ и $n=2x$, надлежитъ сыскать знаменованіе вмѣсто x , чтобъ сн двѣ формулы $pp+2qq$ и $pp+2zqq$ были квадратами. Къ сему всеобщей формулы употреблять не нужно; но заразъ сей примѣръ съ прежнимъ снести можно: ибо положивъ $pp+2qq=rr$ и $pp+2zqq=ss$, найдется изъ первой $pp=rr-2qq$, которую величину вмѣсто pp поставивъ во второй будетъ $rr+2qq=ss$; то сн формулы $rr-2qq$ и $rr+2qq$ сдѣлать можно квадратами, и есть случай прежняго примѣра; по чему слѣдующія будутъ здѣсь вмѣсто знаменованн 6, 30, 15, 5, 7, 14 и пр.

Б 4

Та-

Такое превращеніе и вообще сдѣлать можно, зная что 2 формулы $pp+mqq$ и $pp+nqq$ квадратами быть могутъ. Взявъ $pp+mqq=rr$ и $pp+nqq=ss$ первая даетъ $pp=rr-mqq$, слѣдов. въпоря $rr-mqq+nqq=ss$ или $rr+(n-m)qq=ss$; слѣдов. когда первая возможна, то и сн формулы $rr-mqq$ и $rr+(n-m)qq$ также возможны; но понеже m и n можно намъ переставить, то и сн возможны $rr-nqq$ и $rr+(m-n)qq$. Еслили же прежнія формулы не возможны, то и сн такожде.

1030.

Примѣръ. Пусть будутъ числа m и n какъ 1: 3, или $a=1$, $b=3$; слѣдов. $m=za$ $n=3z$, такъ что сн формулы $pp+3qq$ и $pp=3zqq$ должны быть квадратами.

Понеже здѣсь $a=1$, $b=3$, то всегда дѣло будетъ возможное, когда только $zqq=4vu(v+y)(v+3y)$ и $p=vv-3yu$, чего ради возми высьшо v и y слѣдующія знаменованія.

$v=1$	$\left \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 1 \\ 8 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 16 \\ 9 \end{array} \right.$	$\dots$
$y=1$	$\left \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 1 \\ 8 \end{array} \right.$	$\left \begin{array}{c} 16 \\ 9 \end{array} \right.$	$\dots$

$v+y=2$	5 -	5 -	9 - -	25 - - -
$v+3y=4$	9 -	7 -	25 - -	43 - - -
$zqq=4.8$	9.4.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
$qq=4.4$	4.9	4.4	4.4.9.25	4.9.16.25
$z=2$	30	35	2 - - -	43 - - -
$p=2$	3	13	191 - -	13 - - -

Здѣсь имѣемъ мы 2 случая для $z=2$, по чему двоякимъ образомъ формулы $pp+2qq$ и $pp+6qq$ квадратами здѣлать можемъ. Впервыхъ учинится сѣ, когда $p=2$ и $q=4$, слѣдов. также когда $p=1$, $q=2$, и найдется $pp+2qq=9$, а $pp+6qq=25$.

По томъ бываетъ также сѣ, когда $p=191$ и $q=60$: ибо тогда получится $pp+2qq=(209)^2$ и $pp+6qq=(241)^2$. Но не можетъ ли также быть $z=1$? Сѣ бы здѣлалось, естлибъ вмѣсто zqq вышелъ квадратъ, что разрѣшить трудно. Естли же бы захотѣли разрѣшить сей вопросъ, могутъ ли двѣ формулы $zx+qq$ и $zx+3qq$ быть квадратами, или нѣтъ, то слѣдующимъ образомъ рѣшеніе разположить можно.

1031.

Надлежитъ разыскать, могутъ ли формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ быть квадра-

пами, или нѣтъ. Положивъ $pp + qq = rr$, $pp + 3qq = ss$ надлежитъ примѣчать слѣдующее.

I. Числа p и q можно взять недѣлимыми между собою: ибо естли бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы формулы остались еще квадратами, ежели бы p и q на онаго раздѣлились.

II. p четное число быть не можетъ: по тому что q было бы нечетное и слѣдов. вторая формула была бы число сего роду $4n + 3$, которое квадратомъ быть не можетъ. По чему p неопредѣленно нечетъ, а pp число сего рода $8n + 1$.

III. Когда p нечетъ, то изъ первой формулы q не только четное, но еще и на 4 дѣлимо, дабы qq было число сего рода $16n$, а $pp + qq$ сего $8n + 1$.

IV. Также p на 3 не можетъ быть дѣлимо: ибо pp могло бы на 9 раздѣлиться, а qq нѣтъ; слѣдов. $3qq$ только на 3, а не на 9; и такъ $pp + 3qq$ только на 3, а не на 9, и для того квадратомъ быть не можетъ. По сему число p на 3 недѣлимо, а pp будетъ сего роду $3n + 1$.

V. Когда p на 3 недѣлимо, то должно q дѣлиться на 3: ибо естли бы q на 3 было недѣлимо, то было бы qq число сего рода $5n+1$, и по сему $pp+qq$ сего $5n+2$, которое квадратомъ быть не можетъ; слѣд. q должно на 3 дѣлиться.

VI. Также p на 5 недѣлимо быть можетъ: ибо ежели бы сіе такъ было, то бы q на 5 не дѣлилось, и qq число сего рода $5n+1$, или $5n+4$; слѣд. $3qq$ число сего рода $5n+3$ или $5n+2$, котораго рода было бы также $pp+3qq$, и слѣд. не могло бы быть квадратомъ, по чему p неотмѣнно должно быть на 5 недѣлимо, а pp число сего рода $5n+1$, или $5n+4$.

VII. Ежели p на 5 недѣлимо, то посмотримъ, можетъ ли q раздѣлиться на 5, или нѣтъ. Естли бы q на 5 не дѣлилось, то бы qq было сего роду $5n+2$, или $5n+3$, какъ уже мы видѣли, и было бы тогда pp или $5n+1$, или $5n+4$, а $pp+3qq$, или $5n+1$, или $5n+4$, такъ какъ и pp . Пусть будетъ $pp=5n+1$, то надлежало бы быть $qq=5n+5$:
ибо

ибо иначе $pp+qq$ не могло бы быть квадратомъ; но вышло бы $3qq=5n+2$. И $pp+3qq=5n+3$, которое квадратомъ быть не можетъ. Когда же $pp=5n+4$, то должно бы $qq=5n+1$, и $3qq=5n+3$; слѣдов. $pp+3qq=5n+2$, что также квадратомъ не будетъ. Отсюда слѣдуетъ, что qq должно дѣлиться на 5.

VIII. Когда q на 4, по томъ на 3 и наконецъ на 5 дѣлиться должно, то надлежитъ быть число 4.3.5 n или $q=60n$; по чему наша формула будетъ $pp+3600nn=rr$, и $pp+10800nn=ss$. Вычти первую изъ второй, и будетъ $7200nn=ss-rr=(s+r)(s-r)$, такъ что $s+r$ и $s-r$ должны быть множители числа 7200 nn . При чемъ надлежитъ примѣчать, что какъ s такъ и r должны быть нечетныя числа, и при томъ между собою недѣлимы.

IX. По сему пусть будетъ $7200nn=4fg$, кого множители $2f$ и $2g$ взявъ $s+r=2f$, а $s-r=2g$ будетъ $s=f+g$, $r=f-g$, гдѣ f и g должны быть между собою недѣлимы, одно четъ, а другое нечетъ; но понеже $fg=1800nn$, то 1800 nn надле-

лежитъ раздробить на 2 множителя, изъ коихъ бы одинъ былъ четной, а другой нечетъ, и при томъ не имѣли бы общаго дѣлителя.

Х. Надлежитъ еще примѣчать, что ежели $rr=pp+qq$, и слѣдственно r дѣлитель числа $pp+qq$, то число $r=f-g$ также должно быть суммою двухъ квадратовъ; а понеже оно нечетъ, то въ формулѣ $4n+1$ содержаться долженствуетъ.

ХІ. Взявъ $n=1$ будетъ $fg=1800=8.9.25$, откуда слѣдующія раздробленія выходятъ: $f=1800$ и $g=1$, или $f=200$, и $g=9$, или $f=72$, а $g=25$, или $f=225$, а $g=8$. По первому будетъ $r=f-g=1799=4n+3$; по второму $r=f-g=191=4n+3$; по третьему $r=f-g=47=4n+3$, и наконецъ по четвертому $r=f-g=217=4n+1$. По чему 3 первые не годятся, а остается только четвертое раздробленіе; откуда вообще заключить можно, что самой большей множитель нечетной, а меньшей четной быть должны. Но здѣсь также знаменованіе $r=217$ имѣть мѣста не можетъ, по тому

му что сіе число на 7 дѣлится, которое не сумма двухъ квадратовъ.

XII. Положивъ $n=2$ будемъ $fg=7200=32.225$; взявъ $f=225$ и $g=32$, такъ что $r=f-g=193$, которое число есть сумма двухъ квадратовъ, и достойно, чтобъ съ нимъ пробу здѣлать. Когда $q=120$ и $r=193$, то $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, но $r+q=313$ и $r-q=73$, то явствуетъ, что вмѣсто pp квадрата не выдемъ, по тому что оба множители не квадраты.

Еслили бы кто похотѣлъ взять на себя сей трудъ и брать вмѣстѣ и другія числа, то весь бы трудъ былъ тщетной; что мы показать намѣрены.

1032.

Теорема. Не возможно, чтобъ двѣ формулы $pp+qq$ и $pp+3qq$ были вдругъ квадратами; или въ такихъ случаяхъ, когда одна будетъ квадратъ, то другая заподлинно не квадратъ; что доказываемъ мы такимъ образомъ.

Когда p нечетъ, а q четъ, какъ мы видѣли, то $pp+qq$ не иначе квадратомъ
быть

быть можетъ, какъ только ежели $q = 2rs$ и $p = rr - ss$; другая же $pp + 3qq$ иначе квадратамъ не будетъ, какъ только естли $q = 2tu$, а $p = tt - 3uv$, или $3uv - tt$. Понеже въ обоихъ случаяхъ q должно быть удвоенное произведеніе, то положи вмѣсто обоихъ $q = 2abcd$, и возми для перваго $s = ab$ и $t = cd$, а для другаго $t = ac$ и $u = bd$. Въ первомъ случаѣ будетъ $p = aabb - ccdd$, а въ другомъ $p = aacc - 3bbdd$, или также $3bbdd - aacc$, которыя оба знаменованія одинаковы быть должны. И такъ получимъ мы, или $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, или $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; при чемъ должно знать, что числа a , b , c и d вообще меньше нежели p и q ; по чему надлежитъ намъ разсмотрѣть каждой изъ сихъ двухъ случаевъ особенно. Изъ перваго получаемъ мы $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$, или $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, откуда $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, которая дробь должна быть квадратъ; но понеже здѣсь числитель и знаменатель иного общаго дѣлителя кромѣ 2 хъ имѣть не могутъ, по тому что разность оныхъ есть $2dd$, и такъ ежели бы 2 было общимъ

щимъ дѣлителемъ, то надлежало бы какъ $\frac{aa+dd}{2}$, такъ и $\frac{aa+3dd}{2}$ быть квадратами; но оба числа a и d въ семь случаевъ нечетныя; слѣдов. ихъ квадраты надлежатъ до формулы $8n+1$, по чему послѣдняя формула $\frac{aa+3dd}{2}$ получить сей видъ $4n+2$, которой квадратомъ быть не можетъ; по чему 2 общимъ дѣлителемъ быть не можетъ; но числитель $aa+dd$, и знаменатель $aa+3dd$ между собою недѣлимы, слѣдов. каждой долженъ быть квадратомъ: по тому что сии формулы съ первыми сходны. Откуда слѣдуетъ, что ежели бы первые были квадратами, то бы и въ меньшихъ числахъ такія формулы квадратами были, и такимъ бы образомъ можно было приписать къ меньшимъ числамъ; но когда такихъ формулъ въ малыхъ числахъ нѣтъ, то и въ большихъ также не будетъ. Сие слѣдствіе столь же справедливо, какъ и прежней второй случай $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$ ведетъ къ тому же. Но отсюда $aabb+aacc=3bbdd+ccdd$ или $aa(bb+cc)=dd(3bb+cc)$, по чему $\frac{aa}{dd}=\frac{bb+cc}{3bb+cc}=\frac{cc+bb}{cc+3bb}$, кото-

рая дробь должна быть квадратъ; и симъ прежнее доказательство подкрѣпляется: ибо если бы были такіе случаи въ большихъ числахъ, гдѣ $pp+qq$, и $pp+3qq$ квадраты, то бы также и въ малыхъ числахъ оныя быть должныствовали, однакожь невозможны.

