

Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Факультет социокультурных коммуникаций
Кафедра искусств и средового дизайна

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой искусств и
средового дизайна

И. Н. Духан
«04» января 2024 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета социокультурных
коммуникаций

А. В. Бурачонок
«04» января 2024 г.

Начертательная геометрия

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
1-19 01 01 «Дизайн (по направлениям)»
направление специальности:
1-19 01 01-02 «Дизайн (предметно-пространственной среды)»

Регистрационный № 2.4.2-24/446

Автор:

Адамейко-Першенкова Г.П., старший преподаватель

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
29.02.2024г., протокол № 6.

Минск 2024

УДК514.18(075.8)
А 281

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 6 от 29.02.2024 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет факультета социокультурных коммуникаций
Протокол № 5 от 04.01.2024 г.

А в т о р :

Адамейко-Першенкова Галина Петровна, старший преподаватель, кафедра искусств и средового дизайна, факультет социокультурных коммуникаций БГУ.

Рецензенты:

кафедра теории и истории дизайна Белорусской государственной академии искусств (заведующий кафедрой Ленсу Я. Ю., доктор искусствоведения, доцент);

Атрахович Е. И., заведующий кафедрой дизайна моды факультета социокультурных коммуникаций Белорусского государственного университета, кандидат искусствоведения, доцент.

Адамейко-Першенкова, Г. П. Начертательная геометрия : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-19 01 01 «Дизайн (по направлениям)», направление специальности: 1-19 01 01-02 «Дизайн (предметно-пространственной среды)» / Г. П. Адамейко-Першенкова ; БГУ, Фак. социокультурных коммуникаций, Каф. искусств и средового дизайна. – Минск : БГУ, 2024. – 128 с. : табл. – Библиогр.: с. 127–128.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов дневной формы обучения специальности 1-19 01 01 «Дизайн (по направлениям)», направление специальности: 1-19 01 01-02 «Дизайн (предметно-пространственной среды)». Содержание ЭУМК предусматривает развитие академических, социально-личностных и профессиональных компетенций студентов. Цель ЭУМК – предоставить студенту полный комплект учебно-методических материалов для аудиторного и самостоятельного изучения дисциплины.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	
1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	5
ВВЕДЕНИЕ	5
1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОД ПРОЕКЦИРОВАНИЯ	6
1.1.1. Определение начертательной геометрии. Основные задачи.....	6
1.1.2. Метод проецирования.....	6
1.1.3. Основные свойства параллельного проецирования	7
1.1.4. Эпюр Монжа.....	8
1.2. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ТОЧКА. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ	11
1.2.1. Прямоугольные проекции точки	11
1.2.2. Прямая.....	12
1.2.2.1. Прямые общего и частного положения	12
1.2.2.2. Взаимное положение прямых	16
1.2.2.3. Проекции плоских углов	17
1.2.2.4. Метод прямоугольного треугольника.....	18
1.2.2.5. Деление отрезка в заданном отношении	19
1.2.3. Плоскость.....	20
1.2.3.1. Способы задания плоскости на чертеже.....	20
1.2.3.2. Плоскости общего и частного положения.....	21
1.2.3.3. Принадлежность точки и прямой плоскости	24
1.2.3.4. Главные линии плоскости	25
1.2.3.5. Взаимное положение прямой и плоскости.....	27
1.3. ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.	28
1.3.1. Общие сведения о кривых линиях и поверхностях.....	28
1.3.2. Классификация поверхностей	29
1.3.3. Гранные поверхности и многогранники.....	30
1.3.4. Поверхности вращения.....	32
1.3.5. Принадлежность точки и линии поверхности	34
1.4. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА.....	39
1.4.1. Пересечение прямой с плоскостью	39
1.4.2. Взаимное пересечение двух плоскостей.....	42
1.4.3. Пересечение прямой с поверхностью	45
1.4.4. Пересечение поверхности плоскостью	52
1.4.5. Комбинированные тела	59
1.4.6. Теорема Монжа	63
1.5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧЕРТЕЖА.....	64
1.5.1. Позиционные и метрические задачи.....	64
1.5.2. Преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций.....	64

1.5.3. Преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующей оси.....	70
1.6. ОСНОВЫ СТАНДАРТИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ	76
1.6.1. Форматы – ГОСТ 2.301-68	76
1.6.2. Масштабы – ГОСТ 2.302-68	77
1.6.3. Линии – ГОСТ 2.303-68.....	77
1.6.4. Шрифты чертежные – ГОСТ 2.3304-81	79
1.6.5. Чертежные материалы, принадлежности и инструменты	81
1.7. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ	82
1.7.1. Общие сведения о разворачивании поверхностей	82
1.7.2. Развертывание многогранных поверхностей	83
1.7.2.1. Развертка поверхности призмы способом нормального сечения.....	83
1.7.2.2. Развертка поверхности призмы способом раскатки.....	87
1.7.2.3. Развертка поверхности пирамиды.....	89
1.7.3. Развертывание линейчатых поверхностей	94
1.7.3.1. Развертка усеченного цилиндра.	94
1.7.3.2. Развертка усеченного конуса	100
1.7.4. Условное развертывание поверхностей вращения.....	106
1.8. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	110
1.8.1. Определение и свойства аксонометрических проекций	110
1.8.2. Классификация аксонометрических проекций	111
1.8.3. Теорема К. Польке – Г. Шварца	111
1.8.4. Основные виды стандартной аксонометрии	112
1.8.5. Примеры построения аксонометрических проекций	113
2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	121
2.1. Основные элементы геометрического пространства. Точка. Прямая. Плоскость	121
2.2. Взаимное пересечение элементов геометрического пространства ..	121
2.3. Способы преобразования чертежа	122
2.4. Развертки поверхностей	122
2.5. Аксонометрические проекции	123
3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ	125
Теоретические вопросы к зачету и экзамену	125
Практические задания к зачету и экзамену	125
4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	127
4.1. Рекомендуемая литература	127
4.2. Электронные ресурсы.....	127

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия и ее методы находят применение в различных областях науки и техники: в машиностроении, архитектуре, строительстве, дизайне, изобразительном искусстве.

В начертательной геометрии чертежи являются тем инструментом, с помощью которого осуществляется непосредственное изучение геометрических форм предмета и выполняется решение пространственных задач.

Поэтому к чертежам предъявляют следующие требования:

- 1) чертеж должен быть наглядным, т. е. он должен вызывать пространственное представление об изображаемом предмете;
- 2) чертеж должен быть обратимым, т. е. он должен точно определять форму, размеры и положение изображаемого предмета;
- 3) чертеж должен быть простым для его графического выполнения;
- 4) изображение предмета должно быть удобным для чтения размеров.

Чертежи, выполненные методом проецирования, называются проекционными.

Начертательная геометрия возникла в глубокой древности. Потребность в изображениях пространственных форм на плоскости, развитие изобразительного искусства, техники предопределили появление начертательной геометрии.

Ученые всего мира внесли большой вклад в развитие методов построения изображений пространственных форм на плоскости. Это великий греческий геометр Эвклид (III в. до н.э.), римский архитектор Витрувий (I в. до н.э.).

Значительные труды по методам изображений были написаны в эпоху Возрождения: итальянскими архитекторами Леоном Батиста Альберти (1404 – 1472 гг.), Леонардо да Винчи (1455 – 1519 гг.), немецким живописцем и архитектором Альбрехтом Дюрером (1471 – 1528 гг.).

Математическую трактовку перспективы дал итальянский ученый Гвидо Убальди (1545 – 1607 гг.), а французский архитектор Жерар Дезарг (1593 – 1662 гг.) в своем труде заложил теоретический фундамент перспективы.

В России практические приемы построения графических изображений были известны еще в давние времена. Рисунки домов, крепостей в различных древних летописях сохранили для нас достаточно совершенные для своего времени примеры изображений.

Работы таких великих русских мастеров, как иконописец Рублев, механик-самоучка И.П. Кулибин, зодчие Д.В. Ухтомский, В.И. Баженов, М.Ф. Казаков и многие другие, являются образцами правильных проекционных изображений.

Таким образом, методы построения графических изображений постоянно развивались в различных странах независимо друг от друга, но только французский инженер и ученый Гаспар Монж (1746 – 1818 гг.) смог сформулировать главные элементы теории построения графических

изображений, используя прямоугольное проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости.

В 1798 году Гаспар Монж опубликовал свой главный научный труд «Начертательная геометрия».

В России курс начертательной геометрии впервые стал изучаться в 1810 году. Первым русским профессором начертательной геометрии и крупным ученым в этой области стал Я.А. Севастьянов (1796 – 1849 гг.).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли русские ученые: Н.И. Макаров, В.И. Курдюмов, Н.А. Рынин, А.И. Добряков, Н.Ф. Четверухин и многие другие.

Позднее продолжили свои исследования такие ученые, как В.О. Гордон, С.А. Фролов, А.В. Бубенников, Н.Н. Крылов, Б.В. Раушенбах и др.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. МЕТОД ПРОЕЦИРОВАНИЯ

1.1.1. Определение начертательной геометрии. Основные задачи

Начертательная геометрия представляет собой науку:

1. Об изображениях пространственных предметов на плоскости – построение чертежа (прямая задача).
2. О способах решения пространственных задач по плоским изображениям (обратная задача).

К таким задачам относятся:

- Позиционные – задачи на взаимную принадлежность и пересечение фигур.
- Метрические – на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур.

1.1.2. Метод проецирования

Свойства геометрических объектов, таких как точка, прямая, плоскость, поверхность изучаются с помощью их проекций, в основе построения которых лежит метод проецирования.

Геометрические объекты в пространстве называются оригиналами, а их изображения на плоскости – проекциями.

Проецирование – это построение изображения геометрического объекта на плоскости путем проведения через все его точки воображаемых проецирующих лучей до пересечения их с плоскостью, называемой плоскостью проекций.

Аппарат проецирования включает в себя проецирующие лучи, проецируемый объект и плоскость, на которой получается изображение оригинала.

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей различают: *центральное* (рисунок 1.1) и *параллельное* проецирование (рисунок 1.2).

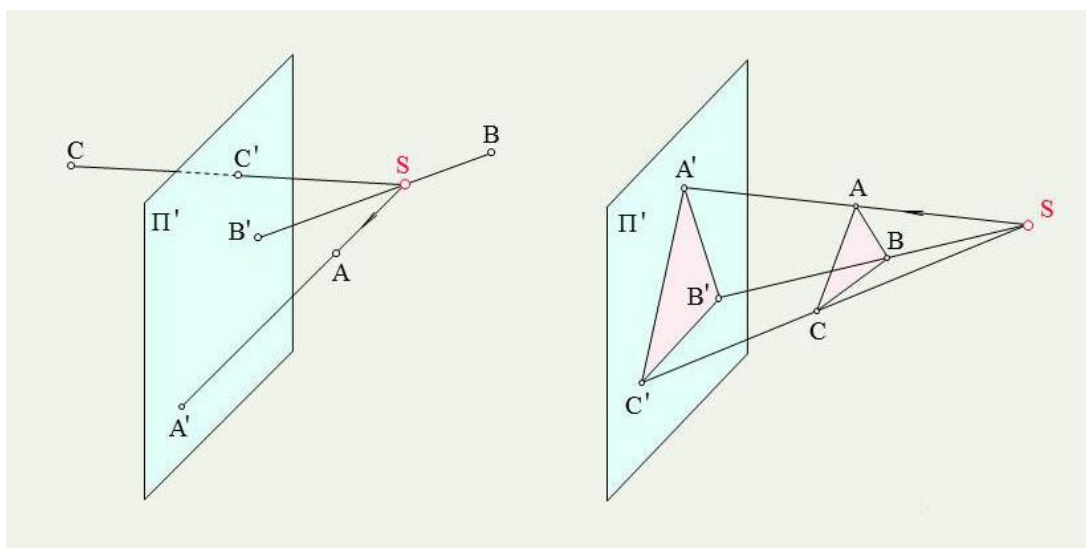


Рисунок 1.1 – Центральное проецирование

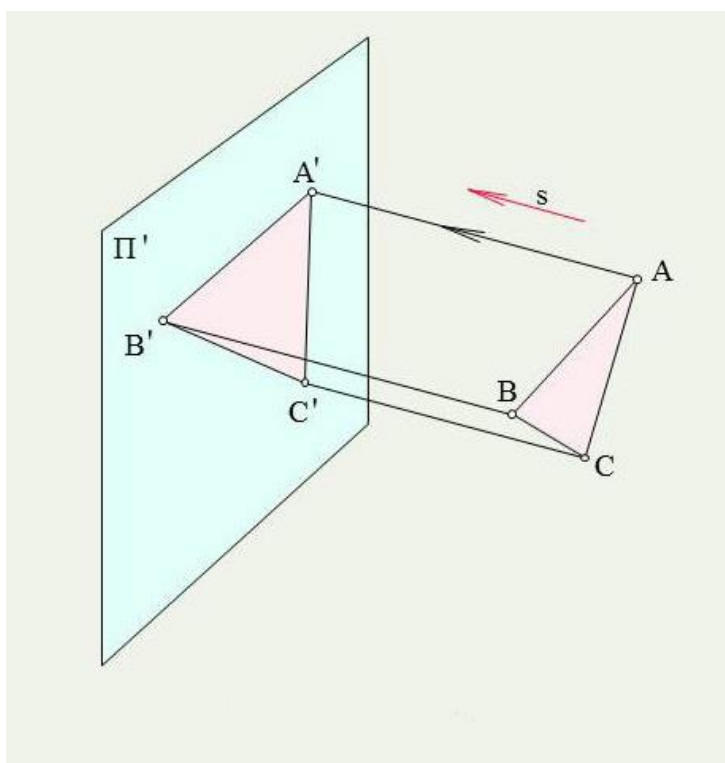


Рисунок 1.2 – Прямоугольное (ортогональное) проецирование

В свою очередь в зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости проекций параллельное проецирование подразделяется на *косоугольное* и *прямоугольное* проецирование.

1.1.3. Основные свойства параллельного проецирования

1. Свойство *однозначности*. Проекцией точки на плоскость есть точка.
2. Свойство *прямолинейности*. Проекцией прямой линии на плоскость есть прямая.
3. Свойство *принадлежности*. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции этой линии.

4. Свойство сохранения *параллельности*. Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.

5. Свойство *деления отрезка в отношении*. Если отрезок прямой линии делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией точки в том же отношении.

6. Свойство *параллельного переноса*. Проекция фигуры не меняется при параллельном переносе плоскости проекций.

Три последние свойства обеспечивают более простое построение изображения и меньше искажают форму и размеры оригинала по сравнению с центральной проекцией.

1.1.4. Эпюр Монжа

Основоположителем метода проецирования является французский ученый Гаспар Монж (рисунок 1.3). В 1799 году он оформил разрозненные сведения по начертательной геометрии в виде труда, который назвал «Начертательная геометрия».

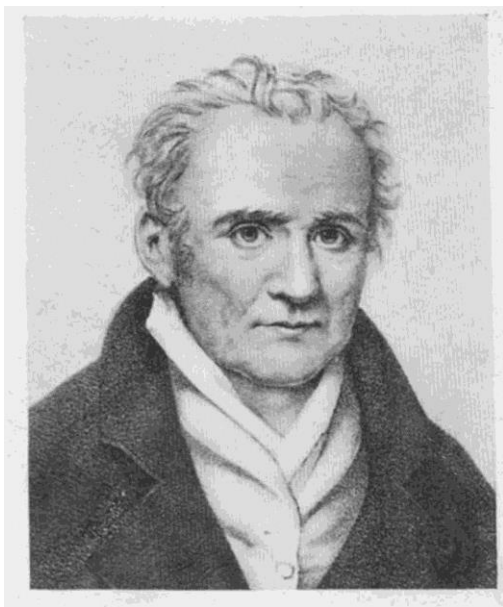


Рисунок 1.3 – Гаспар Монж (1746 – 1818)

Плоскости проекций, пересекаясь в пространстве, делят пространство на восемь частей, которые называют октантами (рисунок 1.4). Для получения изображений предмет располагают в 1-ом октанте (европейская система) между наблюдателем и плоскостью проекций и проецируют его на каждую из взаимно перпендикулярных плоскостей проекций, построив соответственно горизонтальную, фронтальную и профильную проекции предмета.