1033.

Вопросъ. Найти 3 такія числа x , y и z , изъ которыхъ ежели 2 между собою помножатся, и къ произведенію придастся 1, тобъ вышли квадраты?

По чему сїи 3 формулы I) $xy+1$, II) $xz+1$, III) $yz+1$ должны быть квадратами.

Возьми для двухъ послѣднихъ $xz+1 = pp$, $yz+1 = qq$, и найдется $x = \frac{pp-1}{z}$ а $y = \frac{qq-1}{z}$; по чему первая формула будетъ $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz} + 1$, которая должна быть квадратъ и слѣдственно умноженная

Толкъ II. Ъ ная

ная на zx ; т. е. сѣя $(pp-1)(qq-1)+zx$, которую легко квадратомъ здѣлать можно: ибо положивъ корень ея $=x+r$ получится $(pp-1)(qq-1)=2rx+rr$, откуда $z=\frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, гдѣ вмѣсто p, q и

r можно брать числа по изволению.

Положивъ напр. $r=-pq-1$ будетъ $rr=-ppqq+2pq+1$, и $z=\frac{-2pq-pp-qq}{-2pq-2}=\frac{pp+2pq+qq}{2pq+2}$, слѣдов. $x=\frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+qq}=\frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}$ и $y=\frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}$.

Ежели пожелаешь имѣть цѣлыя числа, то положи первую формулу $xy+1=pp$, и возьми $z=x+y+q$, будетъ 2 рая формула $xx+xy+xq+1=xx+xq+pp$, а третья $xy+yy+qy+1=yy+qy+pp$, кои очевидно будутъ квадратами, когда возмется $q=\pm 2p$: ибо тогда вѣпорая будетъ $xx\pm 2px+pp$, коего корень есть $x\pm p$; третья же будетъ $yy\pm 2py+pp$, коей корень $y\pm p$. По чему имѣемъ мы сѣе изрядное рѣшеніе: $xy+1=pp$, или $xy=pp-1$,

-1 , что для каждого числа, которое за p берется, легко здѣлаться можетъ; по томъ и третье число есть двойко, или $z = x + y + 2p$, или $z = x + y - 2p$, что мы слѣдующими примѣрами изъяснить намѣрены.

I. Взявъ $p = 3$ будетъ $pp - 1 = 8$; теперь положи $x = 2$, $y = 4$ и получимся z , или $= 12$, или $z = 0$, слѣдов. 3 искомыя числа суть 2, 4 и 12.

II. Пусть $p = 4$ будетъ $pp - 1 = 15$; взявъ $x = 3$ и $y = 5$ будетъ $z = 16$, или $z = 0$; по чему 3 искомыя числа суть 3, 5 и 16.

III. Пусть $p = 5$ будетъ $pp - 1 = 24$ и положивъ $x = 3$, $y = 8$ найдемся $z = 21$, или также $z = 1$, откуда слѣдующія выходятъ числа 1, 3 и 8; или 3, 8 и 21.

1034.

Вопросъ. Сыскать 3 такія цѣлыя числа x , y и z , что ежели къ произведенію изъ каждаго двухъ придастся данное число a , тобъ произойдетъ квадратъ?

Слѣдов. сии 3 формулы должны быть квадратами: I) $xy + a$, II) $xz + a$, III) $yz + a$

$+a$. Поставь за первую $xy+a=pr$, и возьми $z=x+y+q$, то вторая $xx+xy+xq+a=xx+xq+pr$, а третья $xy+yy+qy+a=yy+qy+pr$, кои обѣ будутъ квадратами, когда $q=\pm 2p$ такъ что $z=x+y\pm 2p$, и отсюда двѣ величины для z найти можно.

1035.

Вопросъ. Требуется 4 цѣлыя числа x, y, z и v , такъ что ежели къ произведено изъ каждаго двухъ придастся данное число a , то бы каждой разъ вышелъ квадратъ?

По сему слѣдующія 6 формулъ надлежитъ здѣлать квадратами: I) $xy+a$; II) $xz+a$; III) $yz+a$; IV) $xv+a$; V) $yv+a$, VI) $zv+a$. Поставь за первую $xy+a=pr$, и возьми $z=x+y+2p$, то будетъ 2-я и 3-ья формула квадратъ. По томъ возьми $v=x+y-2p$ будетъ 4-тая и 5-тая формула квадратъ, слѣдоват. осталась только 6-тая, которая будетъ $xx+2xy+yy-4pr+a$, и которая также должна быть квадратъ. Понеже $pr=xy+a$, то будетъ послѣдняя формула $xx+2xy+yy-3a$. И такъ сн двѣ формулы квадратами

ми еще здѣлать надлежитъ: I) $xy + a = pr$; II) $(x - y)^2 - 3a$: корень послѣдней пусть будетъ $(x - y) - q$, и получится $(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq$, откуда $-3a = -2q(x - y) + qq$; по томъ $x - y = \frac{qq + 3a}{2q}$, или $x = y + \frac{qq + 3a}{2q}$, слѣдов. $pr = yu + \frac{qq + 3a}{2q}y + a$. Возмъ $p = y + r$ и будетъ $2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q}y + a$, или $4qry + 2qrr = (qq + 3a)y + 2aq$, или $2qrr - 2aq = (qq + 3a)y - 4qry$, и $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr}$,

гдѣ q и r по изволению взять можно, и состоятъ только въ томъ, чтобъ вмѣсто x и y цѣлыя вышли числа. Когда $p = y + r$, то x и r будутъ также цѣлыя, и главное дѣло зависить здѣсь отъ свойства даннаго числа a , гдѣ затрудненіе для цѣлыхъ чиселъ быть можетъ; но надлежитъ примѣчать, что сіе рѣшеніе чрезъ то весьма ограничено: ибо когда буквамъ x и y знаменованія даны $x + y = \pm 2p$, хотя бы они и могли имѣть другія знаменованія. На сей конецъ хотимъ мы надъ симъ вопросомъ учинить слѣдующее разсужденіе,

которое и въ другихъ случаяхъ свою пользу имѣть можеть.

I. Если $xy + a$ должно быть квадратъ, и слѣд. $xy = rr - a$, то числа x и y за- всегда въ подобной формулѣ $rr = ass$ со- держатся; и такъ положивъ $x = bb - acc$ и $y = dd - aee$ будетъ $xy = (bd - ace) - a(be - cd)$. Еслили теперь $be - cd = \pm 1$, то $xy = (bd - ace)^2$; по чему $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Положимъ еще $x = ff - agg$, и возьмемъ числа f и g такого состоянія, чтобъ $bg - cf = \pm 1$, также $dg - ef = \pm 1$, по формулы $xz + a$ и $yz + a$ будутъ ква- дратами, и дѣло состоятъ въ нахожде- нии такихъ вмѣсто b и c , d и e также f и g чиселъ, чтобъ предписанное свой- ство исполнилось.

III. Си 3 пары буквъ хотимъ мы пред- ставить дробями яко $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{1}{g}$, кото- рые такого свойства быть должен- ствуютъ, чтобъ разность между каждою парюю изъявивъ можно было одною дробью, коей числитель 1: ибо когда $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{ce}$, гдѣ числитель, какъ мы

видѣ-

видѣли, долженъ быть ± 1 . Здѣсь можно взять одну изъ сихъ дробей по изволению, а къ ней легко найти другую, которая бы помянутое свойство имѣла. Пусть будетъ на прим. первая $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, то другая $\frac{d}{e}$ сей почти должна быть равна; пусть $\frac{d}{e} = \frac{1}{3}$, то разность будетъ $= \frac{1}{6}$. Сію вторую дробь можно также вообще опредѣлить изъ первой; ибо когда $\frac{1}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e-2d}{2e}$, то надлежитъ быть $3e-2d$

$= 1$, слѣдов: $2d = 3e - 1$ и $d = e + \frac{e-1}{2}$, че-

го ради возмн $\frac{e-1}{2} = m$, или $e = 2m + 1$ и полу-

чится $d = 3m + 1$, а наша вторая дробь будетъ $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Равнымъ образомъ къ

каждой первой дроби можно сыскать другую, чему слѣдующіе прилагаемъ примѣры:

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} = \frac{31m+1}{2m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+1}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Нашедъ двѣ такія дроби вмѣсто $\frac{b}{c}$ и $\frac{d}{e}$ легко къ нимъ сыскать третью $\frac{f}{g}$, которая съ двумя прежними въ равномъ стоитъ содержаніи: ибо надлежитъ только взять $f=b+d$ и $g=c+e$ такъ что $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$ и изъ первыхъ двухъ $be - cd = +1$ будетъ $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{+1}{cc+ce}$, подобнымъ образомъ третья безъ второй $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{ee+ce} = \frac{+1}{ee+ce}$.

V. Когда же найдены 3 такіе дроби $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ и $\frac{f}{g}$, то можно заразъ рѣшить нашъ вопросъ для 3хъ чиселъ x , y , и z , такъ что 3 формулы $xy+a$, $xz+a$ и $yz+a$ будутъ квадратами; ибо надлежитъ только взять $x=bb-acc$, $y=dd-aee$ и $y=ff-agg$. Возми наприм. изъ прежней таблички $\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$ и $\frac{d}{e}=\frac{1}{4}$, будетъ $\frac{f}{g}=\frac{1}{7}$, слѣд. $x=25-9a$, $y=49-16a$, $z=144-49a$, и получ. $xy+a=1225-840a+144aa=(35-12a)^2$ потомъ $xz+a=3600-2520a+441aa=(60-21a)^2$ и $yz+a=7056-4704a+784aa=(84-28a)^2$. 1056.

1036.

Когда же по силѣ вопроса надлежитъ найти 4 такія числа x , y , z и v , то должно къ первымъ тремъ дробямъ присовокупить еще четвертую, и по сему пусть будутъ 3 первые $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$; возьми четвертую дробь $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$ такъ чтобъ она со второю и третьею въ надлежащемъ была содержаніи. Если теперь возмешь $x=bb-acc$, $y=dd-ace$, $z=ff-agg$ и $v=hh-akk$, то слѣдующія обстоятельства исполнятся: I) $xy+a=0$, II) $xz+a=0$; III) $yz+a=0$, IV) $yv+a=0$; V) $zv+a=0$, и такъ осталось еще, чтобъ $xv+a$ было также квадратное число, которое само собою не сдѣлается, по тому что первая дробь съ четвертою не сплотно въ надлежащемъ содержаніи и для того въ первыхъ трехъ дробяхъ надлежитъ удержать неопредѣленное число m , и оное опредѣлить такъ, чтобъ $xv+a$ было также квадратъ.