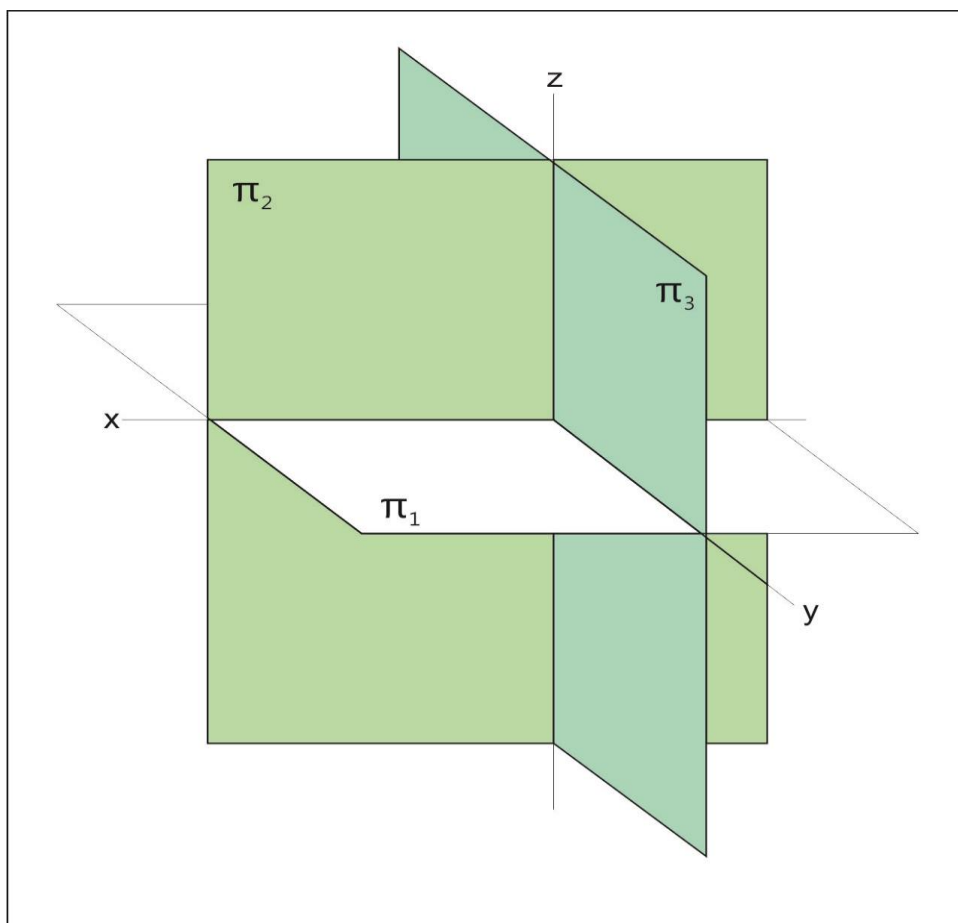


Рисунок 1.4 – Деление пространства на октанты

Гаспар Монж заменил понятие осей проекций на линию пересечения плоскостей проекций (координатные оси) и предложил совместить координатные плоскости в одну путем поворота их вокруг координатных осей (рисунок 1.5).

Если совместить поворотом вокруг оси проекций π_2/π_1 плоскости проекций в одну плоскость так, чтобы изображения не накладывались друг на друга, получится изображение, называемое прямоугольным чертежом. Прямоугольный или ортогональный чертеж носит название *эпюр Монжа*.

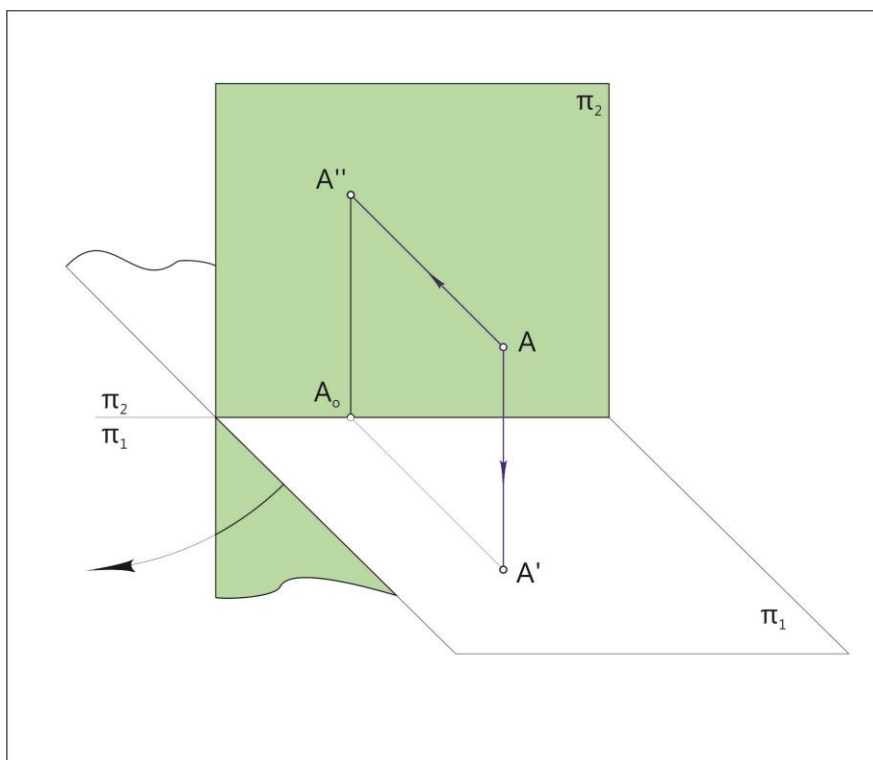


Рисунок 1.5 – Совмещение поворотом вокруг оси проекций π_2/π_1

Изображение точки на эюре Монжа называется «*комплексный чертеж точки*», или «*эпюр точки*» (рисунок 1.6).

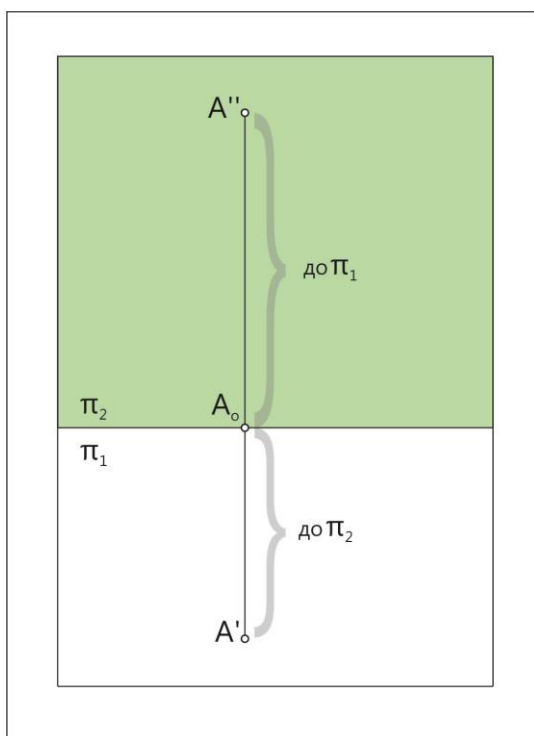


Рисунок 1.6 – Комплексный чертеж точки

Прямая A_2A_1 называется линией проекционной связи, которая соединяет разноимённые проекции точки (A_2 – фронтальную и A_1 – горизонтальную) всегда перпендикулярна оси проекций (оси координат) $A_2A_1 \perp \pi_2/\pi_1$. На эпюре отрезки, обозначенные фигурными скобками, представляют собой:

- $A_0 A_1$ – расстояние от точки A до плоскости π_2 , соответствующее координате z_A ;
- $A_0 A_2$ – расстояние от точки A до плоскости π_1 , соответствующее координате y_A .

Итак, при проецировании на эпюр Монжа положение геометрического объекта в пространстве рассматривается относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2 .

1.2. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ТОЧКА. ПРЯМАЯ. ПЛОСКОСТЬ

1.2.1. Прямоугольные проекции точки

Проекцией точки называется точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

Свойства комплексного чертежа точки:

1. две прямоугольные проекции точки лежат на одной линии проекционной связи, перпендикулярной к оси проекций;
2. две прямоугольные проекции точки однозначно определяют её положение в пространстве относительно плоскостей проекций.

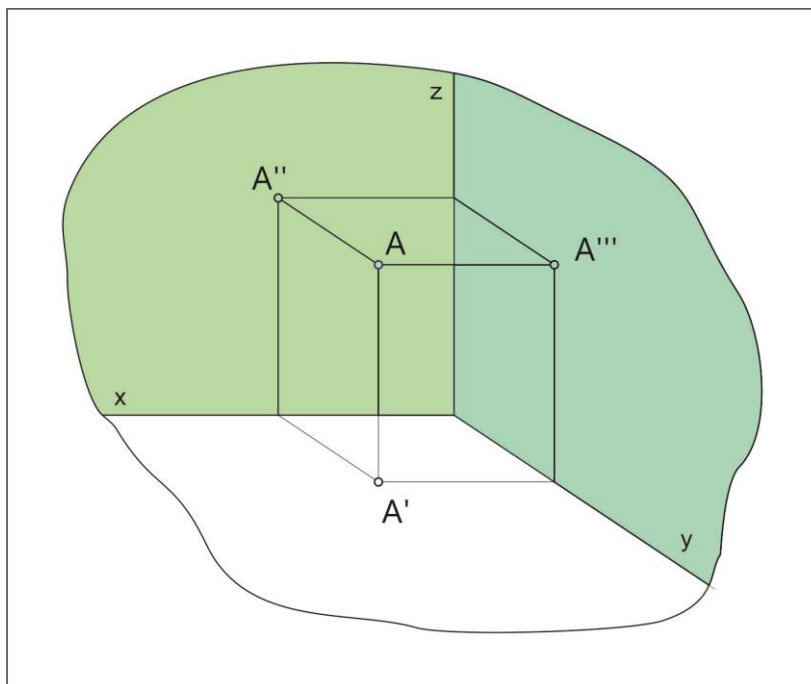


Рисунок 2.1 – Точка в пространстве и её проекции (наглядное изображение)

Для того чтобы убедиться в справедливости последнего утверждения, повернем плоскость π_1 в исходное положение (когда $\pi_1 \perp \pi_2$). Для определения точки A в пространстве необходимо из точек A_1 и A_2 восстановить проецирующие лучи, а фактически – перпендикуляры к плоскостям π_1 и π_2 соответственно (рисунок 2.1). Точка пересечения этих перпендикуляров фиксирует в пространстве искомую точку A .

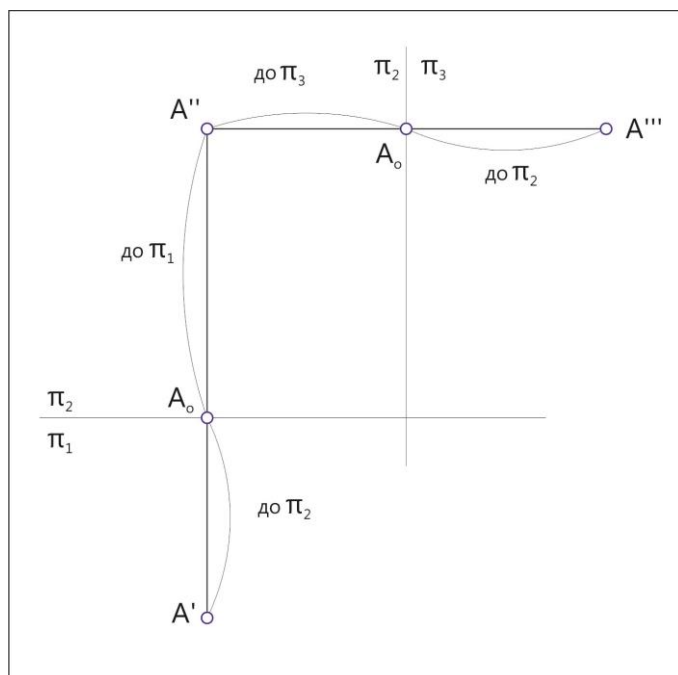


Рисунок 2.2 – Прямоугольные проекции точки

Расстояние от профильной проекции точки до вертикальной оси проекций проекции точки до вертикальной оси проекций A'_0A_3 позволяет определить расстояние от точки A до фронтальной плоскости проекций π_2 (рисунок 2.2). Известно, что положение точки в пространстве можно зафиксировать относительно декартовой системы координат с помощью трёх чисел (координат) $A(X_A; Y_A; Z_A)$ или относительно плоскостей проекций с помощью её двух ортогональных проекций ($A_1=(X_A; Y_A); A_2=(X_A; Z_A)$). На ортогональном чертеже по двум проекциям точки можно определить три её координаты и, наоборот, по трём координатам точки, построить её проекции.

По расположению на комплексном чертеже точки можно судить о её расположении в пространстве:

- если на чертеже горизонтальная проекция точки лежит под осью координат X , фронтальная – над осью X , а профильная правее оси Y , то точка в пространстве занимает общее положение;
- точка, принадлежащая плоскости проекций или оси проекций (оси координат), называется точкой частного положения.

1.2.2. Прямая

1.2.2.1. Прямые общего и частного положения

Прямая на чертеже может быть задана изображением прямой, точкой и направлением, отрезком прямой (рисунок 2.3).

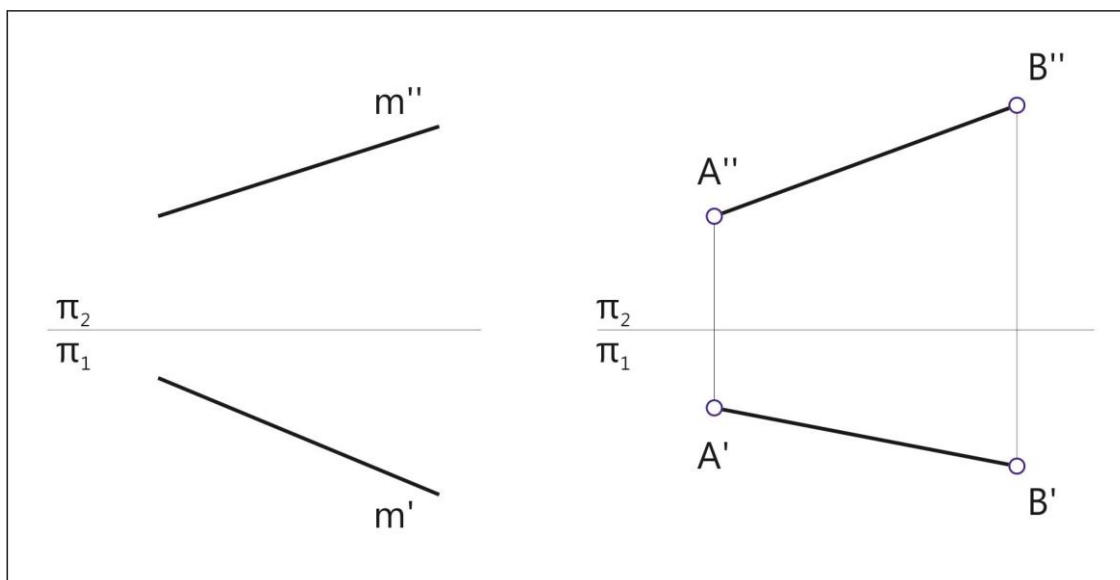


Рисунок 2.3 – Проекции прямой

На чертеже прямая m и отрезок AB произвольно наклонены к плоскостям проекций. Такие прямые называются прямыми *общего положения*.

Свойства прямых общего положения:

- прямая общего положения не параллельна ни одной из плоскостей проекций;
- длина прямоугольной параллельной проекции отрезка общего положения всегда меньше длины самого отрезка.

Прямая, параллельная или перпендикулярная какой-либо плоскости проекций, называется прямой *частного положения*.

Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются *прямыми уровня*.

Прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется горизонтальной прямой, или *горизонталью* (рисунок 2.4).

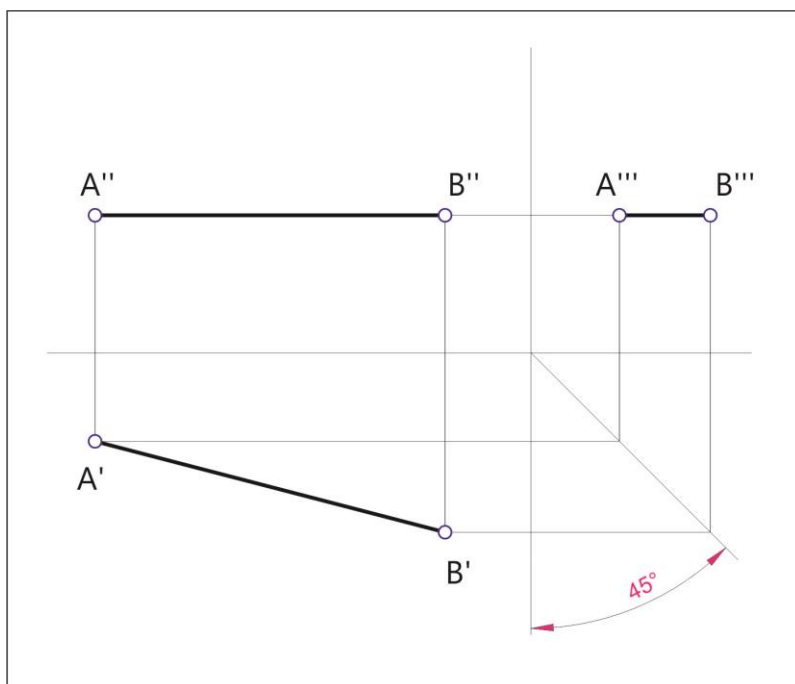


Рисунок 2.4 – Комплексный чертеж горизонтали

Если отрезок параллелен плоскости проекций π_1 , то его фронтальная проекция A_2B_2 параллельна оси проекций π_1/π_2 , а горизонтальная проекция отрезка A_1B_1 определяет истинную величину AB :

$$A_2A_0=B_2B_0$$

$$A_2B_2 \parallel \pi_2/\pi_1$$

Прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется фронтальной прямой, или *фронталью* (рисунок 2.5).