VI. Взявъ изъ прежней таблички первой

случай положи $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$ и бу-

детъ $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$, а $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$, отсюда x

$= 9 - 4a$ и $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$, слѣдов.
 $xv + a = 9(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$;
 $+ a - 4a(6m+5)^2$

или $xv + a = 9(6m+5)^2 - a, 288mt + 528m + 243) + 4aa(4m+4)^2$ что легко квадрата-
 томъ сдѣлать можно: по тому что mt
 помноженъ на квадратъ, но мы при семъ
 медлить не будемъ.

VII. Можно также сіи дроби, какія здѣсь
 потребны, изъяснить вообще. Пусть бу-

детъ $\frac{b}{c} = \frac{1}{n}$, $\frac{d}{e} = \frac{nI-1}{n}$, то $\frac{f}{g} = \frac{nI+I-1}{n+1}$

и $\frac{h}{k} = \frac{2nI+I-2}{2n+1}$; поставь въ послѣдней

вмѣсто $2n+1 = m$, будетъ она $\frac{Im-2}{m}$

а изъ первой $x = II - a$, изъ послѣдней v
 $= Im - 2 - am$ и осталось только чтобы xv
 $+ a$ квадратомъ было. Понеже $v = (II - a)$
 $mt - 4Im + 4$, слѣдов. $xv + a = (II - a)^2 mt$

$-4II-3a$, что должно быть квадратомъ, коего корень положи $(II-a)t-p$; сего квадратъ $(II-a)tt-2(II-a)tp+pp$, откуда получаемъ мы $-4(II-a)It+4II-3a=-2(II-a)tp+pp$ и $m=\frac{pp-4II+3a}{(II-a)(2p-4I)}$ взявъ $p=2I+q$ будетъ $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q(-II-a)}$ гдѣ вмѣсто I и q произвольныя брать можно числа.

Ежели бы наприм. было $a=1$, то возьми $I=2$, и будетъ $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$, положивъ $q=1$ получится $m=\frac{4}{3}$ и $m=2n+1$; но здѣсь мы медлить не будемъ, а приступимъ къ слѣдующему вопросу.

1037.

Вопросъ. Требуется такія 3 числа x , y и z , чтобы какъ сумма, такъ и разность каждаго двухъ была квадратъ.

По сему слѣдующія 6 формулъ должны быть квадратами: I) $x+y$; II) $x+z$; III) $y+z$; IV) $x-y$; V) $x-z$; VI) $y-z$.

Начни съ послѣднихъ трехъ и положи $x-y=pp$, $x-z=qq$ и $y-z=rr$, то изъ
по-

послѣднихъ двухъ получимъ $x = qq + z$, а $q = rr + z$, откуда $x - y = qq - rr = pp$, или $qq = pp + rr$, такъ что сумма квадратовъ $pp + rr$ должна быть квадратъ, а именно qq ; что учинится взявъ $p = 2ab$ и $r = aa - bb$: ибо тогда $q = aa + bb$, но мы здѣсь оставимъ буквы p , q и r , и разсмотрѣвъ три первыя формулы найдемъ во первыхъ $x + y = qq + rr + 2z$; во вторыхъ $x + z = qq + 2z$; въ третьихъ $y + z = rr + 2z$. Положи за первую $qq + rr + 2z = tt$, то $2z = tt - qq - rr$; по томъ сии двѣ формулы квадратами дѣлать надлежитъ: $tt - rr = \square$ и $tt - qq = \square$, т. е. $tt - (aa + bb)^2 = \square$ и $tt - (aa - bb)^2 = \square$, которые получаютъ такой видъ: $tt - a^4 - b^4 - 2aabb$ и $tt - a^4 - b^4 + 2aabb$; но понеже какъ $cc + dd + 2cd$, такъ и $cc + dd - 2cd$ суть квадраты, то видно, что наше намѣреніе исполнится, когда мы $tt - a^4 - b^4$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$ уравнимъ; а для произведенія сего въ дѣйство положимъ $cd = aabb = ff gg h h k k$ и возьмемъ $c = ff gg$, $d = h h k k$, $aa = ff h h$ и $bb = gg k k$, или $a = fh$ и $b = gk$, по чему первое уравненіе $tt - a^4 - b^4 = cc + dd$ получитъ такой видъ: $tt - f^4 h^4 - g^4 k^4 = f^2 g^2 + h^2 k^2$, слѣдов. $tt = f^2 g^2 + f^2 h^2 + h^2 k^2 + g^2 k^2$, т. е. $tt = (f^2 + k^2)$

(g²

$(g' + h')$. Сіе произведеніе должно быть квадратъ, которой разрѣшить трудно: для того возьмемъ другой способъ и изъ трехъ первыхъ уравненій $x - y = pp$, $x - z = qq$ и $y - z = rr$ опредѣлимъ y и z , которыя будутъ $y = x - pp$, а $z = x - qq$, такъ что $qq = pp + rr$. Первые формулы выдутъ $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$ и $y + z = 2x - pp - qq$. Въмѣсто сей послѣдней положи $2x - pp - qq = tt$, такъ что $2x = tt + pp + qq$, и останется только формулы $tt + qq$ и $tt + pp$ сдѣлать квадратами. Но должно быть $qq = pp + rr$, то возми $q = aa + bb$ и $p = aa - bb$, будетъ $r = 2ab$; по чему наши формулы будутъ

$$I) \quad tt + (aa + bb)^2 = tt + a^2 + b^2 + 2aabb = \square$$

$$II) \quad tt + (aa - bb)^2 = tt + a^2 + b^2 - 2aabb = \square.$$

Уравнимъ теперь опять $tt + a^2 + b^2$ съ $cc + dd$ и $2aabb$ съ $2cd$, то намѣреніе наше исполнится. Положивъ какъ и прежде $c = ffgg$, $d = hhhh$, $a = fh$ и $b = gk$ будетъ $cd = aabb$ и надлежитъ еще быть $tt + f'h' + g'k' = cc + dd = fg' + h'k'$; отсюда слѣдуетъ $tt = fg' - f'h' + h'k' - g'k' = (f' - k')(g' - h')$, и все дѣло состоитъ въ нахожденіи двухъ

двухъ такихъ разностей между двумя биквадратами, какъ $f^2 - k^2$ и $g^2 - h^2$, которые бы помноживъ одну на другую произвели квадратъ.

На сей конецъ рассмотримъ формулу $m^2 - n^2$ и поглядимъ какія отсюда выдутъ числа, ежели вмѣсто m и n возьмутся данныя числа, и сверхъ сего особливо примемъ въ разсужденіе квадраты въ нихъ содержащіеся. Понеже $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$, то сдѣлаемъ отсюда слѣдующую табличку.

Т а б л и ц а

$mm = 4$ $nn = 1$	9 1	9 4	16 1	16 9	25 1	25 9	49 1	49 16
$mm - nn = 3$ $mm + nn = 5$	8 10	5 13	15 17	7 25	24 26	16 2. 17	48 50	33 65
$m - n = 3.5$	8. 10 16. 5	13. 5	5. 3. 17 16. 3. 17	25. 7	8. 3. 2. 13 16. 3. 13	16. 2. 17	16. 3. 2. 25 16. 25. 3. 2	3. 11. 5. 13
$mm = 64$ $nn = 1$	81 49	121 4	121 9	121 49	144 25	169 1	169 81	225 64
$mm - nn = 63$ $mm + nn = 5. 13$	32 2. 5. 13	9. 13 25. 5	16. 7 2. 5. 13	8. 9 2. 5. 17	7. 17 169	8. 3. 7 2. 5. 17	8. 11 25. 2. 5	7. 23 289
$m - n = 9.5.7.13$	64.5.13	7.25.5.13	16.3.7.5.13	16.9.5.17	169.7.17	16.3.5.7.17	16.25.5.11	289.7.23

Изъ сего уже можемъ мы дать нѣкоторыя рѣшенія, а имянно: взявъ $ff=9$ и $kk=4$ будетъ $f-k=13.5$; потомъ $gg=81$ и $hh=49$, получится $g-h=64.5.13$, откуда $tt=64.25.169$, слѣдов. $t=520$; но когда $tt=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$ и $h=7$, то получится $a=21$ и $b=18$; откуда $p=117$, $q=765$ и $r=756$; а изъ сего найдется $2x=tt+pp+qq=869314$, слѣдов. $x=434657$, по томъ $y=x-pp=420968$, и наконецъ $z=x-qq=-150568$, которое число можно взять положительнымъ: по тому что сумма въ разность обратно перемѣнится; и такъ наши искомыя числа суть слѣдующія:

$$\begin{array}{r}
 x=434657 \\
 y=420968 \\
 z=150568 \\
 \hline
 \text{чѣго ради } x+y=855625=(925)^2 \\
 x+z=585225=(765)^2 \\
 y+z=571536=(756)^2 \\
 \hline
 \text{по томъ } x-y=13689=(117)^2 \\
 x-z=284089=(533)^2 \\
 y-z=270400=(520)^2
 \end{array}$$

Другія

Другія еще числа найти можно изъ прежней таблички. Такъ когда положимъ $ff=9$, $kk=4$, $gg=121$ и $hh=4$, то будетъ $tt=135$. $5.13.9.25=9.25.25.169$, такъ что $t=3$. $5.5.13=975$; а понеже $f=3$. $g=11$, $k=2$ и $h=2$, то найдется $a=fh=6$ и $b=gk=22$; отсюда $p=aa-bb=-448$ и $q=aa+bb=520$, а $r=264$. Чего ради получится $2x=tt+pp+qq=950625+200704+270400=1421729$, слѣдоват. $x=\frac{1421729}{2}$ отсюда $y=x-pp=\frac{1020721}{2}$ и $z=x-qq=880929$. Теперь надлежитъ примѣчать, что ежели сии числа желаемое свойство имѣють, то оныя будучи помножены на каждой квадратъ, должны удержатъ сѣе свойство; и такъ взявъ найденныя числа четырежды, слѣдующія 3 числа удовлетворяють: $x=2845458$; $y=2040642$ и $z=1761858$, кои больше нежели предыдущія, такъ что тѣ за самыя меньшія возможные почтяться могутъ.

1038.

Вопросъ. Требуется 3 квадратныя числа, чтобъ разность между двумя каждымъ была квадратъ? Прежнее рѣшеніе служить также и къ сему вопросу; ибо

2

когда

когда x , y и z такія суть числа, что сии формулы будутъ квадратами I) $x+y$; II) $x-y$; III) $x+z$; IV) $x-z$; V) $y+z$; VI) $y-z$; то произведение изъ первой и второй $xx-yu$ также квадратъ. Равнымъ образомъ произведение изъ третьей и четвертой $xx-zz$, и наконецъ изъ пятой и шестой $yu-zz$ будутъ также квадратами, слѣдов. 3 искомые здѣсь квадрата будутъ xx , yu и zz ; но понеже сии числа будутъ очень велики, то безъ сомнѣнія также есть гораздо меньшия: по тому что для сдѣланія $xx-yu$ квадратомъ не нужно, чтобъ $x+y$ и $x-y$ каждое особливо было квадратъ, за тѣмъ что $25-9$ есть квадратъ, хотя $5+3$, ниже $5-3$ не квадраты. Сего ради хотимъ мы рѣшить сей вопросъ особливо и при томъ во первыхъ примѣчать, что вмѣсто одного квадрата можно взять 1 цу. Когда $xx-yu$, $xx-zz$ и $yu-zz$ квадраты, то будутъ они также квадратами, ежели на zz раздѣлятся; и по сему надлежитъ сдѣлать квадратами сии формулы: $\frac{xx}{zz} - \frac{yu}{zz} =$

$$\square; \quad \frac{xx}{zz} - 1 = \square \quad \text{и} \quad \frac{yu}{zz} - 1 = \square. \quad \text{Все дѣло со-}$$

споишь въ сихъ двухъ дробяхъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$;

взявъ $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$ послѣднія два

обстоятельства исполняющя и будетъ

$\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$, а $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Теперь

осталось только первую формулу сдѣ-

лать квадратомъ , которая есть $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz}$

$= \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1} \right)$

$\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1} \right)$. Первой множитель бу-

детъ здѣсь $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$; а другой $= 2$

$\frac{(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, коихъ произведеніе $= \frac{4(ppqq-1)}{(pp-1)^2}$

$\frac{(qq-pp)}{(qq-1)^2}$. Понсже знаменатель уже ква-

драшь и числитель помножень на квад-

рашь 4 , то надлежитъ только сдѣлать

квадратомъ сію формулу $(ppqq-1)(qq-pp)$

или также сію $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$ что учи-

вится, когда возмется $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ и $\frac{q}{p} =$

$\frac{hh+kk}{2hk}$ а понеже тогда каждой множитель бу-

детъ квадратъ $-qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk}$, то сѣмъ
обѣ дроби помноживъ одну на другую
должны произвестъ квадратъ, и слѣдова-
тельно также ежели онѣ помножатся на
 $4ffgghhkk$, т: е. $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$, кото-
рыя формулы съ прежними во всемъ сходны.

Положивъ $f=a+b$, $g=a-b$, $h=c+d$ и $k=c-d$
выдешъ $2(a^2-b^2) \cdot 2(c^2-d^2) = 4(a^2-b^2)(c^2-d^2)$
что учинится, какъ мы видѣли, ежели $aa=9$,
 $bb=4$, $cc=81$ и $dd=49$; или $a=3$, $b=2$,
 $c=9$ и $d=7$; откуда $f=5$, $g=1$, $h=16$
и $k=2$; по чему $pq=\frac{1}{2}$ и $\frac{q}{p}=\frac{260}{16}=\frac{65}{4}$.

Сѣмъ два уравненія помноживъ между
собою даютъ $qq = \frac{65}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13 \cdot 13}{16}$ слѣдов. $q = \frac{13}{4}$ и
по сему $p = \frac{1}{2}$; отсюда $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{4}{3}$ и
 $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{q} = \frac{136}{13}$; но $x = -\frac{4}{3}z$, то для нахожде-
нія цѣлыхъ чиселъ, возми $z=153$, будетъ
 $x=-697$ и $y=185$, слѣд. 3 искомыхъ квад-
ратныхъ числа будутъ слѣдующія $xx=485809$ будешъ
 $yy=34225$ $zz=10816$
 $xx-yy=(672)^2$
 $yy-zz=(104)^2$
 zz

$zz=23409$ $xx-zz=462400=(680)^2$
 которые квадраты гораздо меньше, нежели какіе бы вышли, если бы взяли квадраты 3 хъ чиселъ x , y и z изъ прежняго вопроса.

1039.

Скажетъ нѣкто, что сіе рѣшеніе одною только пробою сыскано: ибо мы брали въ помощь прежнюю табличку; но мы сіе средство для того только употребляли, чтобъ самое меньшее рѣшеніе найти. А ежели на то не смотрѣть, то помощію предписанныхъ правилъ безконечное множество рѣшеній найти можно; а именно когда въ послѣднемъ вопросѣ главное дѣло состоятъ въ томъ, чтобъ произведение $(prqq-1)_{pp}^q-1$ было квадратъ. Понеже тогда $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{1f-1}$ и $\frac{y}{z}=\frac{q+1}{1f-1}$, то взявъ $\frac{q}{p}=m$ или $q=mp$ формула наша будетъ $(mmp^4-1)(m-1)$, которая очевидно здѣлается квадратомъ, когда $p=1$, и сіе знаменованіе приведетъ насъ къ другимъ, еслии положимъ $p=1+s$; ибо тогда формула $(m-1)(m-1+4mms+6mms^2+4mms^3+mms^4)$, слѣд. раздѣливъ на квадратъ $(m-1)^2$ выйдетъ

дѣтъ $1 + 4 \frac{mn}{m-1} + 6 \frac{mns}{m-1} + 4 \frac{mns^2}{m-1} + \frac{mn^2}{m-1}$. Взявъ ради краткости $\frac{mn}{m-1} = a$; чтобъ формула $1 + 4as + 6ass + 4as^2 + as^3$ была квадратъ.

Положи ся корень $= 1 + fs + gss$, ко-
его квадратъ есть $1 + 2fs + 2gss + ffs + 2fgs^2 + ggs^2$ и опредѣли f и g такъ, чтобъ
первые 3 члена уничтожились, что здѣ-
лается, когда $4a = 2f$, или $f = 2a$, а $6a = 2g$
 $+ f$, слѣд. $g = \frac{6a - f}{2} = 3a - 2a$; остальные

же два члена даютъ сіе уравненіе $4a + as$
 $= 2fg + ggs$, откуда найдется $s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} =$

$\frac{4a - 12aa + 8a^2}{4a^2 - 12a^2 + 9aa - a}$ т. е. $s = \frac{4 - 12a + 8a^2}{4a^2 - 12aa + 9a - 1}$, ко-
торую дробь раздѣливъ на $a - 1$ получи-
ся $s = \frac{4(2a - 1)}{4aa - 8a + 1}$.

Сіе знаменованіе даетъ намъ безконечно
много рѣшеній, по тому что число m , изъ
котораго происходитъ $a = \frac{mn}{m-1}$, по изво-
ленію взять можно, что мы изъяснить
примѣрами намѣрены.

I. Пусть $m=2$, будетъ $a=\frac{1}{2}$; по чему $s=4$.

$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{21}} = -\frac{21}{2}$; откуда $p=-\frac{17}{21}$ и $q=-\frac{7}{21}$; наконецъ $\frac{x}{z} = \frac{240}{418}$ и $\frac{y}{z} = \frac{600}{4947}$.

II. Пусть $m=\frac{1}{2}$ будетъ $a=\frac{1}{2}$ и $s=4\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{21}} = -\frac{160}{11}$, слѣдов. $p=-\frac{119}{11}$ и $q=\frac{7}{11}$, откуда найдутся дроби $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

Одинъ особливо случай достоинъ примѣчанія, когда a будетъ квадратъ; что учинится ежели $m=\frac{1}{2}$, ибо тогда $a=\frac{1}{2}$ положи ради краткости $a=bb$ такъ что наша формула будетъ $1+4bbs+6bbss+4bbs^2+bbss^2$, коей корень пусть будетъ $1+2bbs+bss$, котораго квадратъ есть $1+4bbs+2bss+4b^2ss+4b^2s^2+bbss^2$, гдѣ два первые и послѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на ss дають $6bb+4bbs=2b+4b^2+4b^2s$, откуда $s=\frac{6bb-2b-4b^2}{4b^2-4bb}$
 $=\frac{3bb-b-2b^2}{2b^2-2bb}=\frac{3b-1-2b^2}{2bb-2b}$, которая дробь еще на $b-1$ раздѣлится и выдетъ $s=\frac{1-2b-2bb}{2b}$ и $p=\frac{1-2bb}{2b}$. Можно бы было

корень прежней формулы положить $1 + 2bs + bss$, коего квадратъ $1 + 4bs + 2bss + 4bbss + 4bbs^2 + bbs^2$, гдѣ первые и два послѣдніе члена уничтожаются; а остальные раздѣливъ на s даютъ $4bb + 6bbs + 4bbs^2 + 2bs + 4bbs$, откуда $s = -2$ и $p = -1$, слѣдоват. $pp - 1 = 0$; но изъ сего ничего не найдется: ибо былъ бы $z = 0$. Въ прежнемъ случаѣ, гдѣ $p = \frac{1 - 2bb}{2b}$, ежели $m = \frac{1}{2}$, то $a = \frac{1}{2} = bb$ и $b = \frac{1}{2}$, откуда выйдетъ $p = \frac{1}{2}$ и $q = mp = \frac{1}{4}$, а изъ сего $\frac{x}{z} = \frac{1}{2}$ и $\frac{y}{z} = \frac{1}{4}$.

1040.

Вопросъ. Найти 3 квадрата xx , yy и zz , коихъ бы сумма каждаго двухъ была паки квадратъ?

Понеже сн 3 формулы $xx + yy$, $xx + zz$ и $yy + zz$ должны быть квадратами, то раздѣливъ оныя на zz получатся слѣдующіе 3 квадрата: I) $\frac{xx}{zz} + \frac{yy}{zz} = 0$; II) $\frac{xx}{zz} + 1 = 0$; III) $\frac{yy}{zz} + 1 = 0$. Двѣ послѣднія

формулы разрѣшаются, когда возмется $\frac{x}{z}$
=

$= \frac{pp-1}{2p}$ и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q}$, по чему первая будетъ $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, которую помноживъ на 4 надлежитъ выйти квадрату т. е. $\frac{(pp-1)^2}{pp} + \frac{(qq-1)^2}{qq}$, или помноживъ такожде на $ppqq$ будетъ $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = \square$, что иначе учиниться не можетъ, прежде нежели не будетъ извѣстенъ случай, въ которомъ сия формула квадрать; но такой случай не скоро отгадать можно, чего ради къ другимъ приемамъ прибѣгнуть надлежитъ, изъ коихъ нѣкоторые мы здѣсь покажемъ.

1. Понеже реченную формулу изъявить можно такъ: $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = \square$, то здѣлай чтобъ ся на квадрать $(p-1)^2$ раздѣлить можно было, полагая $q-1=p+1$, или $q=p+2$, будетъ $q+1=p+3$, слѣдов. наша формула $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = \square$, которую раздѣливъ на $(p+1)^2$ долженъ выйти квадратъ, а именно $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, которой изъявляется въ сей формуль

$2p^2 + 8p^3 + 6pp - 4p + 4$. Понеже здѣсь послѣдней членъ квадратъ, то положи корень $2 + fp + gpp$, или $gpp + fp + 2$, котораго квадратъ есть $ggp^2 + 2fgp^3 + 4gpp + ffp + 4fp + 4$, гдѣ f и g такъ должно опредѣлить, чтобъ 3 послѣдніе члена уничтожились; что учинится когда $-4 = 4f$, или $f = -1$, а $6 = 4g + 1$, или $g = \frac{5}{4}$; и тогда два первые члена раздѣливъ на p^2 даютъ $2p + 8 = ggp + 2fg = \frac{5}{4}p - \frac{1}{2}$, откуда $p = -24$, $q = -22$, а изъ сего найдется $\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{575}{48}$, или $x = -575z$, и $\frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{483}{44}$, или $y = -483z$.

Взявъ $z = 16.3.11$ будетъ $x = 575.11$, а $y = 483.12$, по чему 3 хъ искомыхъ квадратовъ корни будутъ слѣдующіе.

$$\begin{array}{ll} x = 6325 = 11.23.25 & \text{отсюда } xx + yy = 23^2(2.5^2 + 25.2^2) = 23^2.373^2 \\ y = 596 = 12.21.23 & xx + zz = 11^2(575^2 + 48^2) = 11^2.511^2 \\ z = 528 = 3.11.16 & yy + zz = 12^2(483^2 + 41^2) = 12^2.485^2 \end{array}$$

II. Безконечно многими способами можно сию формулу раздѣлить на квадраты; положивъ наприм. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$, или $q+1 = 2(p+1)$ т. е. $q = 2p+1$, и $q-1 = 2p$, наша формула будетъ $(2p+1)(p+1)^2$
(p-

$(p-1)^2 + pp \cdot 4(p+1)^2 4pp = 0$, раздѣливъ на $(p+1)^2$ получимъ $(2p+1)^2(p-1) + 16p^4 = 0$, или $20p^4 - 4p^3 - 3pp + 2p + 1 = 0$, но отсюда ничего найти не лзя.