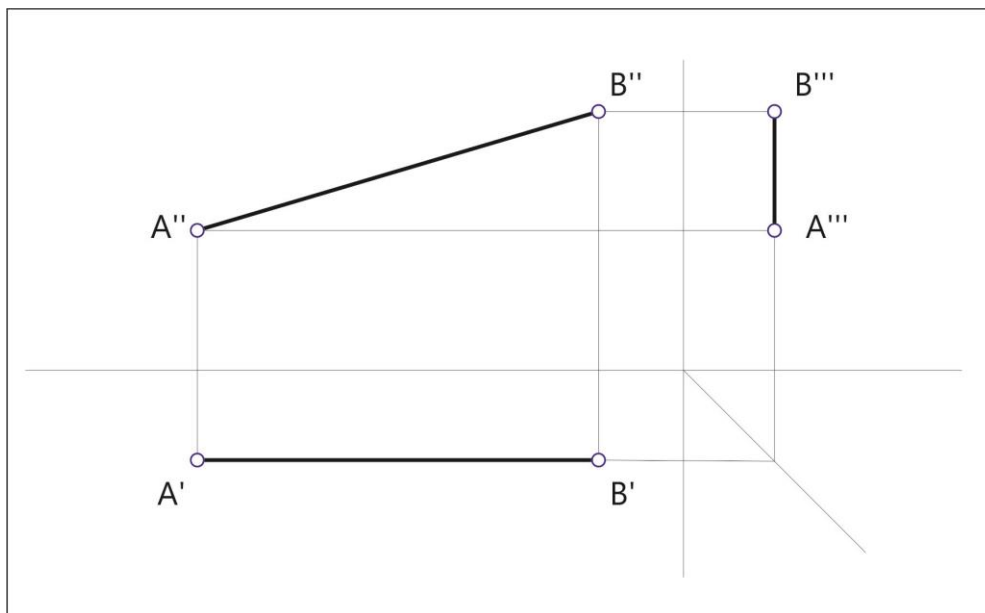


Рисунок 2.5 – Комплексный чертеж фронтالي

Если отрезок параллелен плоскости проекций π_2 , то его горизонтальная проекция параллельна оси проекций π_2/π_1 , а фронтальная проекция отрезка C_2D_2 определяет истинную величину CD .

$$C_1A_0=D_1D_0$$

$$C_1D_1 \parallel \pi_2/\pi_1$$

Прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется *профильной прямой* (рисунок 2.6).

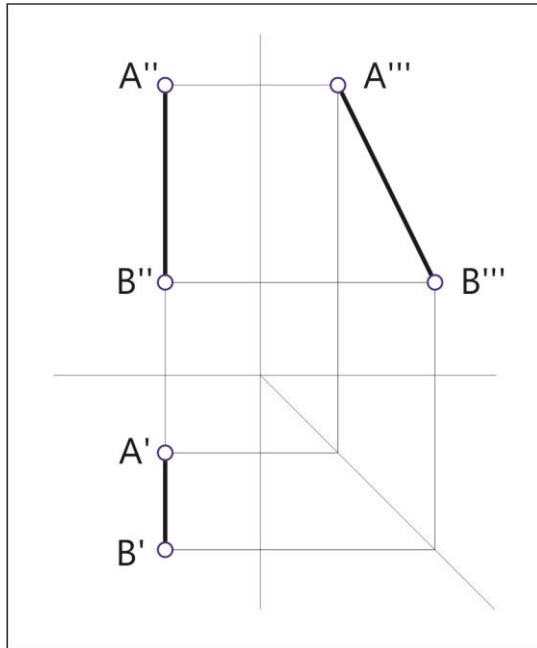


Рисунок 2.6 – Комплексный чертеж профильной линии

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются *проецирующими прямыми* (рисунок 2.7).

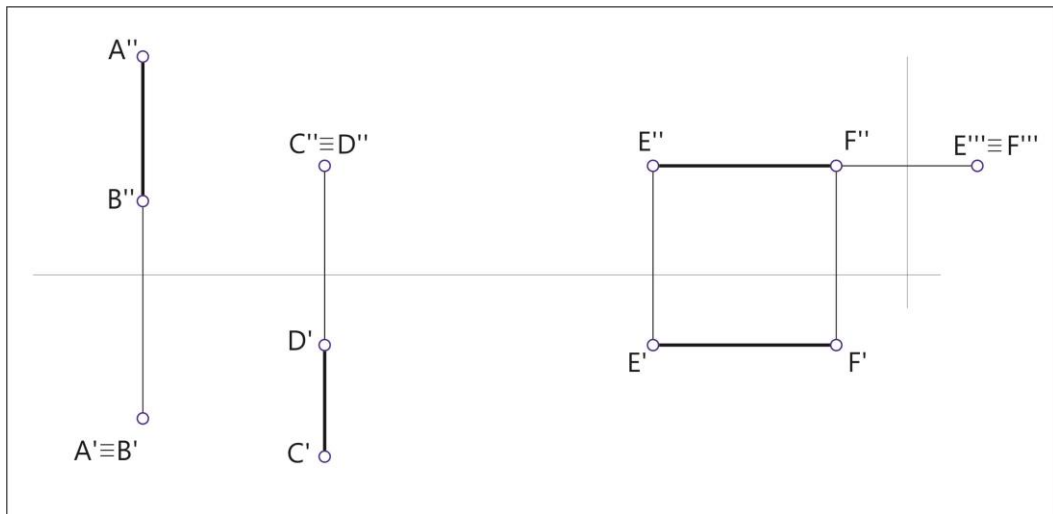


Рисунок 2.7 – Проецирующие прямые

Прямая EF, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтально-проецирующей прямой* (EF совпадает с проецирующим лучом на плоскость π_1).

Прямая KL, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций, называется *фронтально-проецирующей прямой* (KL совпадает с проецирующим лучом на плоскость π_2).

Прямая MN, перпендикулярная профильной плоскости проекций, называется *профильно-проецирующей прямой* (MN совпадает с проецирующим лучом на плоскость π_3).

1.2.2.2. Взаимное положение прямых

Две прямые в пространстве могут быть:

- параллельными;
- пересекающимися;
- скрещивающимися.

Если прямые в пространстве параллельны, то их ортогональные проекции взаимно параллельны, или сливаются, или представляют собой точки, на одной из плоскостей проекций (рисунок 2.8).

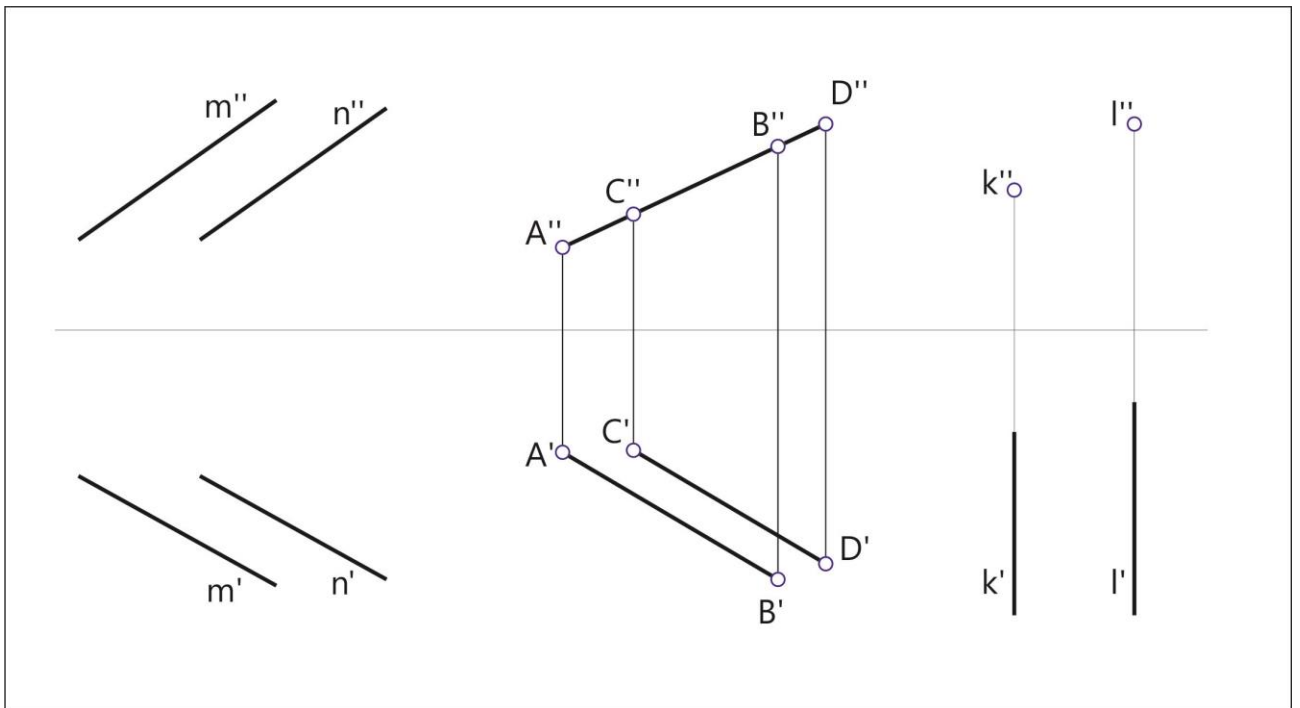


Рисунок 2.8 – Параллельные прямые

Пересекающиеся прямые – прямые, имеющие одну общую точку.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на чертеже одноименные проекции прямых пересекаются, при этом проекции точки пересечения прямых лежат на одной линии проекционной связи и делят соответствующие проекции отрезков прямых в равных отношениях (рисунок 2.9).

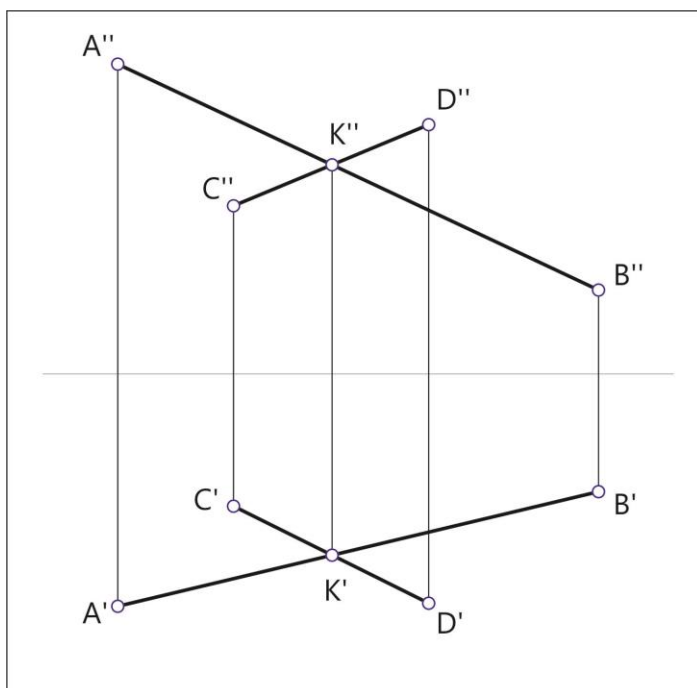


Рисунок 2.9 – Пересекающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые – прямые, не имеющие общих точек и не удовлетворяющие признакам параллельных и пересекающихся прямых (рисунок 2.10).

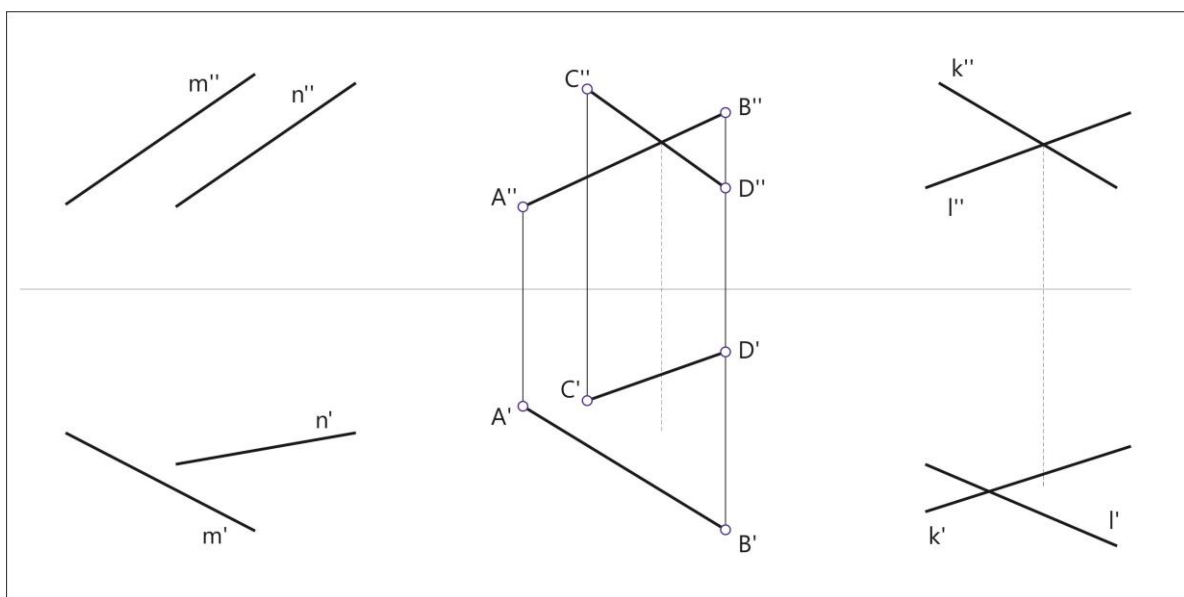


Рисунок 2.10 – Скрещивающиеся прямые

1.2.2.3. Проекции плоских углов

По проекциям двух пересекающихся прямых общего положения нельзя судить о величине угла между ними.

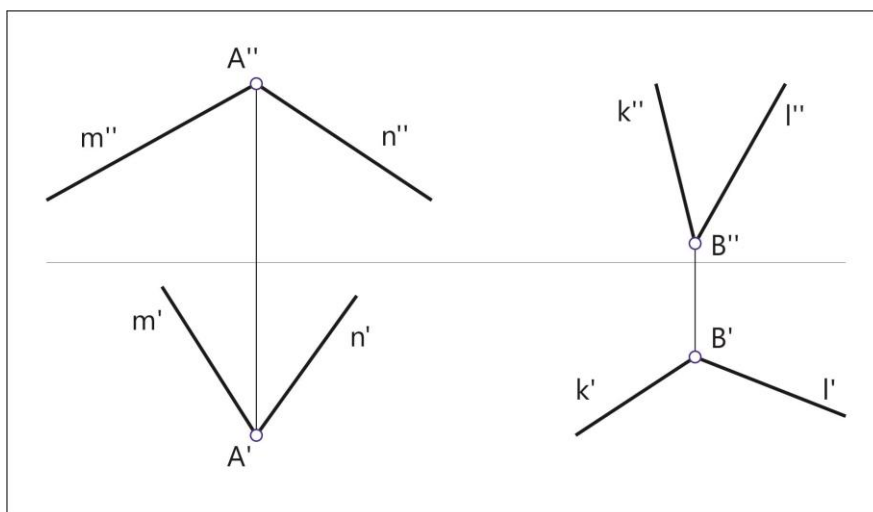


Рисунок 2.11 – Проекции углов

На чертежах видно, что острый угол может проецироваться в виде тупого, а тупой – в виде острого (рисунок 2.11).

Теорема о проецировании прямого угла частном случае. Если одна из сторон прямого угла параллельна какой-либо плоскости, а другая – этой плоскости не перпендикулярна, то на эту плоскость прямой угол проецируется в виде прямого угла (рисунок 2.12).

Обратная теорема. Если одна из двух пересекающихся прямых параллельна некоторой плоскости проекций и проекции этих прямых на эту же плоскость пересекаются под прямым углом, то в пространстве эти прямые взаимно перпендикулярны.

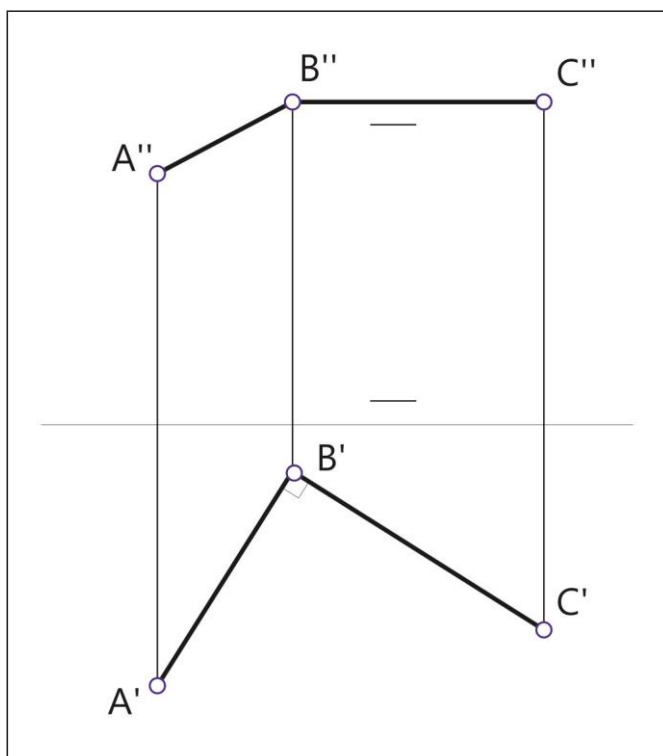


Рисунок 2.12 – Проекции прямого угла

1.2.2.4. Метод прямоугольного треугольника

Метод прямоугольного треугольника позволяет по чертежу отрезка прямой общего положения определить его истинную величину.