III. Взявъ $(q-1)^2 = 4(p+1)^2$, или $q-1 = 2(p+1)$ будетъ $q = 2p+3$ и $q+1 = 2p+4$, или $q+1 = 2(p+2)$, по чему формулу нашу раздѣливъ на $(p+1)^2$ получится $(2p+3)^2(p-1)^2 + 16pp(p+2)^2$ т. е. $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; сей формулы положи корень $= 3-p+gpp$, котораго квадратъ есть $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$; для уничтоженія 3 членовъ возми $53 = 6g+1$ будетъ $g = \frac{26}{3}$, а оставшіеся члены раздѣливъ на p^4 дадутъ $20p+68 = ggp-2g = \frac{676}{9}p - \frac{52}{3}$, или $\frac{676}{9}p = \frac{236}{3}$, по чему $p = \frac{59}{11}$ и $-q = 1\frac{22}{11}$, откуда пакы рѣшеніе слѣдуетъ.

IV. Положивъ $q-1 = \frac{4}{3}(p-1)$ будетъ $q = \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}$ и $q+1 = \frac{4}{3}p + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2p+1)$ и формулу нашу раздѣливъ на $(p-1)^2$ получится $\frac{(4p-1)^2}{9} (p+1)^2 + \frac{64}{9}pp(2p+1)^2$; помноживъ на 81 выдетъ $9(4p-1)^2(p+1)^2 + 64pp(2p+1)^2 = 400p^4 + 472p^3 + 73pp - 54p + 9$, гдѣ какъ первой, такъ и послѣдній членъ

членъ квадраты: для того возми корень $= 20pp - 9p + 3$ котораго квадратъ есть $400p^2 - 360p^2 + 81pp + 120pp - 54p + 9$ и получится $472p + 73 = -360p + 201$, слѣдов. $p = \frac{1}{11}$ и $q = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}$.

Можно также вмѣсто прежняго корня положить $20pp + 9p - 3$, котораго квадратъ $400p^2 + 360p^2 - 120pp + 81pp - 54p + 9$ сравнивъ съ нашею формулу дастъ $472p + 73 = 360p - 391$: слѣдов. $p = -$; но сіе знаменованіе ни малой пользы не приносишь.

У. Можно также здѣлать, что формула наша на оба квадрата $(p+1)^2$, и $(p-1)^2$ раздѣлится. На сей конецъ возми $q = \frac{pt+1}{p+t}$, и будешь $q+1 = \frac{pt+p+t+1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$, и $q-1 = \frac{pt-p-t+1}{p+t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t}$; отсюда раздѣливъ нашу формулу на $(p+1)^2(p-1)^2$ выдешъ $\frac{(pt+1)}{(p+t)^2} + \frac{pp(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4}$, помноживъ на квадратъ $(p$

(p

$(p+t)^2$ будетъ еще квадратъ, а именно:
 $(pt+1)^2(p+t)^2+pp(t+1)^2(t-1)^2$,
 или $tt p^2+2tt(t+1)p^2+2tppp+2t(tt+1)$
 $+ (t+1)^2 pp + pp(t-1)^2$

$p+tt$, гдѣ какъ первой, такъ и послѣд-
 ней членъ квадраты. Положивъ корень
 $=tpp+(tt+1)p-t$, котораго квадратъ
 $tt p^2+2t(tt+1)p^2-2tpp-2t(tt+1)p+tt$ и
 $+ (t+1)^2 pp$

сравнивъ съ нашею формулою будетъ
 $2tpp+(tt-1)^2 p+2t(tt+1)=-2tpp-2t(tt$
 $+1)$, или $4tpp+(tt-1)^2 p+4t(tt+1)=0$,
 или $(tt+1)p+4t(tt+1)=0$, т. е. $tt+1$

$=-\frac{4t}{p}$; откуда $p=-\frac{4t}{tt+1}$, $pt+1=-\frac{3tt+1}{tt+1}$

и $p+t=-\frac{t^3-3t}{tt+1}$, слѣдов. $q=-\frac{3tt+1}{t^3-3t}$, гдѣ

t по изволению взявъ можно. Пусть
 будетъ на прим. $t=2$, будетъ $p=-\frac{4}{5}$ и

$q=-\frac{17}{15}$, откуда найдемъ $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{19}{15}$ и

$\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{117}{44}$; слѣдов. $x=\frac{19}{44}z$, а $y=\frac{117}{15}z$.

Возми теперь $z=4.4.5.11$, выйдетъ $x=$
 $3.13.11$ и $y=4.5.9.15$; по чему трехъ
 искомымъ квадратовъ корни $x=3.11.15$

$y=4.5.9.15$

$=429$, $y=4.5.9.13=2540$ и $z=4.4.5.11=880$,
кои еще меньше прежде найденныхъ.

А отсюда $xx+yy=3 \cdot 13^3(121+3600)=3^3 \cdot 13^3 \cdot 61^2$
 $xx+zz=11^3(1521+6400)=11^3 \cdot 89^2$
 $yy+zz=20^3(13689+1936)=20^3 \cdot 125^2$.

VI. Наконецъ примѣчаемъ мы при семь
вопросѣ, что изъ каждаго рѣшенія еще
другое найти можно: ибо когда сысканы
сїи знаменованія $x=a$, $y=b$ и $z=c$
такъ что $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$ и $bb+cc=\square$, то слѣдующія величины удовле-
творяютъ $x=ab$, $y=bc$ и $z=ac$, откуда
 $xx+zz=aabb+aaac=aa(bb+ac)=\square$
 $xx+yy=aabb+bbcc=bb(aa+cc)=\square$
 $yy+zz=aacc+bbcc=cc(aa+bb)=\square$

Но когда уже мы нашли $x=a=3.11.13$;
 $y=b=4.5.9.13$ и $z=c=4.4.5.11$, то полу-
чимъ отсюда слѣдующія рѣшенія:

$$x=ab=3.4.5.9.11.13.13$$

$$y=bc=4.4.4.5.5.9.11.13$$

$$z=ac=3.4.4.5.11.11.13$$

кои всѣ 3 могутъ раздѣлиться на 4.5.11.
13.3 и слѣдов. въ сїи формулы сокраще-
ны будутъ $x=9.13$, $y=3.4.4.5$ и $z=4.11$,
то есть: $x=117$, $y=240$ и $z=44$, кои
еще меньше прежнихъ, и по сему

$$xx+yy=71289=(267)^2$$

$$xx+zz=15625=(125)^2$$

$$yy+zz=56536=(244)^2.$$

1041.

Вопросъ. Требуется два числа x и y , такъ что ежели одно придашь къ квадрату другаго, тобъ вышель квадратъ, или сн двѣ формулы $xx+y$ и $yy+x$ должны быть квадратами?

Когда положимъ первую $xx+y=pp$, и найдемъ опшуда $y=pp-xx$, то другая формула $p^2-2prxx+x^2+x=\square$, коей рѣшеніе не легко усмотрѣть можно. Но положивъ для обѣихъ формулъ $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$ и $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, получимъ зразь сн два уравненія: I) $y+2px=pp$; II) $x+2qy=qq$, изъ которыхъ x и y найти не трудно, а имянно: $x=\frac{qpq-p^2}{q^2-1}$ и $y=\frac{p^2-pq}{q^2-1}$, гдѣ p и q по изволенію взять можно. Положи напр. $p=2$ и $q=3$, то получишь сн два искомыя числа: $x=\frac{15}{32}$, и $y=\frac{32}{33}$ и тогда $xx+y=\frac{315}{32}+\frac{32}{33}=\frac{961}{320}=(\frac{31}{32})^2$, а $yy+x=\frac{1024}{320}+\frac{15}{33}=\frac{1109}{320}=(\frac{33}{32})^2$. Возми по томъ $p=1$, $q=3$ и будетъ $x=-\frac{1}{11}$, а $y=\frac{17}{11}$; понеже здѣсь одно число отри-

отрицательное, и сего бы рѣшенія можетъ быть принять не похотѣли, то положи $p=1$ и $q=\frac{1}{2}$, будетъ $x=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ $y=\frac{7}{10}$, и получится $xx+y=\frac{1}{20}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}=(\frac{3}{2})^2$, а $yy+x=\frac{49}{100}+\frac{1}{20}=\frac{54}{100}=(\frac{3}{5})^2$.

1042.

Вопросъ. Найди два числа, коихъ бы сумма была квадратъ, а сумма бы ихъ квадратовъ биквадратъ?

Пусть будутъ сіи числа x и y , и понеже $xx+yy$ долженствуетъ быть биквадратъ, то здѣлай оной прежде квадратомъ; что учинится, ежели $x=pr-qq$, $y=2pq$, и будетъ $xy+yy=(pr+qq)^2$. А чтобы сіе было биквадратъ, то $pr+qq$ должно быть квадратомъ; чего ради возьми $p=rr-ss$, $q=2rs$, и выдетъ $pr+qq=(rr+ss)^2$, откуда $xx+yy=(rr+ss)^4$, и слѣд. биквадратъ; но тогда будетъ $x=r^4-6rrss+s^4$, $y=4r^3s-4rs^3$, и осталось только здѣлать квадратомъ сію формулу $x+y=r^4+4r^3s-6rrss-4rs^3+s^4$, коей корень положи $rr+2rs+ss$; слѣдов. наша формула равна сему квадрату $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$; гдѣ первые и послѣдніе члены уничто-

уничтожаются, а остальные раздѣливъ на rrs даютъ $6r+4s=6r-4s$, или $12r+8s=0$; слѣд. $s=-\frac{3}{2}r=-\frac{3}{2}r$, или можно также взять корень $rr-2rs+ss$, дабы четвертые члены уничтожились; но понеже квадратъ сего корня есть $r^4-4r^3s+6r^2ss-4rs^3+s^4$, то оставшіеся члены раздѣливъ на rrs даютъ $4r-6s=4r+6s$, или $8r=12s$, слѣд. $r=\frac{3}{2}s$, и когда $r=3$ и $s=20$, то нашлся бы $x=-119$ отрицательной. Положимъ еще $r=\frac{3}{2}s+t$, то формула наша будетъ $rr=\frac{9}{4}ss+3st+tt$; $r^3=\frac{27}{8}s^3+\frac{27}{4}sst+\frac{9}{2}stt+t^3$

$$\begin{aligned} r^4 &= \frac{81}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{27}{2}sstt + 6st^3 + t^4 \\ &+ 4r^3s = \frac{27}{2}s^4 + 27s^3t + 18sstt + 4st^3 \\ &- 6rrss = -\frac{27}{2}s^4 - 18s^3t - 6sstt \\ &- 4rs^3 = -6s^4 - 4s^3t \\ &+ s^4 = +s^4 \end{aligned}$$

$\frac{1}{16}s^4 + \frac{27}{2}s^3t + \frac{3}{2}sstt + 10st^3 + t^4$, которая формула должна быть квадратъ, и слѣд. также когда помножится на 16, т. е. $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$, коея корень положи $=ss+148st-4tt$, котораго квадратъ есть $s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4$. Здѣсь два первые и пос-

лѣдніе члены уничтожаются, а остальные раздѣливъ на stt даютъ, $21896s - 1184t = 408s + 160t$, слѣдов. $\frac{s}{t} = \frac{1344}{3372} = \frac{336}{843} = \frac{112}{281}$.
 Взявъ $s=84$ и $t=1343$ будетъ $r=1469$; а изъ сихъ чиселъ $r=1469$ и $s=84$ найдемъ $x=r'-6rrs+s=4565486027761$ и $y=1061602295520$.

Г Л А В А XV

О разрѣшеніи вопросовъ, въ которыхъ требуются кубы.

1043.

Въ прежней главѣ были такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы должно было дѣлать квадратами, и гдѣ мы довольно имѣли случай изъяснить разные пріемы, помощію коихъ данныя правила въ дѣйство произвести можно. Теперь осталось еще разсмотрѣть такіе вопросы, гдѣ нѣкоторыя формулы надлежитъ дѣлать кубами, къ чему показаны уже въ прежней главѣ правила, кои чрезъ рѣшенія нижеслѣдующихъ вопросовъ большее изъясненіе получаютъ.

1044.

1044.

Вопросъ. Найти два куба x^3 и y^3 , ко-
рыхъ бы сумма была также кубъ?

Когда $x^3 + y^3$ надлежитъ быть ку-
бомъ, то формула сія раздѣленная на
кубъ y^3 должна также кубомъ остаться,
т. е. $\frac{x^3}{y^3} + 1$. Положивъ $\frac{x}{y} = z - 1$ получится
 $z^3 - 3zz + 3z$; что долженствуешь быть
кубомъ. По прежнимъ правиламъ можно
взять кубичной корень $= z - u$, коего кубъ
есть $z^3 - 3uzz + 3uuz - u^3$ и опредѣлить u
такъ чтобъ вторые члены уничтожились;
тогда было бы $u = 1$, а остальные члены
дали бы $3z = 3uuz - u^3 = 3z - 1$, откуда найдет-
ся z бесконечной; но сіе знаменованіе
намъ ни мало не служить. Оставивъ u
неопредѣленнымъ получится сіе уравне-
ніе $-3zz + 3z = -3uzz + 3uuz - u^3$; и изъ сего
квадратнаго уравненія опредѣлится вели-
чина числа x , а именно: $3uuz - 3zz = 3uuz -$
 $3z - u^3 = 3(u-1)zz = 3(u-1)z u^3$, или $zz = (u+1)z -$
 $\frac{u^3}{3(u-1)}$, слѣдов $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{u+2u+1-u^3}{4 \cdot 3(u-1)}}$
Ю 2 =

$$= \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^2+3uu-3u-3}{12(u-1)}}.$$
 И такъ все дѣло въ томъ состоятъ, чтобъ сію дробь дѣлать квадратомъ: сего ради помножимъ дробь вверху и внизу на $3(u-1)$, дабы знаменатель вышелъ квадратъ, а именно
$$\frac{-3u^2+12u^2-18uu+9}{36(u-1)^2},$$
 коей дроби числитель долженъ быть квадратъ, гдѣ послѣдней членъ уже квадратъ. Возьми теперь по прежнимъ правиламъ корень $=3+fu+guu$, или $guu+fu+3$, котораго квадратъ есть $gguu^2+2fgu^2+6guu+ffuu+2fu+9$ и здѣлай чтобъ 3 послѣдніе члены уничтожились, то произойдетъ во первыхъ $0=2f$, т. е. $f=0$, а по томъ $6g+ff=-18$, по чему $g=3$; первые же два члена раздѣливъ на u^2 даютъ $-3u+12=gg u+2fg=gg u$, слѣдов. $u=1$, которое знаменованіе ни къ чему насъ не приведетъ. Положивъ $u=1+t$, формула наша будетъ $-12t-3t^2$, которая должна быть квадратъ, чему статься не лзя, ежели t не будетъ отрицательнымъ, и такъ пусть $t=-s$, формула наша выдетъ $12s-3s^2$, которая когда $s=1$ будетъ квадратъ, но тогда бы

на.

нашлось $t = -1$ и $u = 0$, откуда ничего найти не лзя. Но какъ бы мы за сие дѣло ни принимались, то никогда не найдемъ такого знаменованія, которое бы насъ привело къ нашему намѣренію, и отсюда заподлинно заключить можно, что не лзя найти двухъ кубовъ, которыхъ бы сумма была кубъ. Сие можно доказать слѣдующимъ образомъ.

1045.

Теорема. Не возможно найти двухъ кубовъ, конхъ бы сумма, или разность была кубъ. Здѣсь прежде всего примѣчать надлежитъ, что ежели сумма невозможна, то и разность также невозможна быть должна. Ибо когда не лзя, чтобъ $x^3 + y^3 = z^3$, то невозможно также, чтобъ и $z^3 - y^3 = x^3$, а $z^3 - y^3$ есть разность двухъ кубовъ. И такъ довольно показать невозможность изъ одной только суммы или изъ одной разности, по тому что одна изъ другой слѣдуетъ. Самое же доказательство состоитъ въ слѣдующихъ положеніяхъ.

I. Здѣсь можно принять, что числа x и y между собою недѣлимы: ибо ежели

бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы ихъ кубы на кубъ онаго могли раздѣлиться: такъ напримѣръ, когда $x=2a$ и $y=2b$, то бы $x^3+y^3=8a^3+8b^3$ и есть ли бы сія сумма была кубъ, то надлежало бы также и a^3+b^3 быть кубомъ.

II. Когда же x и y общаго дѣлителя не имѣютъ, то оба сѣи числа или нечетныя, или одно четное а другое нечетъ. Въ первомъ случаѣ должно бы быть z четное, въ другомъ же случаѣ нечетъ. И такъ изъ 3 хъ чиселъ x , y и z два завсегда нечетныя, а одно четное, чего ради возьмемъ къ нашему доказательству оба нечетныя; ибо все равно покажемъ ли невозможность суммы, или разности, по тому что сумма перемѣнится въ разность, когда корень будетъ отрицательнымъ.

III. По сему пусть будутъ x и y нечетныя числа, то какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ четная. Для того положи $\frac{x+y}{2}=p$, $\frac{x-y}{2}=q$ и будетъ $x=p+q$ и $y=p-q$; откуда явствуется, что изъ
двухъ

двухъ чиселъ p и q одно четное а другое нечетъ быть долженствуетъ. Чего ради $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(pp + 3qq)$: и такъ надлежитъ доказать, что произведение $2p(pp + 3qq)$ кубомъ быть не можетъ. Еслили бы съ разности доказывать захопѣли, то было бы $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(qq + 3pp)$, которая формула съ прежнею весьма сходствуетъ: ибо переставлены только буквы p и q , по чему довольно показать невозможность формулы $2p(pp + 3qq)$, понеже отсюда неотмѣнно слѣдуетъ, что ни сумма, ни разность двухъ кубовъ кубомъ быть не можетъ.

IV. Еслили бы $2p(pp + 3qq)$ было кубъ, то былъ бы онъ четной, и слѣд. на 8 дѣлимой; по чему осьмая часть нашей формулы была бы цѣлое число, да при томъ и кубическое; а именно $\frac{1}{8}p(pp + 3qq)$; но понеже изъ чиселъ p и q одно четное, а другое нечетъ, то $pp + 3qq$ будетъ нечетъ и на 4 раздѣлиться не можетъ, откуда слѣдуетъ, что p на 4 дѣлимо, и слѣдов. будетъ цѣлое число.

V. Понеже произведение $\frac{1}{3}(pp+3qq)$ должно быть кубъ, то каждой множитель порознь $\frac{1}{3}$ и $pp+3qq$ должны ствуютъ бытъ кубы; а наипаче когда они общаго дѣлителя не имѣютъ. Ибо ежели произведение изъ двухъ недѣлимыхъ между собою множителей должно быть кубъ, то каждой самъ по себѣ долженъ быть кубъ; когда же они общаго дѣлителя имѣютъ, то оной надлежитъ рассмотретьъ особливо; и такъ здѣсь вопросъ, могутъ ли имѣть множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя; что разыскать должно. Ежели бы они общаго дѣлителя имѣли, то бы и сии pp и $pp-3qq$ того же дѣлителя имѣли, и слѣдов. сихъ послѣднихъ разность $3qq$ съ pp того же бы самаго дѣлителя имѣли; но p и q между собою недѣлимы, то и числа pp и $3qq$ инаго общаго дѣлителя кромѣ 3 хъ не имѣютъ; что дѣлается когда p на 3 дѣлится.

VI. Сего ради надлежитъ намъ рассмотретьъ два случая: первой когда множители p и $pp+3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ, что случается, когда p на 3 раз-

раздѣлиться не можеть; а другой случай ежели они общаго дѣлителя имѣють, что бываеть когда p на 3 дѣлимо. Сии два случая съ осторожностію различать надлежитъ: по тому что для каждаго особливое доказательство дать должно.

VII. *Первой случай.* Пусть будетъ p на 3 недѣлимо, и слѣд. наши оба множители $\frac{p}{2}$ и $pp+3qq$ между собою недѣлимы, то каждой самъ собою долженъ быть кубъ; и по сему здѣлаемъ $pp+3qq$ кубомъ, что учинится, ежели какъ выше показано, $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$, а $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$, и было бы $pp+3qq=(tt+3uu)^3$, слѣд. кубъ; но отсюда $p=t^3-9tuu$ и $q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu)$. Понеже q есть нечетное число, то и должно быть также нечетъ, а t четъ: по тому что иначе бы $tt-uu$ было бы четное число.

VIII. Понеже $pp+3qq$ кубомъ здѣлано и найдено $p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u)$, то надлежало бы также и $\frac{p}{2}$ быть кубомъ, слѣдов. и $2p$; по чему сія формула $2t(t+3u)(t-3u)$ должна быть кубъ. Но здѣсь примѣчать надлежитъ во первыхъ, что

t четное число и на 3 недѣлимо: ибо въ противномъ случаѣ было бы и p также на 3 дѣлимо, которой случай именно отсюда исключается; слѣдов. сѣи 3 множителя $2t$, $t+3u$ и $t-3u$ между собою недѣлимы и для того каждой долженъ быть кубъ.

И такъ положивъ $t+3u=f^3$, $t-3u=g^3$ будетъ $2t=f^3+g^3$; но теперь $2t$ есть также кубъ, и слѣдов. были бы здѣсь два куба f^3 и g^3 , которыхъ бы сумма дѣлала кубъ, и кои были бы несравненно меньше съ начала взятыхъ кубовъ x^3 и y^3 : ибо когда положили мы $x=p+q$ и $y=p-q$, а теперь p и q опредѣлили буквами t и u , то числа p и q должны быть гораздо больше нежели t и u .

IX. По чему когда два такіе куба въ большихъ числахъ находятся, то можно бы было оныя также изъяснить въ гораздо меньшихъ числахъ, которыхъ бы сумма была также кубъ; и такимъ бы образомъ можно было прийти къ меньшимъ такимъ кубамъ: но въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ заподлинно нѣтъ, по и въ большихъ числахъ оныя невозможны.

Сіе

Сіе доказательство подкрѣпляется и тѣмъ, что другой случай ведетъ насъ къ тому же, какъ мы тотчасъ увидимъ.

X. *Другой случай.* Пусть будетъ p на 5 дѣлимо, а q нѣтъ; положивъ $p=3r$ будетъ формула наша $\frac{r}{4}(9rr+5qq)$, или $\frac{r}{4}(3rr+qq)$, которые оба множители между собою недѣлимы; по тому что $3rr+qq$ ни на 2, ни на 3 не дѣлится: ибо r равнымъ образомъ четное число бытъ должно такъ какъ и p : чего ради каждой изъ сихъ двухъ множителей самъ по себѣ долженъ быть кубъ.

XI. Еслии мы другаго множителя $3rr+qq$ или, $qq+3rr$ здѣлаемъ кубомъ, то найдемъ какъ и прежде $q=t(tt-9uu)$ и $r=3u(tt-uu)$, гдѣ надлежитъ примѣчать, что когда q было нечетъ, то здѣсь и t также нечетъ, а u четное число бытъ надлежитъ.