1.2.2.5. Деление отрезка в заданном отношении

$$\frac{A_2C_2}{C_2B_2} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$

Задание: разделить точкой К отрезок EF в соотношении EK:KF=1:3

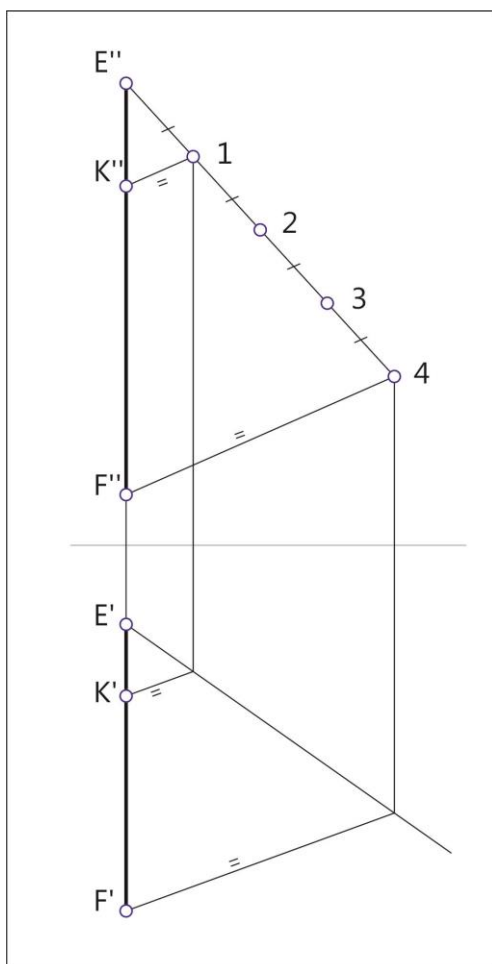


Рисунок 2.14 – Деление отрезка в заданном отношении

Алгоритм построения (рисунок 2.14):

1. Провести произвольную прямую из любого конца любой проекции отрезка, например, E_2 .

2. Отложить на этой прямой от точки E_2 равные отрезки, количество которых равно сумме чисел, составляющих дробь (в данном примере $1+3=4$).

3. Соединить последнюю точку 4 с другим концом фронтальной проекции отрезка – точкой F_2 .

4. Из точки 1 провести прямую, параллельную прямой $(4 - F_2)$ до пересечения с проекцией E_2F_2 – таким образом будет найдена фронтальная проекция искомой точки K_2 .

5. Горизонтальная проекция точки K_1 получается путем построения линии проекционной связи до пересечения её с горизонтальной проекцией отрезка.

1.2.3. Плоскость

1.2.3.1. Способы задания плоскости на чертеже

Плоскость на чертеже может быть задана (рисунок 2.15):

- проекциями трёх точек, не лежащих на одной прямой;
- проекциями точки и прямой;
- проекциями двух пересекающихся прямых;

- проекциями двух параллельных прямых;
- плоской фигурой;
- следами плоскости.

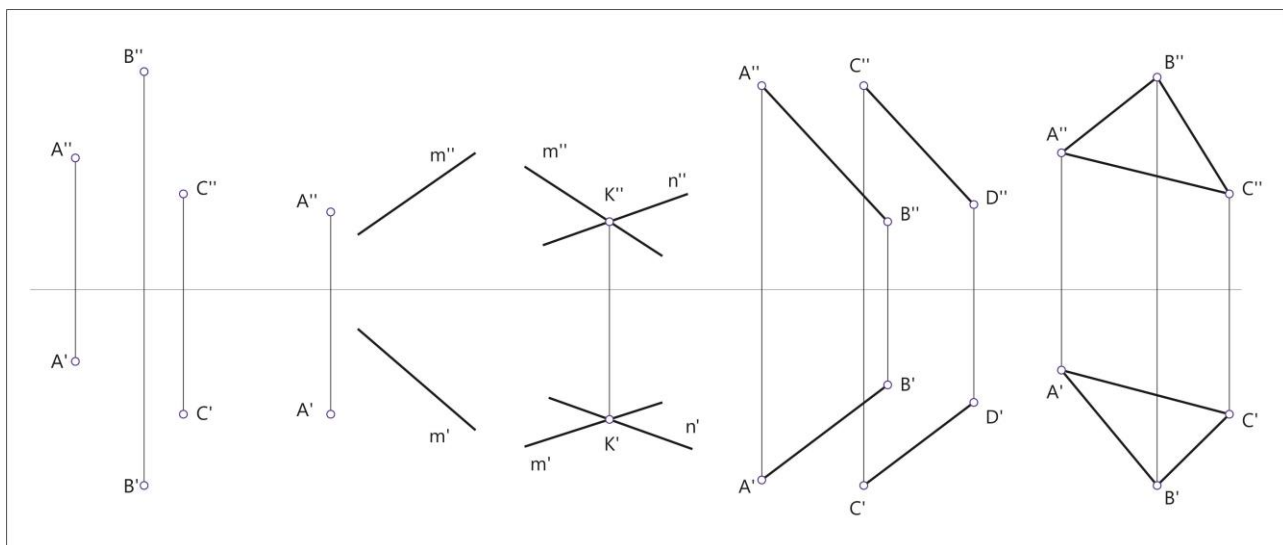


Рисунок 2.15 – Способы задания плоскости на чертеже

1.2.3.2. Плоскости общего и частного положения

Плоскость общего положения – это плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

Следом плоскости называется прямая, полученная в результате пересечения заданной плоскости с одной из плоскостей проекций (рисунок 2.16).

Плоскость общего положения может иметь *три следа*: горизонтальный, фронтальный и профильный, которые она образует при пересечении с плоскостями проекций.

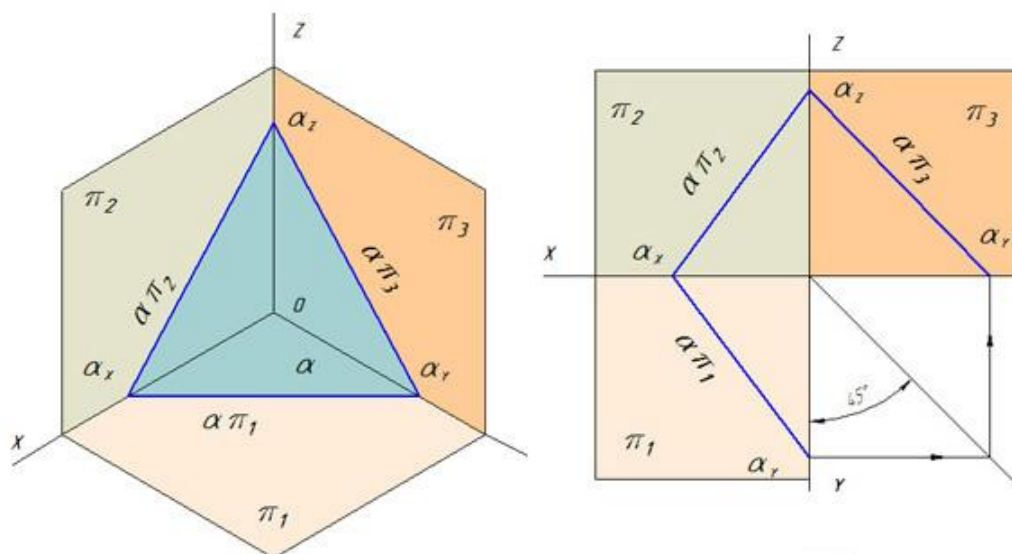


Рисунок 2.16– Следы плоскости общего положения

Плоскость частного положения – плоскость, перпендикулярная или параллельная плоскости проекций.

Плоскость, перпендикулярная плоскости проекций, называется *проецирующей* и на эту плоскость проекций она будет проецироваться в виде прямой линии.

Фронтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (рисунок 2.17).

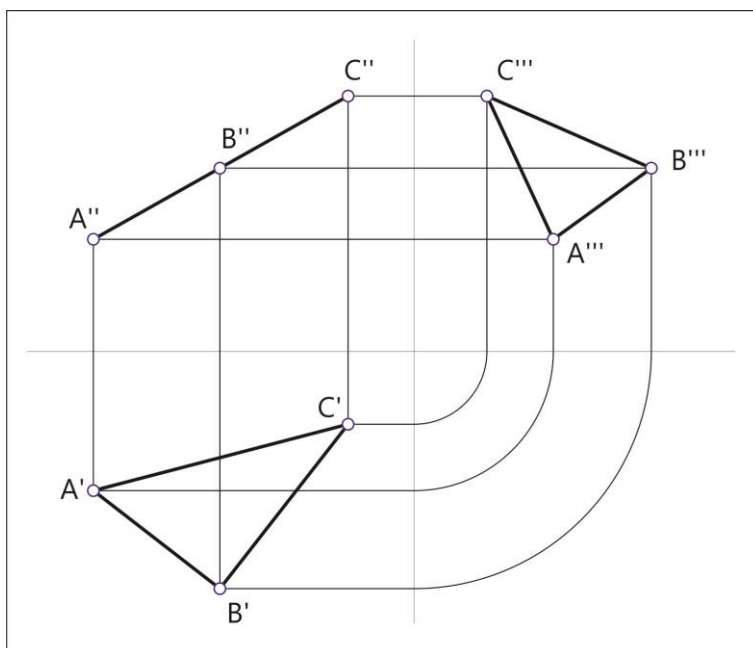


Рисунок 2.17 – Фронтально-проецирующая плоскость

Горизонтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рисунок 2.18).

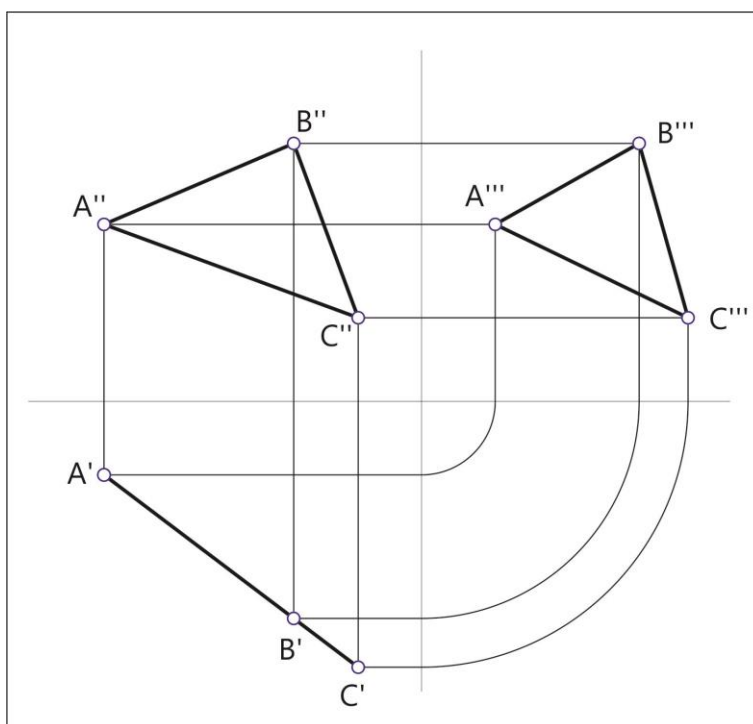


Рисунок 2.18 – Горизонтально-проецирующая плоскость

Профильно-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рисунок 2.19).

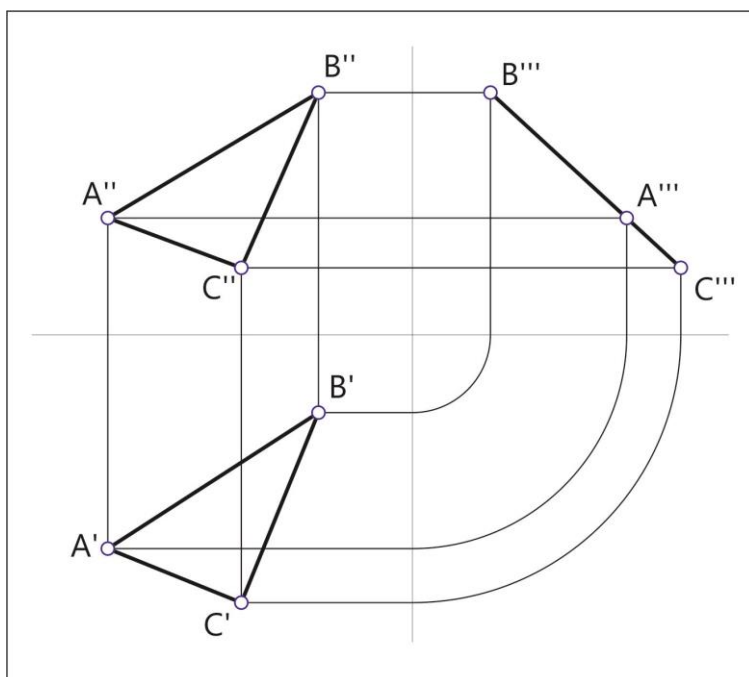


Рисунок 2.19 – Профильно-проецирующая плоскость

Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называются *плоскостями уровня* или *дважды проецирующими* плоскостями.

Фронтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций (рисунок 2.20).

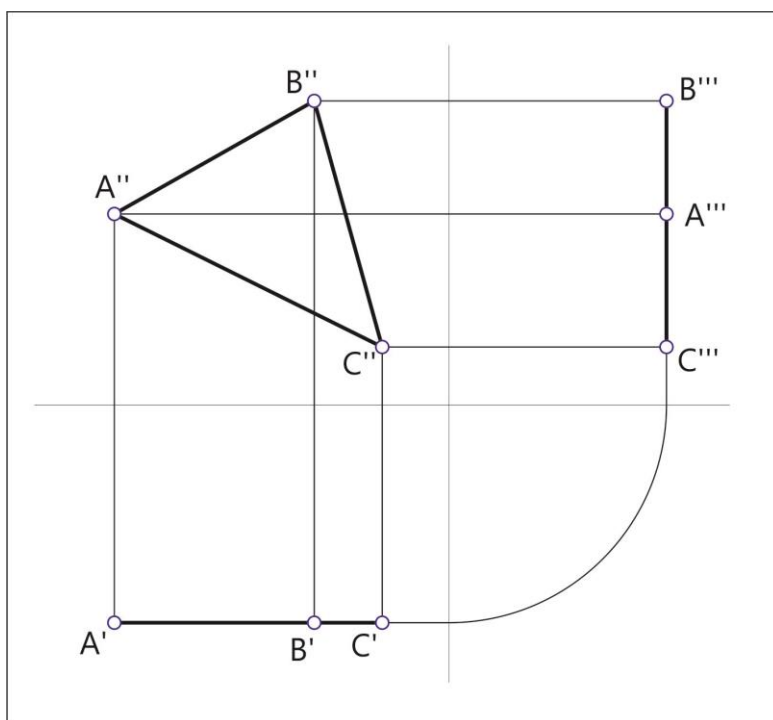


Рисунок 2.20 – Фронтальная плоскость уровня

Горизонтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций (рисунок 2.21).

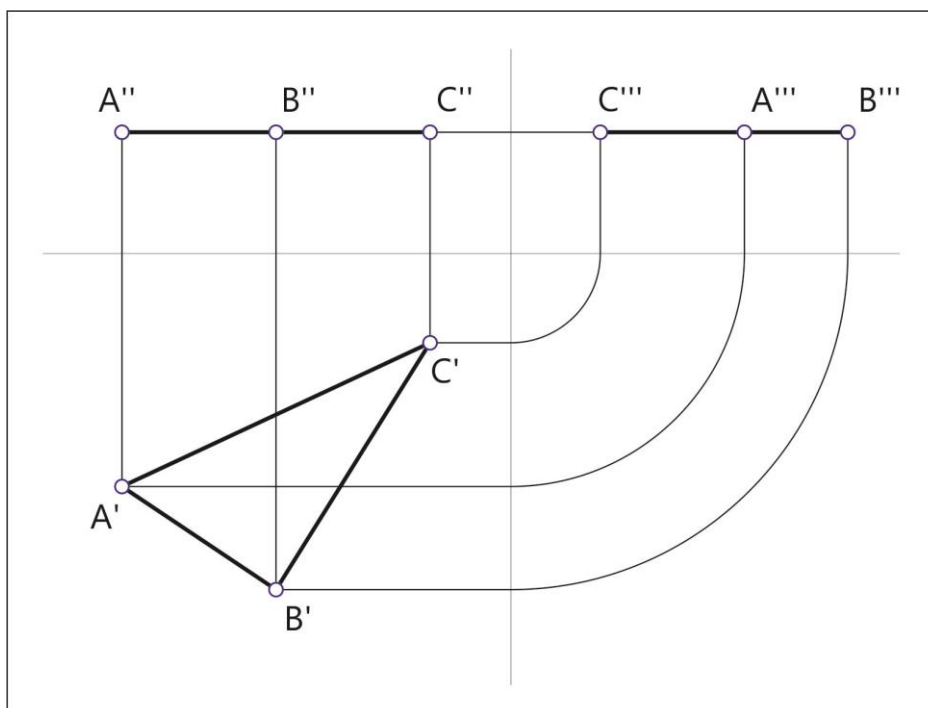


Рисунок 2.21 – Горизонтальная плоскость уровня

Профильная плоскость уровня – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций (рисунок 2.22).

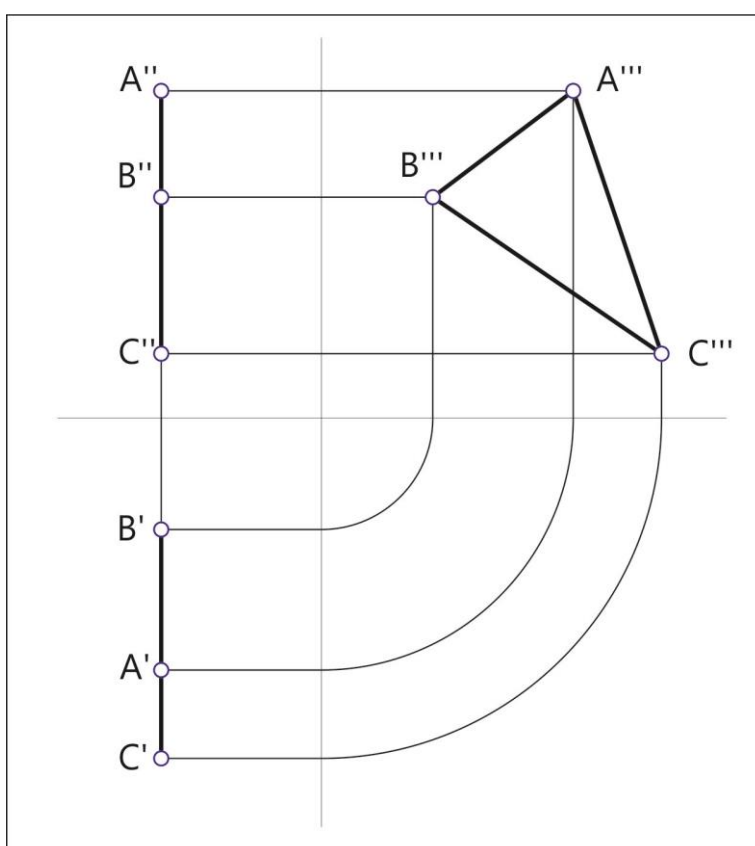


Рисунок 2.22 – Профильная плоскость уровня

1.2.3.3. Принадлежность точки и прямой плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рисунок 2.23).

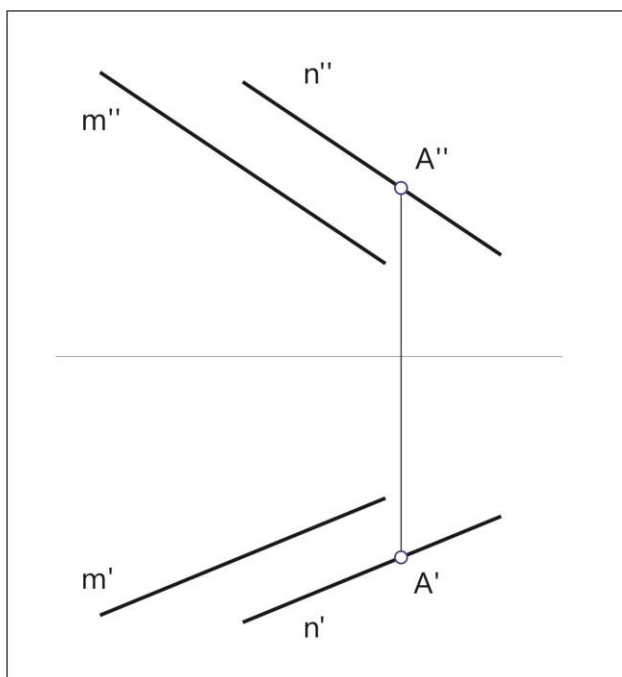


Рисунок 2.23 – Принадлежность точки плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она имеет с плоскостью хотя бы две общие точки (рисунок 2.24).

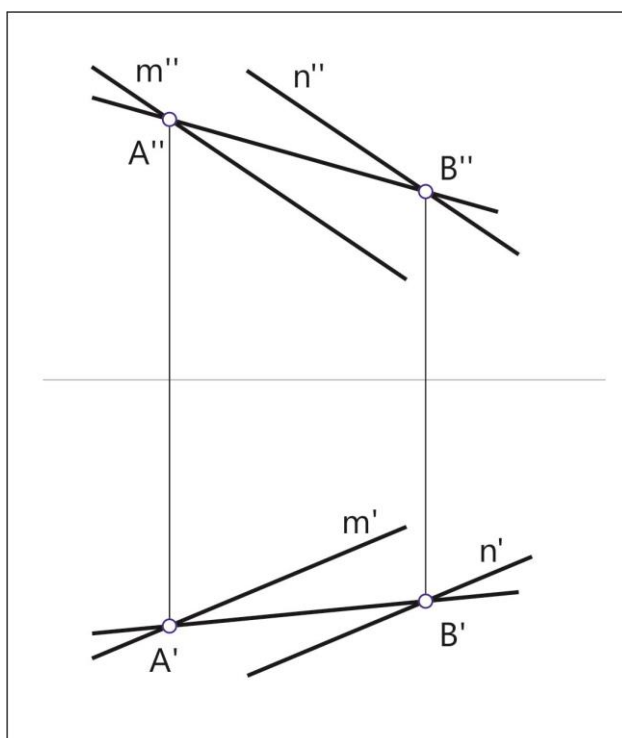


Рисунок 2.24 – Принадлежность прямой плоскости

1.2.3.4. Главные линии плоскости

В плоскости можно построить бесконечное множество прямых, но есть особые прямые, принадлежащие плоскости и занимающие частное положение – эти прямые называют *главными линиями плоскости*.

Прямой уровня называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная одной из плоскостей проекций.

Горизонталь, или горизонтальная прямая уровня – это прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рисунок 2.25).

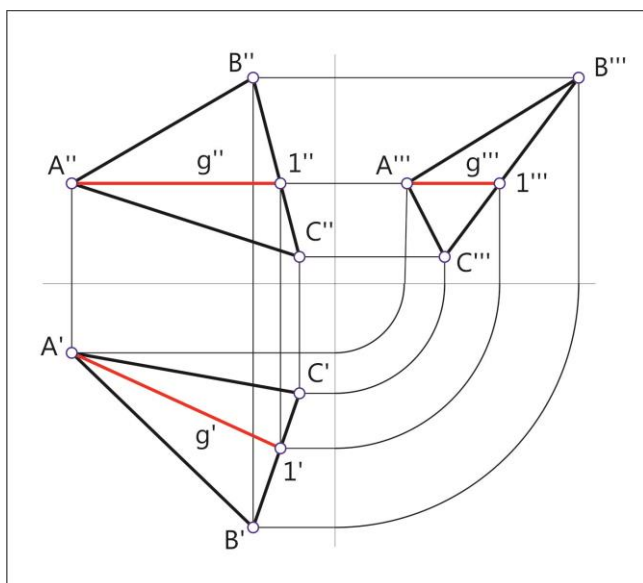


Рисунок 2.25 – Горизонталь

Фронталь, или фронтальная прямая уровня – это прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (рисунок 2.26).

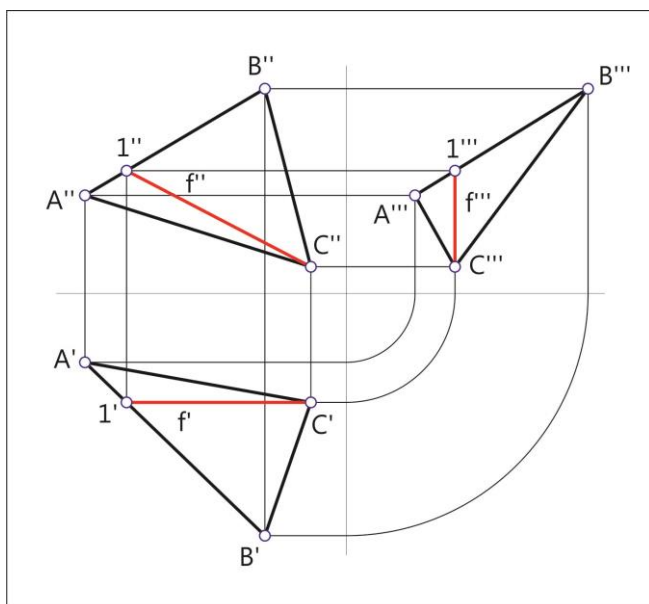


Рисунок 2.26 – Фронталь

Профильная прямая уровня – это прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рисунок 2.27).

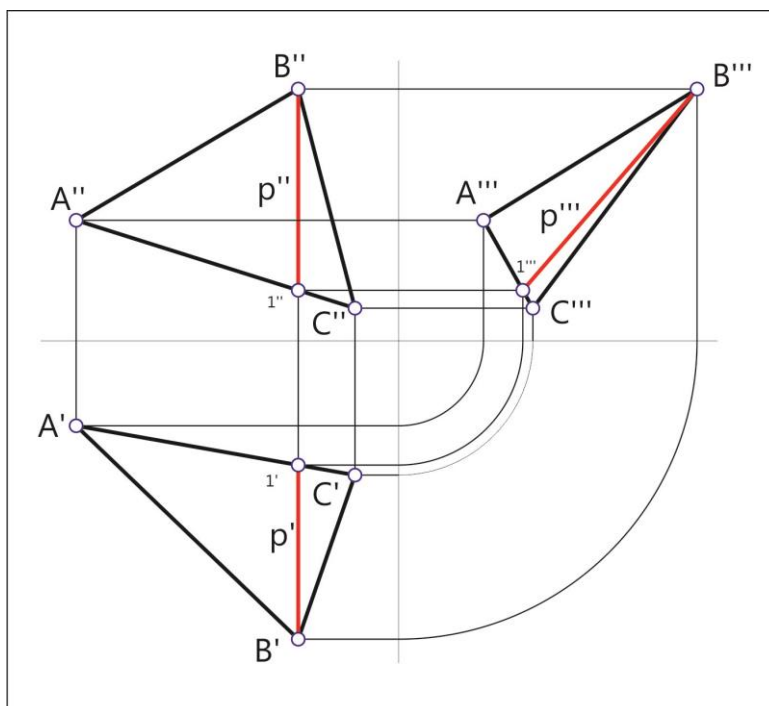


Рисунок 2.27 – Профильная прямая уровня

1.2.3.5. Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая по отношению к заданной плоскости может быть параллельной и может с ней иметь общую точку, то есть пересекаться.

Прямая *параллельна* плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости (рисунок 2.28).

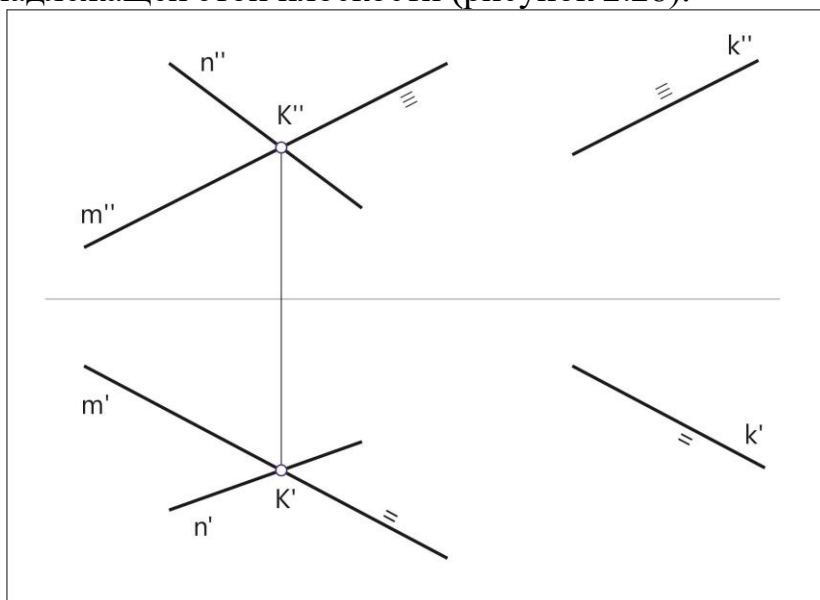


Рисунок 2.28 – Параллельности прямой плоскости

Частный случай пересечения прямой и плоскости – расположение прямой под прямым углом к плоскости.

Признак перпендикулярности прямой плоскости: прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости.

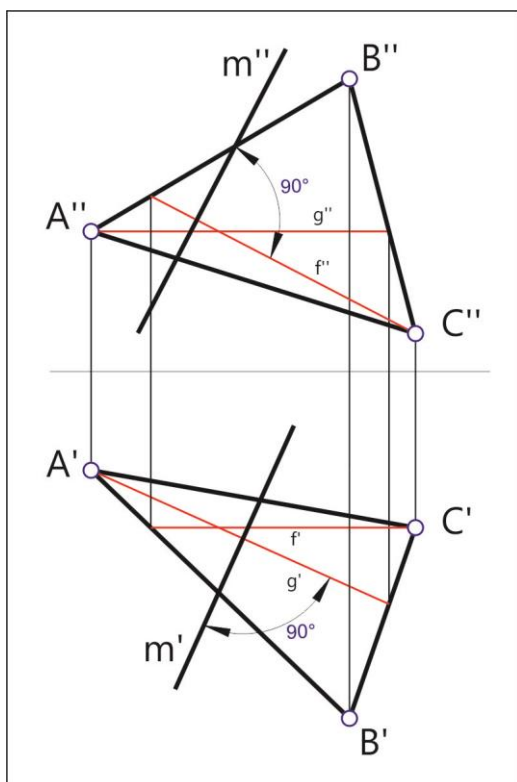


Рисунок 2.29 – Прямая, перпендикулярная плоскости

Для построения прямой, перпендикулярной плоскости, необходимо (рисунок 2.29):

- горизонтальную проекцию искомой прямой провести под прямым углом к горизонтали плоскости;
- фронтальную проекцию прямой провести под прямым углом к фронтали.

Если плоскость задана следами, то проекции прямой, перпендикулярной этой плоскости, на комплексном чертеже будут перпендикулярны этим соответствующим следам.

1.3. ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.3.1. Общие сведения о кривых линиях и поверхностях

Наряду с прямыми линиями, отрезками прямых линий, ломаными имеются кривые линии. Линия, которая не является ни прямой, ни ломанной, называется *кривой линией*.

Кривые линии разделяют на плоские и пространственные. *Плоской* называется такая линия, все точки которой лежат в одной плоскости. Примерами плоских кривых являются окружность, эллипс, циклоида, эвольвента окружности и др.

В качестве примера *пространственных* кривых можно представить винтовую линию (цилиндрическую и коническую). Цилиндрическая винтовая линия образована равномерным движением точки по прямой, которая, в свою очередь, равномерно вращается вокруг параллельной ей оси.

Совокупность нескольких последовательных положений образующей и направляющей создает каркас поверхности. Образующие l и направляющую m можно поменять местами – при этом поверхность получается одна и та же (рисунок 3.1).

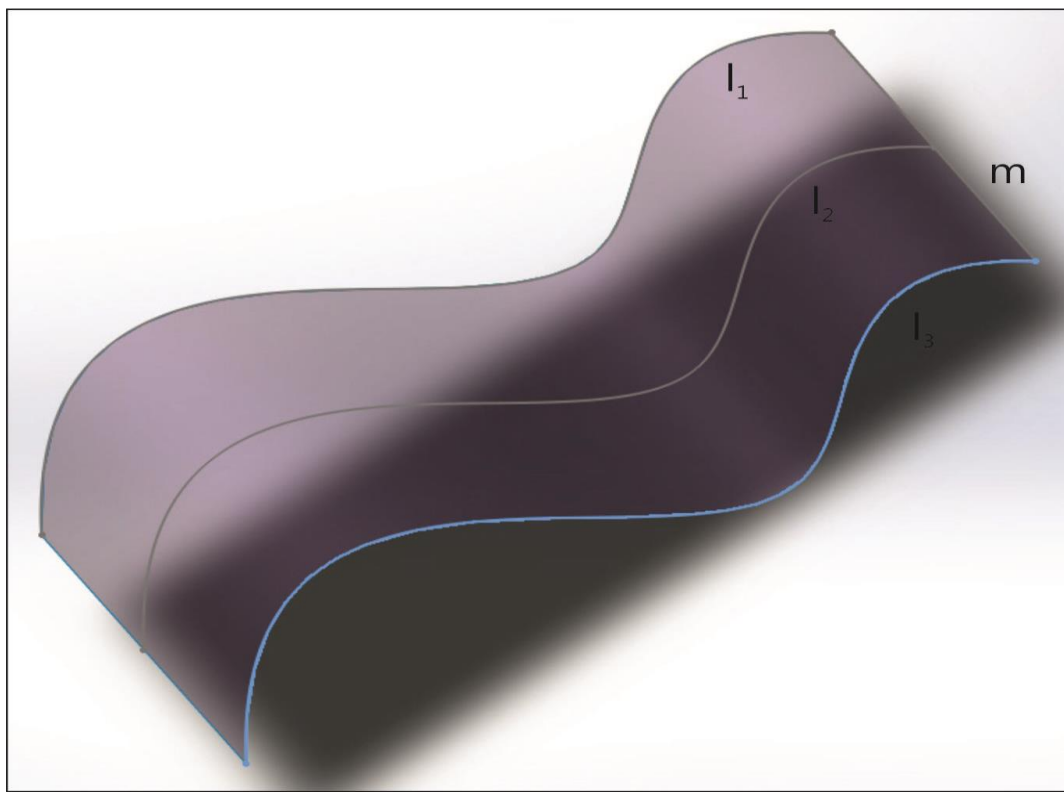


Рисунок 3.1 – Криволинейная поверхность

Любую поверхность можно получить различными способами. Так, прямой круговой цилиндр можно создать вращением образующей l вокруг оси i , ей параллельной. Тот же цилиндр образуется перемещением окружности m с центром в точке O , скользящей по оси i . На практике из всех возможных способов образования поверхности выбирают наиболее простой.

1.3.2. Классификация поверхностей

Ввиду того, что в процессе образования поверхности участвуют образующая и направляющая (по которой перемещается образующая). Классифицировать поверхности можно по-разному: исходя как из конфигурации образующей и направляющей, так и на основе кинематических законов образования каждой конкретной поверхности.

По закону движения образующей поверхности можно подразделить на поверхности:

- с поступательным движением образующей;
- с вращательным движением образующей – поверхности вращения;
- с винтовым движением образующей – винтовые поверхности.

По форме образующей:

- поверхности с прямолинейной образующей (линейчатые);
- поверхности с криволинейной образующей (криволинейные).

По закону изменения формы образующей:

- поверхности с образующей постоянной формы;
- поверхности с образующей переменной формы.

По признаку разворачивания участка поверхности в плоскую фигуру:

- разворачиваемые;
- неразворачиваемые.