XII. Понеже $\frac{r}{4}$ также должно быть кубъ, и слѣдов. помноживъ на кубъ $\frac{1}{27}$ также, то $\frac{r}{3}$ т. е. $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ надлежитъ быть кубъ, которые 3 множителя между собою недѣлимы и слѣдов. каждой по себѣ долженъ быть кубъ.

Но

Но когда возмется $t+u=f^3$ и $t-u=g^3$, то слѣдуетъ опшуда $2u=f^3-g^3$, что также надлежало бы быть кубомъ, по тому что $2u$ есть кубъ. Такимъ бы образомъ можно найти два гораздо менше куба f^3 и g^3 , которыхъ разность была бы кубъ, и слѣдов. также-такіе, которыхъ сумма дѣлаетъ кубъ: ибо надлежитъ только поставивъ $f^3g^3=h^3$, то будетъ $f^3=h^3+g^3$; и такъ имѣли бы мы два куба, которыхъ сумма также кубъ. Симвъ прежнее доказательство совершенно подкрѣпляется, что когда въ самыхъ большихъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, которыхъ сумма или разность была бы кубъ, и сіе для того, что въ самыхъ меншихъ числахъ такихъ не находится.

1046.

Когда невозможно найти такихъ двухъ кубовъ, коихъ бы сумма или разность была кубъ, то прежней нашъ вопросъ уничтожается; обыкновенно же начинаютъ съ сего вопроса: какимъ образомъ найти три куба, которыхъ бы сумма дѣлала

лаа кубъ? Изъ оныхъ два можновзять по изволению, такъ что трешей только сыскать надлежитъ, которой вопросъ теперь мы рассмотримъ.

1047.

Вопросъ. Къ даннымъ двумъ кубамъ a^3 и b^3 найти еще трешей, которой бы съ прежними вмѣстѣ составилъ кубъ?

По сему формула $a^3 + b^3 + x^3$ должна быть кубъ, чего иначе учинить не лзя, какъ только что имѣть известной случаи. Сей случай самъ попадается, а именно когда $x = -a$, положивъ $x = y - a$ будетъ $x^3 = y^3 - 3aуу + 3aay - a^3$ и формула наша должна быть кубъ $y^3 - 3aуу + 3aay + b^3$, въ которомъ первой и послѣдней членъ кубы, то заразъ два рѣшенія найти можно.

I. По первому возми корень $= y + b$, коего кубъ есть $y^3 + 3byу + 3bbу + b^3$ и получится $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$, откуда

$$y = \frac{aa - bb}{a + b} = a - b, \text{ слѣдов. } x = -b, \text{ что намъ}$$

ни мало не служитъ.

II. Можно также положить корень $= b + fy$, котораго кубъ есть $f^3y^3 + 3bffуу +$

$+3bbfy+b^3$ опредѣли f такъ, чтобы третіе члены уничтожились. Сіе здѣлается

когда $3aa=3bbf$, или $f=\frac{aa}{bb}$ первые же

два члена на yy даютъ $y-3a=f^3y+3bff$
 $=\frac{a^3y}{b^3}+\frac{3a^3}{b^3}$; помноживъ на b^3 получится

$a^3y+3a^3b^3$, откуда найдётся $y=\frac{3a^3b^3+3ab^3}{b^3-a^3}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^3-a^3}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3}$; а отсюда $x=y-a=\frac{3ab^3+a^4}{b^3-a^3}$

И такъ изъ данныхъ обоихъ кубовъ a^3 и b^3 найдётся корень третьяго искомаго куба; а что бы оной была положительной, то надлежитъ только b^3 взять за самой большей кубъ, что мы изъяснимъ нѣкоторыми примѣрами.

I. Пусть будутъ данные два куба 1 и 8, такъ что $a=1$ и $b=2$, то формула $9+x^3$ будетъ кубъ, когда $x=\frac{17}{7}$: ибо тогда выдѣтъ $9+x^3=\frac{700}{343}=(\frac{10}{7})^3$.

II. Положимъ данные два куба 8 и 27 такъ, что $a=2$ и $b=3$, то формула

мула $35 + x^3$ будетъ кубомъ, когда $x = \frac{124}{19}$.

III. Пусть будутъ два данные куба 27 и 64, такъ что $a=3$ и $b=4$, то выдстъ сія формула $91 + x^3$ кубомъ, когда $x = \frac{405}{37}$.

Естьли бы къ даннымъ двумъ кубамъ похотѣли еще больше такихъ претъихъ искать, то должно бы въ первой формулѣ $a^3 + b^3 + x^3$ положить еще $x = \frac{2ab^3 + a^3}{b^3 - a^3} + z$, и тогда бы пришли мы къ подобной формулѣ, изъ которой новыя знаменованія вмѣсто x опредѣлить можно бы было; но сіе бы завело насъ въ превеликіе выкладки.

1048.

При семъ вопросъ попадаетъ удивительный случай, когда оба данные куба равны между собою или $b=a$: ибо тогда найдемъ $x = \frac{5a^3}{0}$, т. е. бесконечной, и слѣдов. не получимъ никакого рѣшенія, чего ради сего вопроса, когда $2a^3 + x^3$ должно быть кубомъ, разрѣшить не можно. Пусть наприим.

наприм. $a=1$, и слѣдов. формула наша $2+x^3$, то надлежитъ примѣчать, что какіе бы перемѣны предпріяты ни были, то все стараніе тщетно и никогда опшуда надлежащаго знаменованія для x найти не можно; по чему съ достовѣрностію заключаемъ, что къ удвоенному кубу никакого куба сыскасть не лъзя, копторой бы съ онымъ вмѣстѣ составилъ пакы кубъ, или сіе уравненіе $2a^3+x^3=y^3$ невозможно. Отсюда слѣдуетъ $2a^3=y^3-x^3$. слѣдов. также не возможно найти двухъ кубовъ, которыхъ бы разность была удвоенной кубъ, что такожде и о суммѣ двухъ кубовъ разумѣть должно и слѣдующимъ образомъ доказано быть можетъ.

1049.

Теорема. Ни сумма, ни разность двухъ кубовъ удвоенному кубу никогда равна быть не можетъ, или сія формула $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ сама по себѣ невозможна, выключая $y=x$, которой случай чрезъ себя видень.

Здѣсь можно опять x и y взять за недѣлимыя между собою числа: ибо есть-
ли

ли бы они общаго дѣлителя имѣли, тобы и x также на онаго могъ раздѣлиться, и слѣдов. цѣлое уравненіе на кубъ бы онаго раздѣлилось. Понеже $x^3 + y^3$ должно быть четное число, то обомъ числамъ x и y надлежитъ быть нечетнымъ; по чему какъ сумма, такъ и разность ихъ будетъ четная. И такъ положивъ $\frac{x+y}{2} = p$, а $\frac{x-y}{2} = q$, будетъ $x = p + q$, а $y = p - q$, и тогда изъ чиселъ p и q одно должно быть четное, а другое нечетъ. Отсюда $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(pp + 3qq)$ и $x^3 - y^3 = 6p^2q + 2q^3 = 2q(3pp + qq)$, которыя обѣ формулы во всемъ между собою сходны: и такъ довольно будетъ показать, что формула $2p(pp + 3qq)$ удвоеннымъ кубомъ, каковъ $2x^3$, не будетъ, и слѣдов. сія $p(pp + 3qq)$ кубъ быть не можетъ; чему доказательство въ слѣдующихъ положеніяхъ содержитсяъ.

I. Здѣсь опять два случая разсматривать можно, изъ коихъ первой, когда два множителя p и $pp + 3qq$ общаго дѣлителя не имѣютъ, и тогда каждой самъ долженъ быть кубъ. Другой же случай, когда они общаго дѣлителя имѣютъ.

Томъ II. Я ютъ,

юсть, кошорой какъ уже мы прежде видѣли, не другой какой, какъ 3, быть можетъ.

II. *Первой слугай.* Пусть будетъ p на 3 недѣлимо, и слѣдов. оба множители между собою недѣлимы, то здѣлай сперва $pp+3qq$ кубомъ, что учинится, когда $p=t(tt-9ui)$ а $q=3u(tt-ui)$, и тогда знаменованіе числа p долженствуется быть также кубъ; но t на 3 недѣлимо, по тому что иначе бы p на 3 дѣлилось, то два множителя t и $tt-9ui$ между собою недѣлимы, и слѣдовательно каждой самъ долженъ быть кубъ.

III. Но послѣдней самъ состоитъ еще изъ двухъ множителей, а имянно $t+3u$ и $t-3u$, кои между собою недѣлимы. По-неже сперва t на 3 дѣлится не можетъ, а по томъ одно изъ чисель t и u четное, а другое нечетъ. Ежели бы оба были нечетныя, то не только бы p , но и q было четное, чему стать не лзя, слѣдов. каждой изъ сихъ множителей $t+3u$ и $t-3u$ долженъ быть кубъ.

IV.

IV. И по сему возми $t+3u=f^3$, а $t-3u=g^3$, и будешь $2t=f^3+g^3$, но t само по себѣ есть кубъ, которой пусть $=h^3$: и такъ имѣли бы мы $f^3+g^3=2h^3$, т. е. нашли бы мы два гораздо меньшіе куба, аимянно f^3 и g^3 , которыхъ бы сумма была удвоенной кубъ.

V. Другой случай. Пусть будетъ p на 3 дѣлимо, а q нѣтъ, то положивъ $p=3r$ формула наша будетъ $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, которые оба множителя между собою недѣлимы, и по сему каждой кубомъ быть долженствуетъ.

VI. А что бы послѣдней кубомъ здѣлать, то возми $q=t(tt-9uu)$, а $r=3u(tt-uu)$, и тогда изъ чиселъ t и u одно четное, а другое нечетъ быть должно; ибо въ противномъ случаѣ оба числа q и r были бы четныя, отсюда найдется первой множитель $9r=27u(tt-uu)$, которой также кубомъ быть долженъ, и слѣдов. раздѣленной на 27 также, т. е. $u(tt-uu)=u(t+u)(t-u)$.

VII. Понеже сн 3 множителя также между собою недѣлимы, то каждой по себѣ кубъ быть долженъ: для того по-

ложи оба послѣдніе $t+u=f^3$, а $t-u=g^3$ и получится $2u=f^3-g^3$; когда теперь u должно также кубомъ быть, то получимъ мы два куба въ гораздо меньшихъ числахъ f^3 и g^3 , которыхъ разность подобнымъ образомъ была бы удвоенной кубъ.

VIII. Когда въ малыхъ числахъ такихъ кубовъ нѣтъ, коихъ бы сумма, или разность была удвоенной кубъ, то явствуешь, что и въ большихъ числахъ оныхъ не будетъ.

IX. Можно бы было сказать, что въ малыхъ числахъ такой случай и есть, а именно, когда $f=g$, и такъ бы прежнее доказательство насъ обмануть могло. Но когда $f=g$, то въ первомъ бы случаѣ было $t+3u=t-3u$, слѣдов. $u=0$: и такъ q было бы также $=0$. А мы положили $x=p+q$, и $y=p-q$, то бы первые два куба x^3 и y^3 были также между собою равны, которой случай именно исключается. Равнымъ образомъ и въ другомъ случаѣ, когда $f=g$ надлежало бы быть $t+u=t-u$, и слѣд. опять $u=0$, по чему также $r=0$ и $p=0$ и пер-

первые бы кубы x^3 и y^3 были паки равны, о которомъ случаѣ здѣсь вопроса нѣтъ.

1050.

Вопросъ. Найти вообще 3 куба x^3 , y^3 и z^3 , коихъ бы сумма составила кубъ?