По закону образования:

- закономерные поверхности (в свою очередь могут быть алгебраическими первого, второго и выше порядков и трансцендентными);
- не закономерные поверхности.

По дифференциальным свойствам:

- гладкие поверхности;
- негладкие и др.

Одни и те же поверхности могут быть классифицированы по различным признакам.

Важным является вопрос задания поверхности на комплексном чертеже посредством *определителя*, т.е. заданием *полного непрерывного каркаса поверхности*.

Определителем поверхности является совокупность геометрических элементов, реализующих закон каркаса поверхности как в пространстве, так и на чертеже.

Одна и та же поверхность может иметь несколько каркасов, поэтому для каждой поверхности может быть и несколько определителей. Поверхности относятся к многопараметрическим геометрическим объектам с определенными заранее заданными требованиями. Эти требования интерпретированы в первую очередь геометрически, с точки зрения позиционных и метрических условий.

1.3.3. Гранные поверхности и многогранники

Гранные поверхности образуются перемещением прямолинейной образующей l по ломанной направляющей m . При этом если одна точка образующей неподвижна, создается *пирамидальная поверхность*, если же образующая при перемещении параллельна заданному направлению S , то создается *призматическая поверхность*.

Элементами гранных поверхностей являются: *вершина* S (у призматической поверхности она находится в бесконечности), *грань* (часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей m и крайними относительно него положениями образующей l) и *ребро* (линия пересечения смежных граней).

Замкнутые гранные поверхности, образованные некоторым числом (не менее четырех) граней, называют *многогранниками*.

Пирамида – многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной S .

На комплексном чертеже пирамида задается проекциями ее вершин и ребер с учетом их видимости (рисунок 3.2).

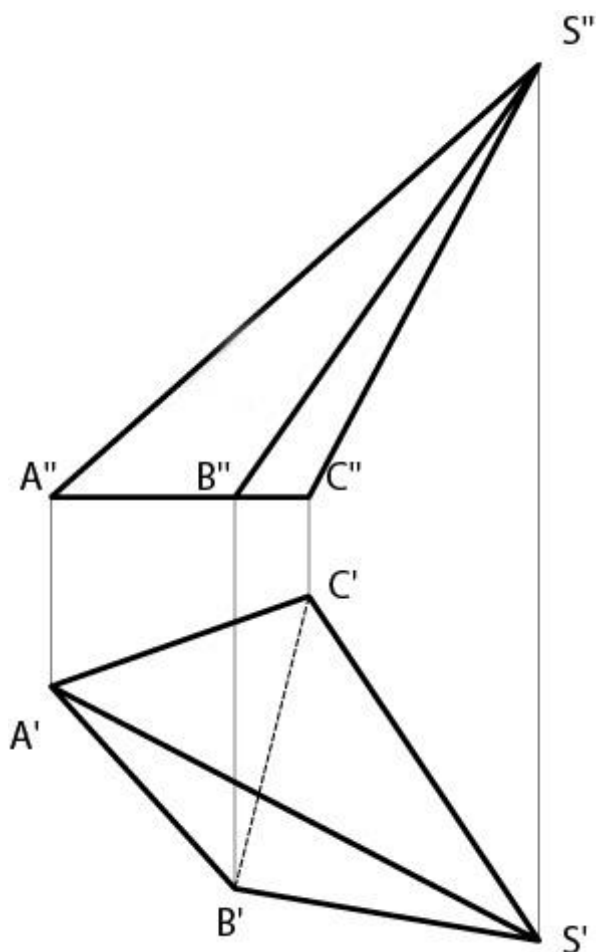


Рисунок 3.2 – Проекции пирамиды

Призма – многогранник, у которого основания – два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани параллелограммы. Если ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, такую призму называют *прямой*. Если у призмы ребра перпендикулярны какой-либо плоскости проекций, то боковую поверхность этой призмы называют *проецирующей* (рисунок 3.3).

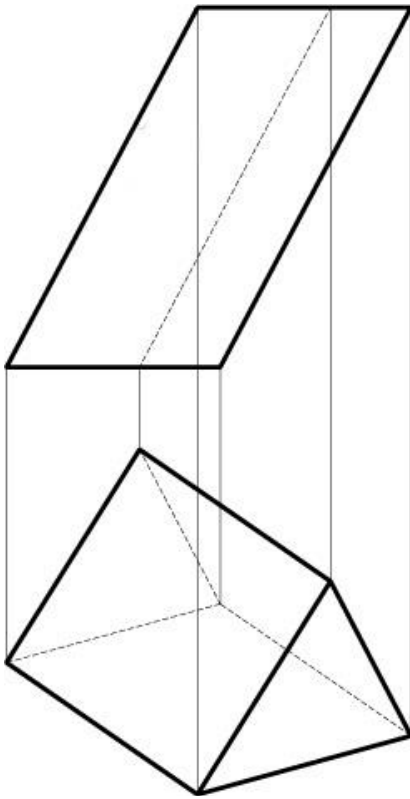


Рисунок 3.3 – Треугольная наклонная призма

1.3.4. Поверхности вращения

Поверхность вращения образуется вращением линии l вокруг прямой i – оси вращения. Поверхности вращения могут быть линейчатыми, например, цилиндр или конус, и нелинейчатыми, или криволинейными, например, сфера, тор.

Определитель поверхности вращения включает образующую l и ось i .

Цилиндрическая поверхность образуется движением прямой линии, которая в любом своем положении параллельна данному направлению и пересекает криволинейную направляющую.

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими все образующие данной поверхности.

Взаимно параллельные плоские фигуры, ограниченные цилиндрической поверхностью, называются *основаниями цилиндра*.

Если нормальное сечение (плоскость сечения перпендикулярна образующим) имеет форму окружности, то цилиндрическая поверхность называется *круговой*.

Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны к основаниям, то цилиндр называется *прямым* (рисунок 3.4), в противном случае – *наклонным*.

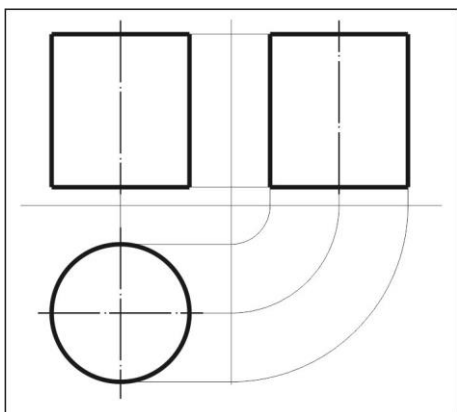


Рисунок 3.4 – Комплексный чертеж прямого кругового цилиндра

Коническая поверхность образуется движением прямой линии (образующей), которая в любом своем положении проходит через неподвижную точку и пересекает криволинейную направляющую.

Тело, ограниченное замкнутой конической поверхностью вершиной и плоскостью, называется *конусом*.

Плоская фигура, ограниченная конической поверхностью, называется *основанием конуса*.

Часть конической поверхности, ограниченная вершиной и основанием, называется *боковой поверхностью конуса*.

Если основание конуса является кругом, то конус называется *круговым*.

Если вершина конуса расположена на перпендикуляре к основанию, восстановленному из его центра, то конус называется *прямым круговым* (рисунок 3.5).

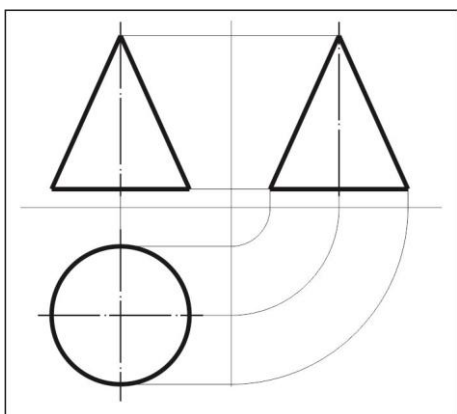


Рисунок 3.5 – Комплексный чертеж прямого кругового конуса

Сферическая поверхность – поверхность, образованная вращением окружности вокруг отрезка, являющегося её диаметром.

Шаром называется тело, ограниченное сферической поверхностью.

Прямоугольная проекция шара (сферы) на любую плоскость – есть окружность, которую называют *очерковой* (рисунок 3.6).

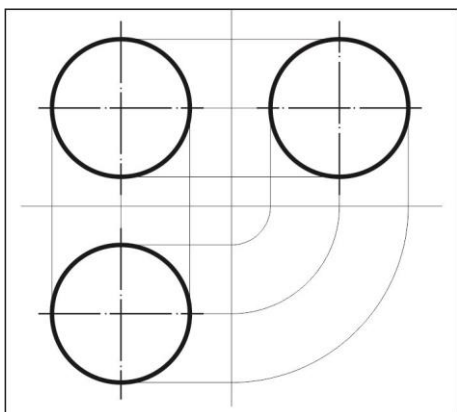


Рисунок 3.6 – Наглядное изображение и проекции сферической поверхности

1.3.5. Принадлежность точки и линии поверхности

Одним из основных условий задания поверхности на чертеже является условие принадлежности точки заданной поверхности.

Теорема. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности.

Алгоритм решения задач по построению точки, принадлежащей поверхности:

1. Одна проекция точки на чертеже задается произвольно в пределах очерка поверхности.

2. Через заданную проекцию точки провести проекцию линии, принадлежащей поверхности. Это может быть линия, соединяющая проекцию заданной точки и вершину пирамиды (конуса), либо линия, проходящая через проекцию заданной точки и параллельная ребру призмы (либо очерковой образующей цилиндра).

3. Определяем вторую проекцию линии, исходя из условия принадлежности ее данной поверхности.

4. На построенной проекции линии, принадлежащей поверхности, отмечаем искомую проекцию точки.