Мы уже видѣли, что ежели два изъ сихъ кубовъ возмущся за извѣстные, то опшуда завсегда третей опредѣлить можно, естли только два первые между собою не равны. Но по прежнему способу въ каждомъ случаѣ находится одно только знаменованіе для третьяго куба, и весьма бы было трудно находить опшуда больше такихъ кубовъ.

Здѣсь беремъ мы всѣ 3 куба за неизвѣстные; а чтобы показати вообще рѣшеніе, то положимъ $x^3 + y^3 + z^3 = v^3$, вычитая z^3 съ обѣихъ сторонъ получится $x^3 + y^3 = v^3 - z^3$, которое уравненіе удовлетворяетъ слѣдующимъ образомъ.

I. Возми $x = p + q$, $y = p - q$ и будетъ, какъ уже мы видѣли, $x^3 + y^3 = 2p(pp + 3qq)$; по томъ положи $v = r + s$, $z = r - s$, и найдется $v^3 - z^3 = 2s(ss + 3rr^2)$, слѣдоват. дол-

Я 3

жно

жно быть $2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr)$,
или $p(pp+3qq)=s(ss+3rr)$.

II. Прежде уже видѣли, что $pp+3qq$ никакихъ другихъ множителей не имѣетъ, кромѣ содержащихся въ самой сей формулѣ. Понеже обѣ сѣи формулы $pp+3qq$ и $ss+3rr$ неопзмѣнно общаго дѣлителя имѣть должны, то пусть будетъ оной $=tt+3uu$.

III. На сей конецъ положи $pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu)$ и $ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu)$, выдесть $p=ft+3gu$, $q=gt-fu$ и будетъ $pp=fftt+6fgtu+9gguu$, $qq=ggtt-2fgtu+ffuu$, слѣдов. $pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu=(ff+3gg)(tt+3uu)$.

IV. Равнымъ образомъ изъ другой формулы получимъ $s=ht+3ku$ и $r=kt-hu$; и отсюда $ss=hhtt+6hktu+9kkuu$; $3rr=3kktt-6kktu+3hhuu$ и такъ $ss+3rr=hh(tt+3uu)+3kk(tt+3uu)=(hh+3kk)(tt+3uu)$. Но $s(ss+3rr)=p(pp+3qq)$, а отсюда выходитъ сѣе уравненіе $(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu)$; которое раздѣливъ на $tt+3uu$ будетъ $ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)$

+

$+3ku(hh+3kk)$, или $ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg)$, откуда
 $t = \frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}$ и.

V. Для сысканія цѣлыхъ чиселъ, возми $u=f(ff+3gg)-h(hh+3kk)$, и будетъ $t = 3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)$, гдѣ 4 буквы f , g , h и k по изволению взять можно.

VI. Нашедъ изъ сихъ четырехъ чиселъ знаменованія для t и u получится: I) $p=ft+3gu$; II) $q=gt-fu$; III) $s=ht+3ku$; IV) $r=kt-hu$ и наконецъ для разрѣшенія нашего вопроса $x=p+q$, $y=p-q$, $z=r-s$ и $v=r+s$, которое рѣшеніе есть общее и что всѣ возможные случаи въ немъ содержатся: по тому что во всемъ вычисленіи никакихъ произвольныхъ ограничиваній не дѣлано. Все искусство состоятъ въ томъ, чтобъ уравненіе наше на $tt+3uu$ могло раздѣлиться, чрезъ что буквы t и u опредѣлены будутъ простымъ уравненіемъ. Употребленіе сея формулы представлено быть можетъ безконечно многими способами, чему мы предложимъ нѣкоторые приѣмы.

I. Пусть будетъ $k=0$, $h=1$, найдемся $t = -5g(ff+3gg)$ и $u=f(ff+3gg)-1$; отку-
да $p=-3fg(ff-3gg)+3fg(ff+3gg)-5g=-3g$; $q=-(ff+3gg)'+f$, по томъ $s=-3g$
 $(ff+3gg)$ и $r=-f(ff+3gg)+1$, а опію-
да наконецъ получится $x=-3g-(ff+3gg)'+f$, $y=-3g+(ff+3gg)'+f$, z $(5g-f)(ff+3gg)+1$ и наконецъ $v=a(3g+f)(ff+3gg)+1$.

Положивъ теперь $f=-1$ и $g=+1$ по-
лучимся $x=-20$, $y=14$, $z=17$ и $v=-7$;
по чему имѣемъ мы слѣдующее уравне-
ніе $-20^3+14^3+17^3=-7^3$, или $14^3+17^3+7^3=20^3$.

II. Пусть будетъ $f=2$, $g=1$, слѣдов. $ff+3gg=7$; по томъ $h=0$, $k=1$, по чему
 $hh+5kk=3$, будетъ $t=-12$, $u=14$; от-
куда $p=2t+3u=18$; $q=t-2u=-40$; $r=t=-12$ и $s=3u=42$; слѣдов. получится
 $x=p+q=-22$, $y=p-q=58$; $z=r-s=-54$ и $v=r+s=30$, такъ что $-22^3+58^3-54^3=30^3$, или $58^3=30^3+54^3+22^3$; но
понеже всѣ корни на 2 могутъ раздѣ-
литься, то будетъ также $29^3=15^3+27^3+11^3$.

III.

III. Возмемъ $f=3$, $g=1$, $h=1$, $k=1$, такъ что $ff+3gg=12$, $hh+3kk=4$ найдется $t=-24$ и $u=32$, которые на 8 могутъ раздѣлиться. А понеже здѣсь дѣло состоитъ въ ихъ содержаніи, то положимъ $t=-3$, и $u=4$, откуда $p=3t+3u=+3$; а $q=t-3u=-15$, $r=t-u=-7$ и $s=t+3u=+9$; слѣдов. $x=-12$; $y=18$, $z=-16$ и $v=2$, такъ что $-12^3+18^3-16^3=2^3$ или $18^3=16^3+12^3+2^3$, или раздѣливъ на 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV. Возмемъ $g=0$, $k=h$, такъ что f и h опредѣлены не будутъ, то получится $ff+3gg=ff$ и $hh+3kk=4hh$, откуда $t=12h^3$ и $u=f^3-4h^3$; по томъ $p=ft=12fh^3$, $q=-f^3+4fh^3$, $r=-12h-hf^3+4h^3=16h^3-hf^3$ и $s=3hf^3$; слѣдов. $x=p+q=16fh^3-f^3$, $y=p-q=8fh^3+f^3$, $z=r-s=16h^3-4hf^3$ и $v=r+s=16h^3+2hf^3$. Положимъ теперь $f=h=1$ найдется $x=15$, $y=9$, $z=12$ и $v=18$, а раздѣливъ на 3 получится $x=5$, $y=3$, $z=4$ и $v=6$, такъ что $3^3+4^3+5^3=6^3$. При семъ примѣчанія достойно, что сіи три корня 3, 4, 5, единицею возрастающіе; чего ради разсмотримъ, нѣтъ ли еще больше такихъ чиселъ.

1051.

Вопросъ. Требуется 3 числа въ арифметической прогрессіи, коей разность $=1$, чтобы кубы оныхъ чиселъ составили вмѣстѣ кубъ?

Пусть будетъ x среднее изъ сихъ чиселъ, то меньшее $=x-1$ а большее $x+1$; оныхъ кубы сложивъ вмѣстѣ даютъ $3x^3 + 6x = 3x(xx+2)$, что долженствуешь быть кубомъ. Къ сему потребно знать одинъ случай; въ которомъ сіе бываетъ, и по нѣкоторымъ пробамъ найдется $x=4$; чего ради по прежнимъ правиламъ положимъ $x=4+y$, и будетъ $xx=16+8y+yy$, $x^3=64+48y+12yy+y^3$ слѣдов. формула наша будетъ $216+150y+36yy+3y^3$, гдѣ первой членъ кубъ, а послѣдней нѣтъ. Сего ради возми корень $=6+fy$ и здѣлай, чтобы первые оба члена уничтожились. Понеже кубъ онаго корня есть $216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, то должно быть $150=108f$, и слѣдов. $f=\frac{5}{6}$; остальные же члены раздѣливъ на yy даютъ $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25}{2}+\frac{125}{8}y$, или $18^{\cdot}36+18^{\cdot}3y=18^{\cdot}25+25^{\cdot}y$, или $18^{\cdot}36-18^{\cdot}25=25^{\cdot}y-3y$.

18²;

$$18^3; \text{ по чему } y = \frac{18^3 \cdot 36 - 18^3 \cdot 25^3}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^3 (18 \cdot 36 - 25^3)}{25^3 - 3 \cdot 18^3}$$

$$y = -\frac{114^3}{127^3} = -\frac{7452}{1471}, \text{ слѣдов. } x = 15^3.$$

Трудно бы показалось сіе обращеніе въ кубы продолжать далѣе; но надлежитъ примѣчать, что вопросъ можно завсегда привести къ квадратамъ. Понеже $3x(x^2 + 2)$ должно быть кубомъ, то положи оной $= x^3 y^3$ и получится $3xx + 6 = xxy^3$ слѣдов. $xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$. Когда чи-

слитель сея дроби уже квадратъ, то нужно только знаменателя $6y^3 - 18$ здѣлать квадратомъ; къ сему потребно также знаешь одинъ случай, и понеже 18 на 9 дѣлится, а 6 только на 3, то y долженъ также на 3 дѣлиться: сего ради положи $y = 3z$ и будетъ нашъ знаменатель $= 162z^3 - 18$, которой раздѣливъ на 9 будетъ $18z^3 - 2$ и которой квадратомъ быть долженствуетъ. Сіе здѣлается когда $z = 1$. Для сей прищчины возми $z = 1 + v$, то должно быть $16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \square$; положи теперъ корень $= 4 + \frac{1}{2}v$, котораго квадратъ есть $16 + 54v + \frac{1}{4}vv$; по че-

му $54 + 18v = \frac{1}{2}$; или $18v = -\frac{1}{2}$, слѣдов. $2v = -\frac{1}{18}$ и $v = -\frac{1}{36}$; откуда найдется $z = 1 + v = \frac{35}{36}$, по томъ $y = \frac{1}{36}$.

Разсмотримъ теперь прежняго знаменателя, которой была $6y^3 - 18 = 162z - 18 = 9(18z^3 - 2)$, но сего множителя $18z^3 - 2$ каази мы квадратной корень $= \frac{107}{12}$; слѣд. квадратной корень изъ всего знаменателя есть $\frac{31}{12}$; а изъ числителя оной есть 6, откуда $x = \frac{31}{12} = \frac{125}{12}$, которое знаменование отъ прежняго совсемъ различно, и по сему корни нашихъ трехъ кубовъ будутъ слѣдующіе: I) $x = 1 = \frac{12}{12}$; II) $x = \frac{107}{12}$, III) $x + 1 = \frac{119}{12}$, коихъ кубы сложенные въ одну сумму производятъ кубъ, котораго корень будетъ $xg = \frac{107}{12} = \frac{107}{12}$.

1052.

Симъ намѣрены мы заключить сѣю часть неопредѣленной Аналитики: ибо изъ приложенныхъ вопросовъ имѣли уже мы случай изъяснить знатнѣйшіе приемы употребительнѣйшіе по сѣ мѣсто въ сѣй наукѣ.

$$x + \frac{2}{3}y = 29$$

$$y + 2x = 29$$

$$x = 29 - \frac{2}{3}y$$

$$2x = \frac{44 - 1}{3}$$

$$29 - \frac{2}{3}y = \frac{44 - 1}{3}$$

$$29 - \frac{2}{3}y = \frac{44 - 1}{3}$$

$$29 - \frac{2}{3}y = \frac{44 - 1}{3}$$

$$29$$

$$42$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

$$29$$