Таблица 3.1 – Пошаговое построение проекций точки, принадлежащей призме

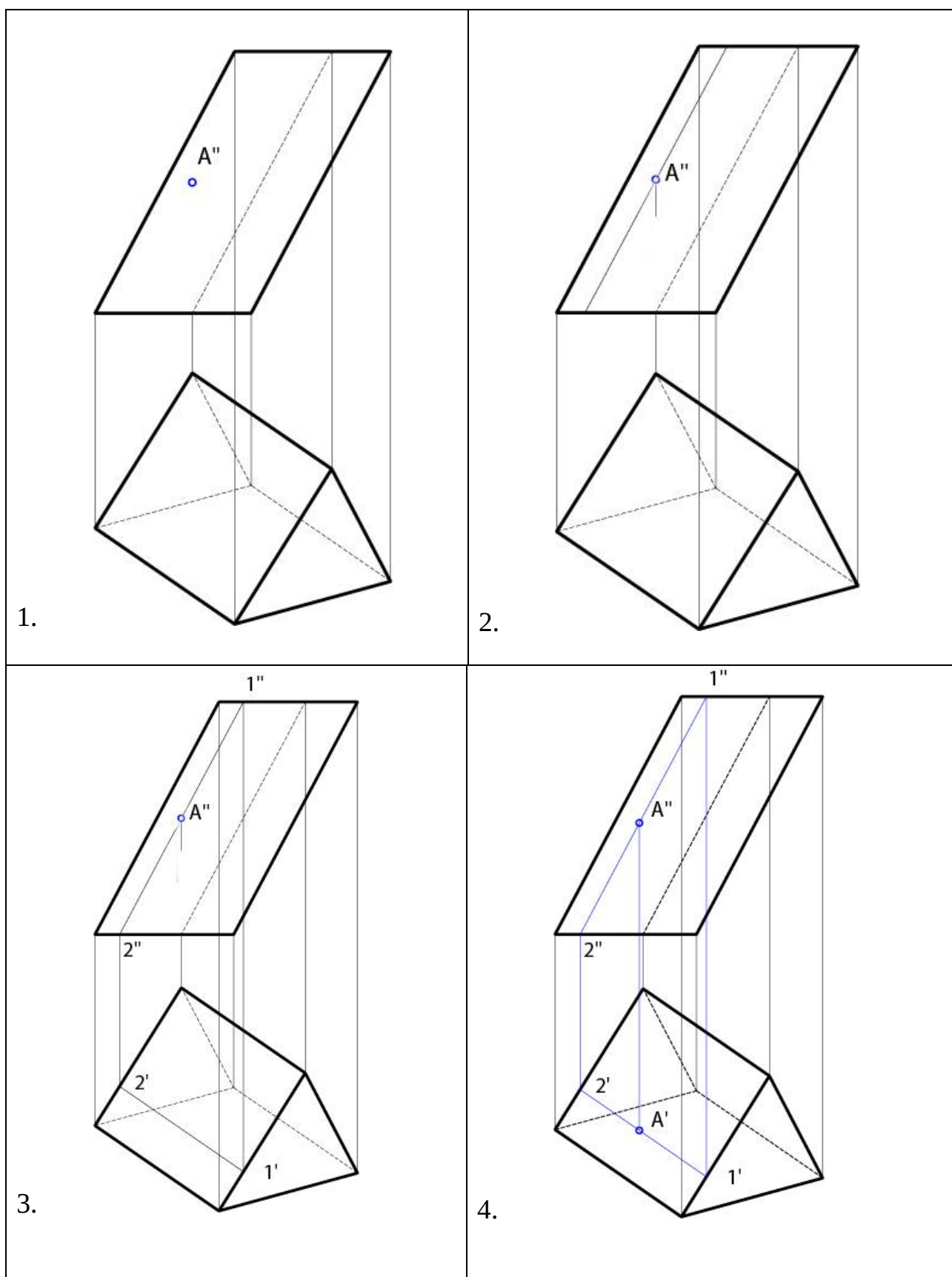


Таблица 3.2 – Пошаговое построение проекций точки, принадлежащей пирамиде

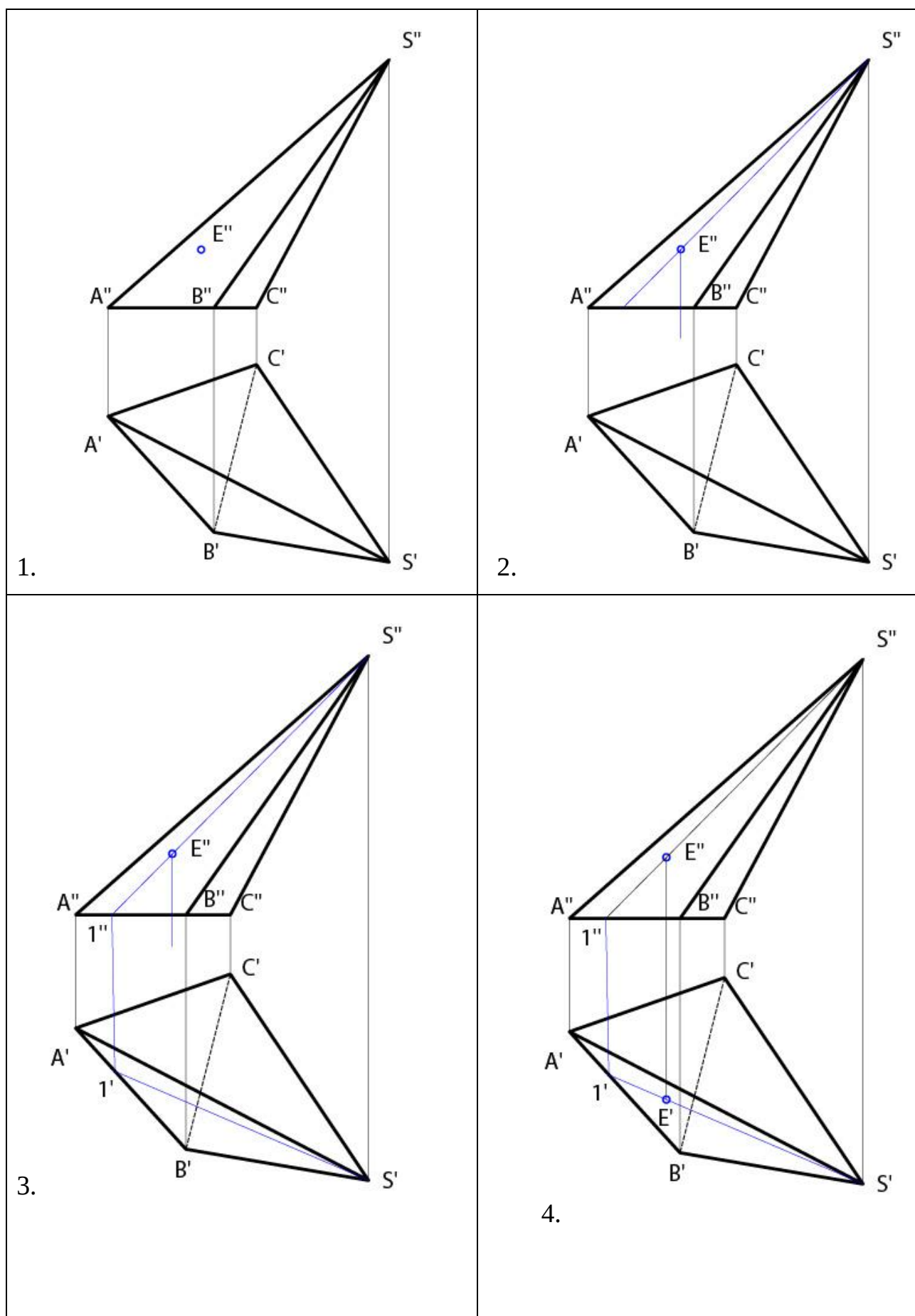


Таблица 3.3 – Пошаговое построение проекций точки, принадлежащей цилиндру

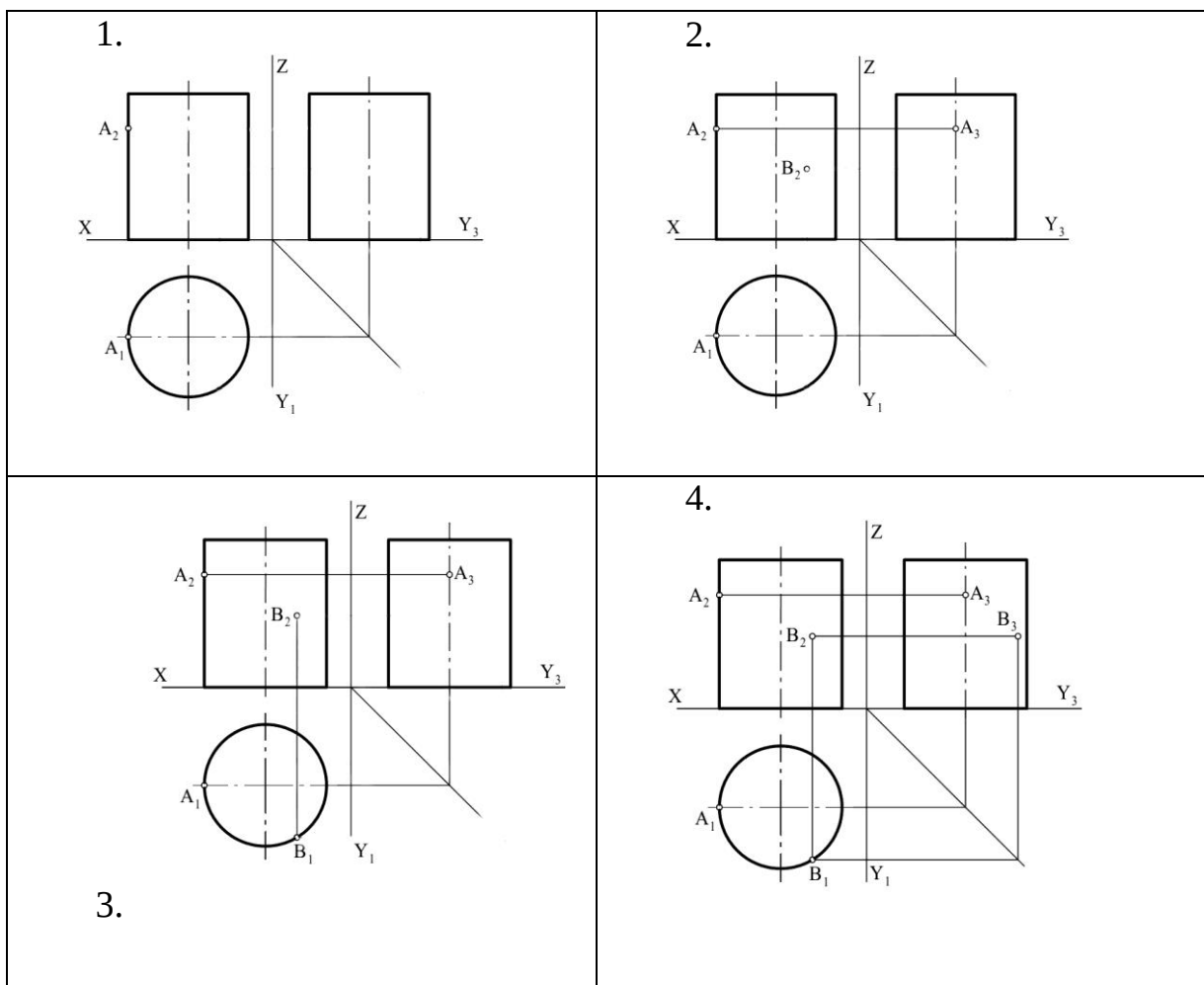


Таблица 3.4 – Варианты построения проекций точки, принадлежащей конусу

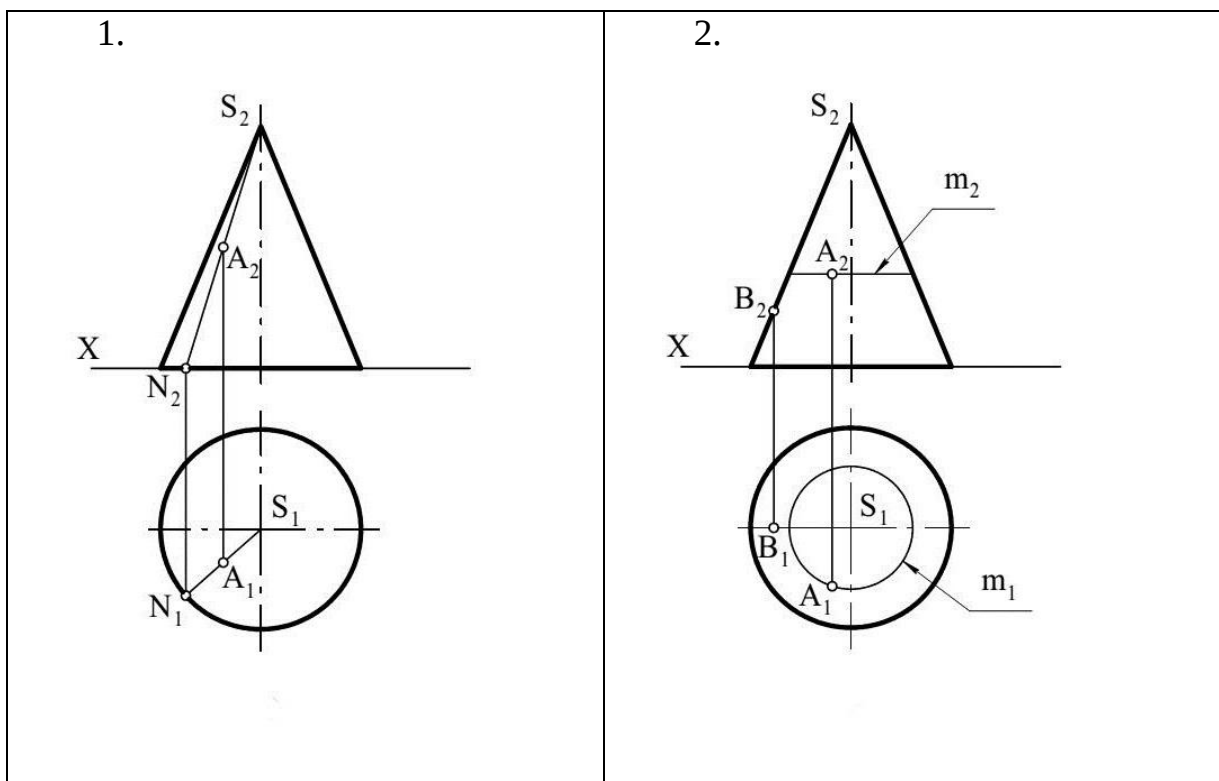
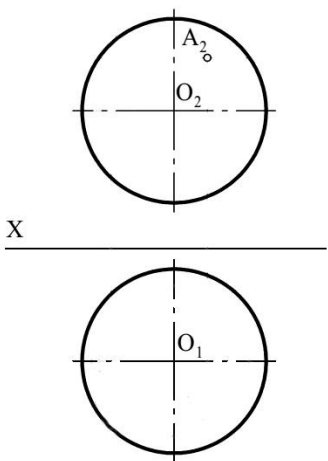
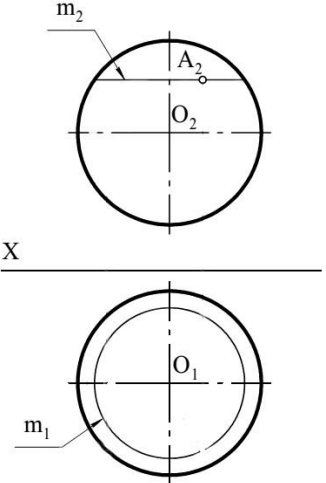
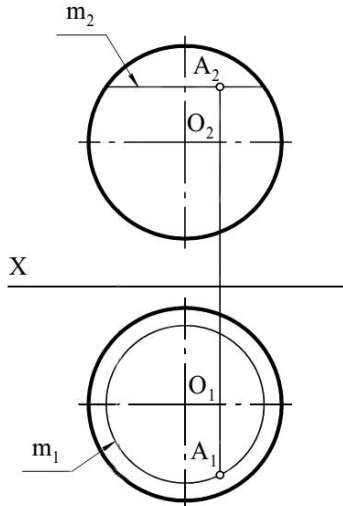
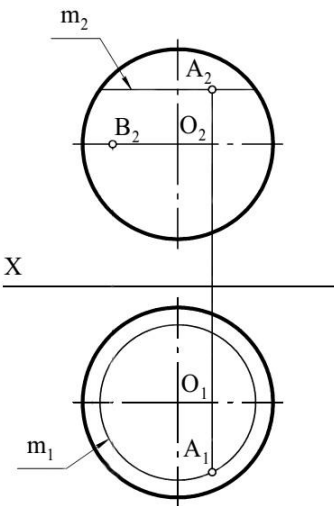
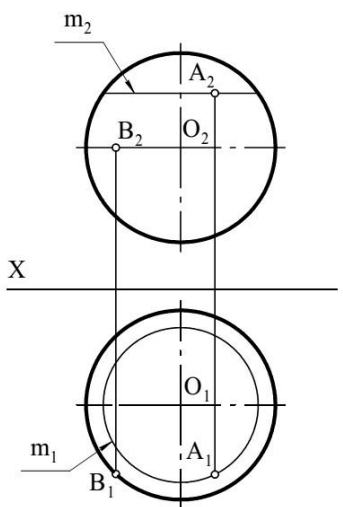
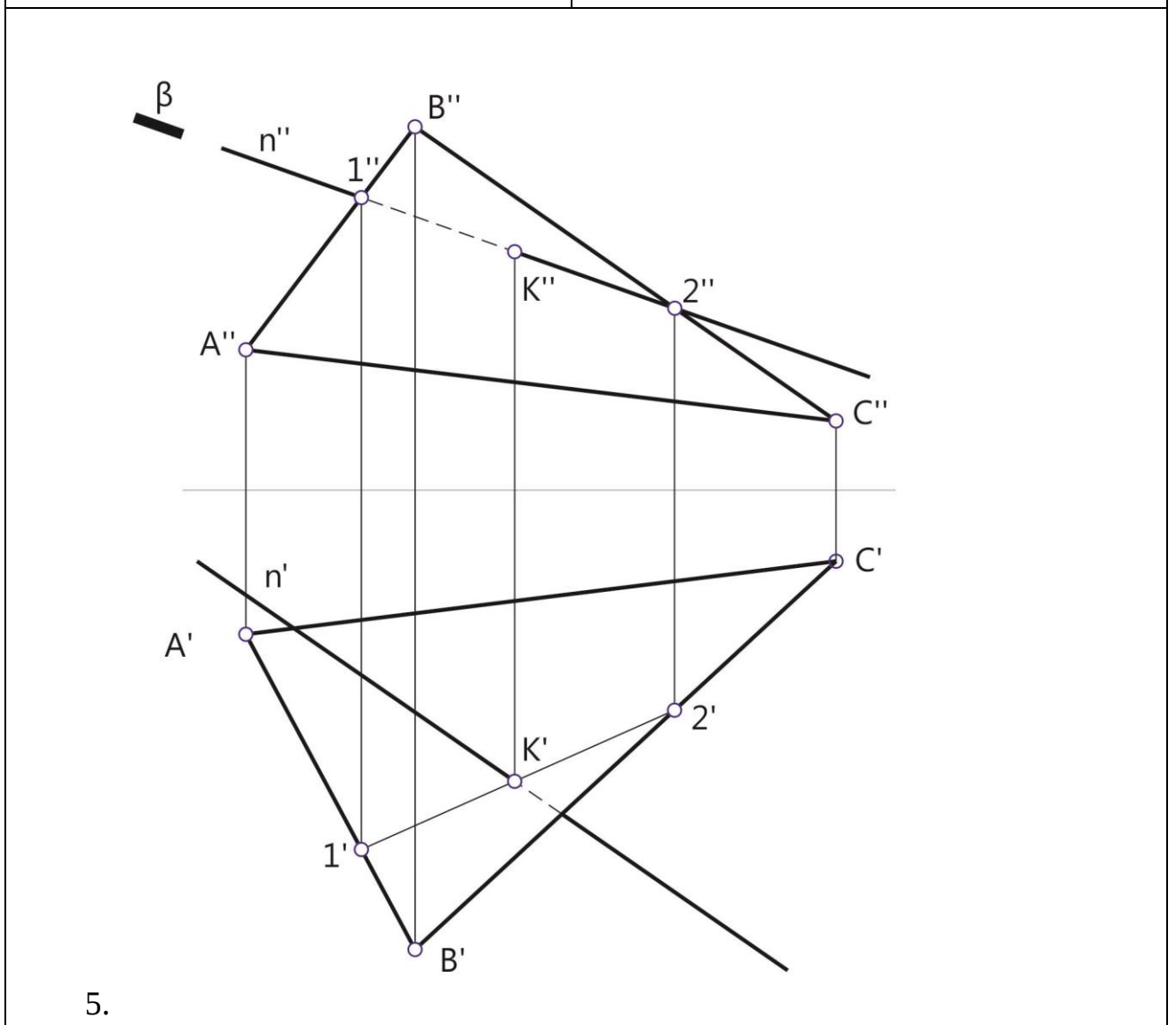
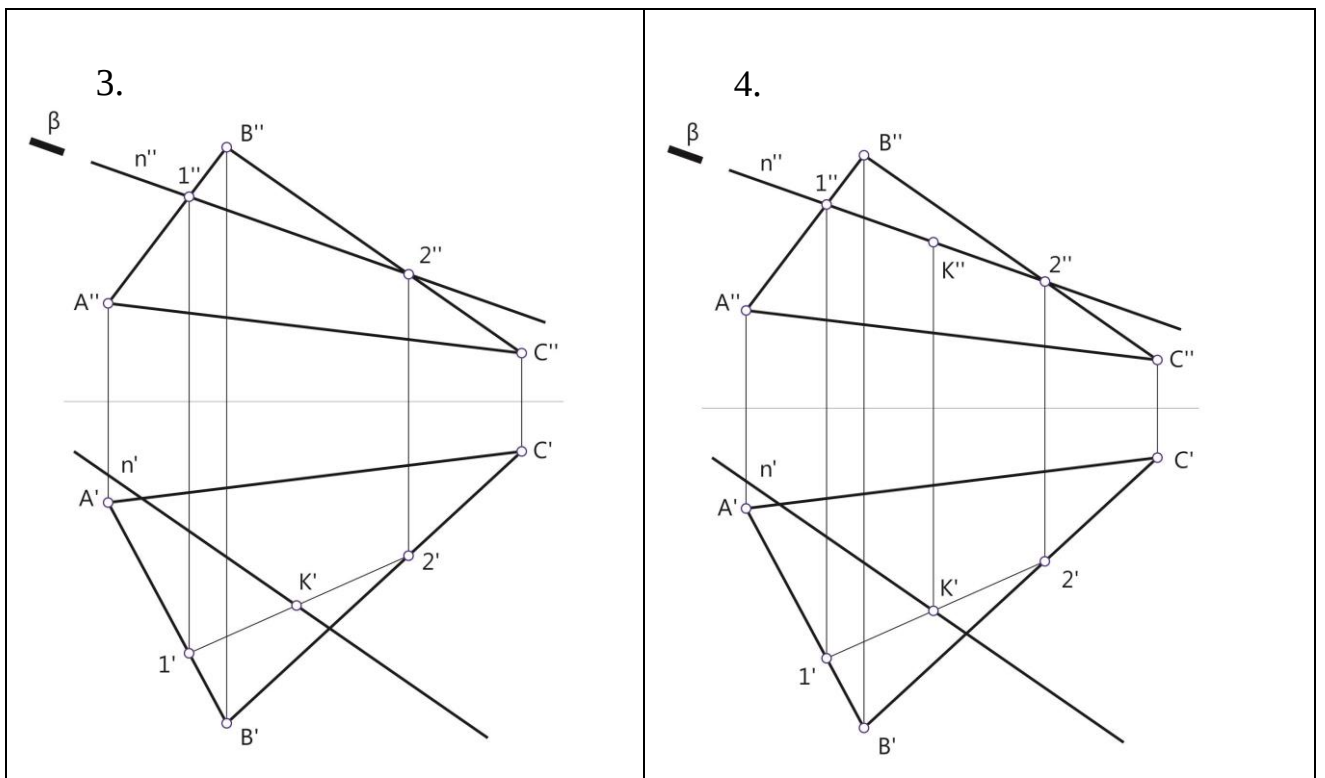


Таблица 3.5 – Пошаговое построение проекций точки, принадлежащей сфере

1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	



Частные случаи пересечения прямой и плоскости: пересечение прямой общего положения и плоскости частного положения; пересечение прямой частного положения и плоскости общего положения, пересечение прямой частного положения и плоскости частного положения.

Примеры

В случае пересечения прямой общего положения и горизонтально-проецирующей плоскости (рисунок 4.1), горизонтальная проекция точки пересечения принадлежит следу проецирующей плоскости. Фронтальная же проекция искомой точки определяется по линии проекционной связи – строится из условия принадлежности точки заданной прямой. Видимость заданной прямой определяется с помощью реконструкции образов (по наглядности).

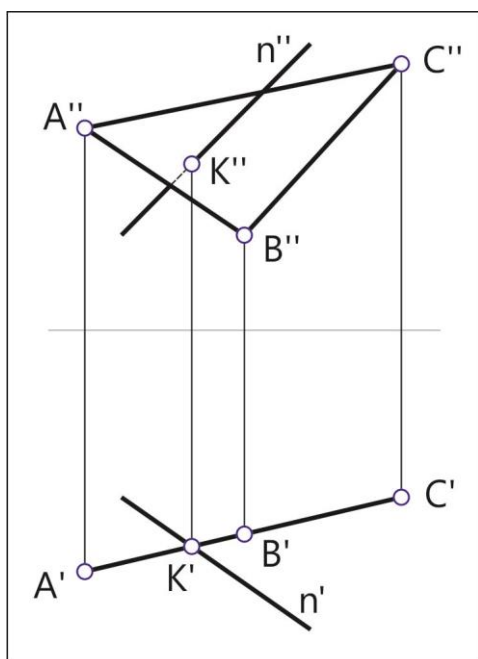


Рисунок 4.1 – Построение точки пересечения прямой общего положения и горизонтально-проецирующей плоскости

В случае пересечения фронтально-проецирующей прямой и плоскости общего положения (рисунок 4.2), фронтальная проекция точки пересечения совпадает с проекцией заданной прямой (проецируется в точку). Построение горизонтальной проекции точки пересечения выполняется из условия принадлежности этой точки заданной плоскости: точка пересечения принадлежит плоскости, так как она принадлежит ее прямой (т. е. через фронтальную проекцию точки пересечения необходимо провести вспомогательную прямую, принадлежащую плоскости и найти ее горизонтальную проекцию – пересечение горизонтальной проекции заданной прямой и вспомогательной и есть искомая горизонтальная проекция точки пересечения). Видимость заданной прямой определяется с помощью реконструкции образов (по наглядности).

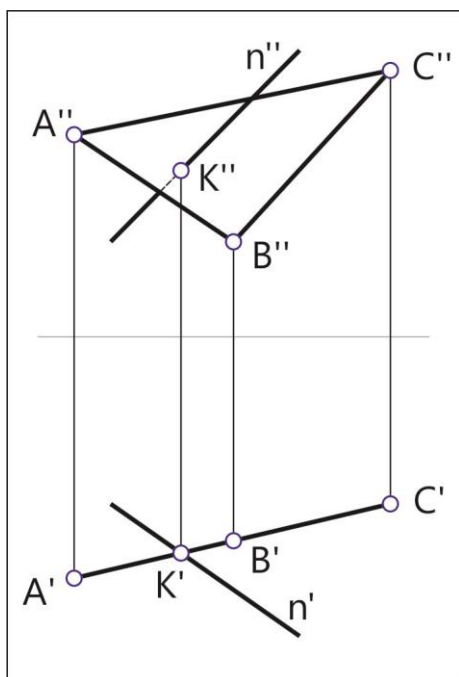


Рисунок 4.2 – Построение точки пересечения прямой общего положения и горизонтально-проецирующей плоскости

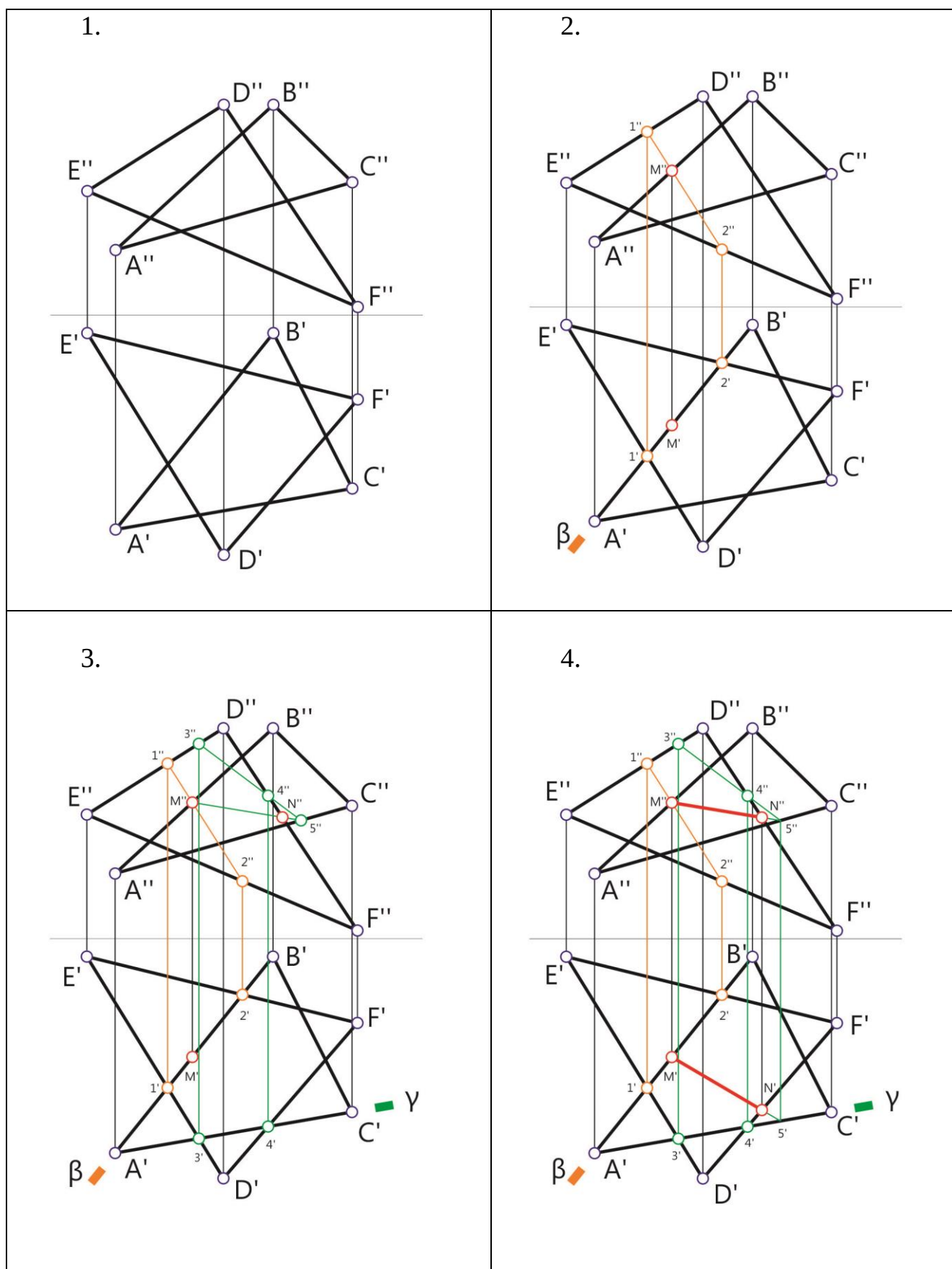
1.4.2. Взаимное пересечение двух плоскостей

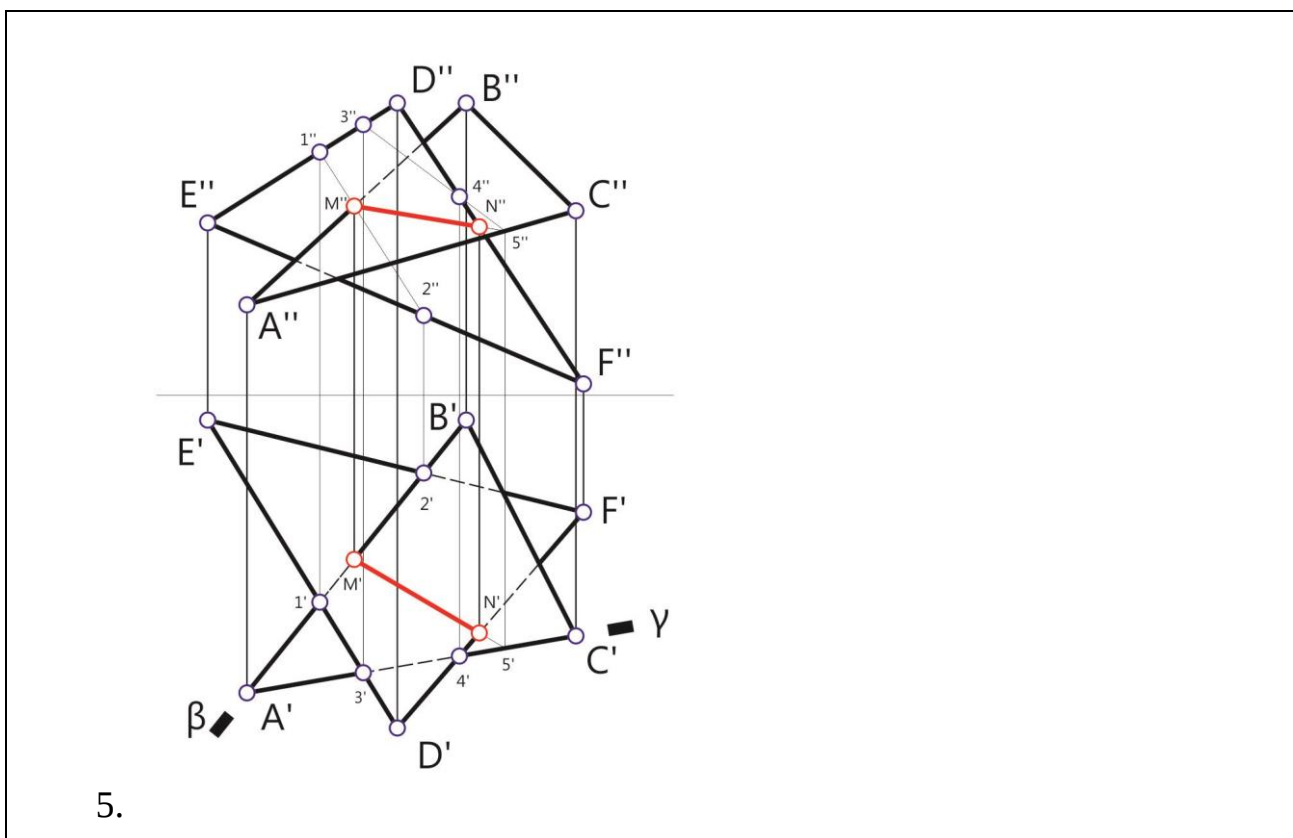
Результатом пересечения двух плоскостей является прямая. Любая прямая на плоскости или в пространстве может быть однозначно задана двумя точками. Поэтому для того, чтобы построить линию пересечения двух плоскостей, следует найти две точки, общие для обеих плоскостей, после чего соединить их и определить видимость участков пересеченных плоскостей.

Алгоритм построения линии пересечения плоскостей общего положения аналогичен построению точки пересечения прямой общего положения и плоскости, так как для построения искомой линии нам нужны две точки пересечения линейных участков одной заданной плоскости с другой. Следовательно, условие на пересечение двух плоскостей общего положения можно представить как пересечение одной из плоскостей с прямой, принадлежащей другой плоскости (выполнить дважды – так как необходимы две точки пересечения).

При условии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных плоскими фигурами (треугольниками), визуально накладываемыми друг на друга (таблица 4.2) – необходимо заключить одну из сторон любого треугольника во вспомогательную проецирующую плоскость и найти точку пересечения этой стороны с плоскостью, которая задана другим треугольником. Алгоритм повторить, заключив во вспомогательную проецирующую плоскость еще какую-либо сторону одного из треугольников. На заключительном этапе определить видимость участков пересеченных плоскостей.

Таблица 4.2 – Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных визуально накладываемыми плоскими фигурами

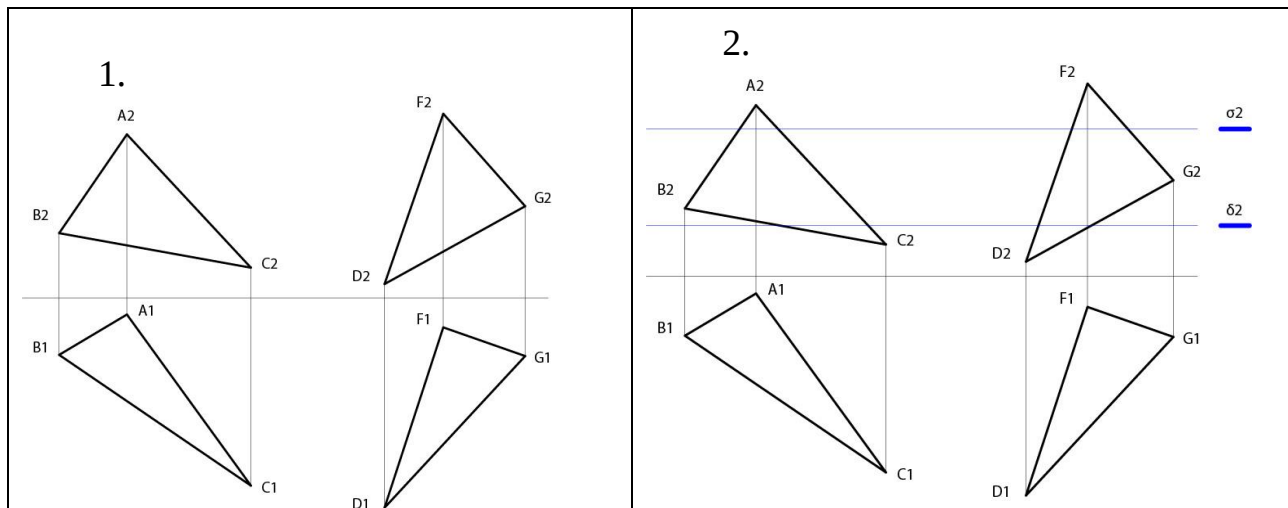


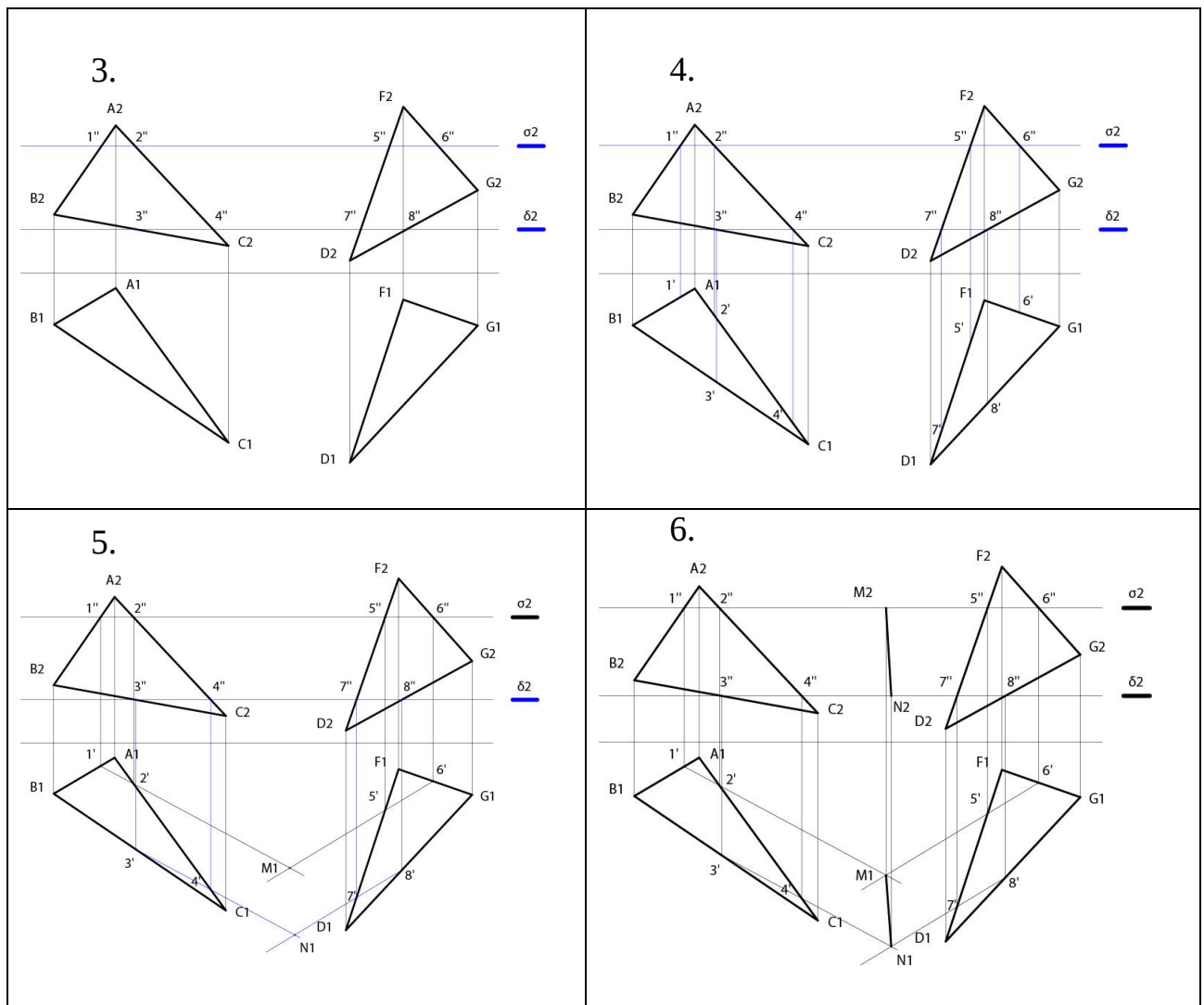


При условии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных плоскими фигурами (треугольниками), но визуально не накладывающимися друг на друга (таблица 4.3) применяется следующий алгоритм решения:

- провести вспомогательные плоскости частного положения, которые пересекают обе заданные плоскости;
- найти поочередно линии пересечения вспомогательных плоскостей с заданными плоскостями;
- на пересечении соответствующих проекций линий пересечения заданных и вспомогательных плоскостей находятся искомые точки пересечения.

Таблица 4.3 – Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных визуально не накладывающимися плоскими фигурами





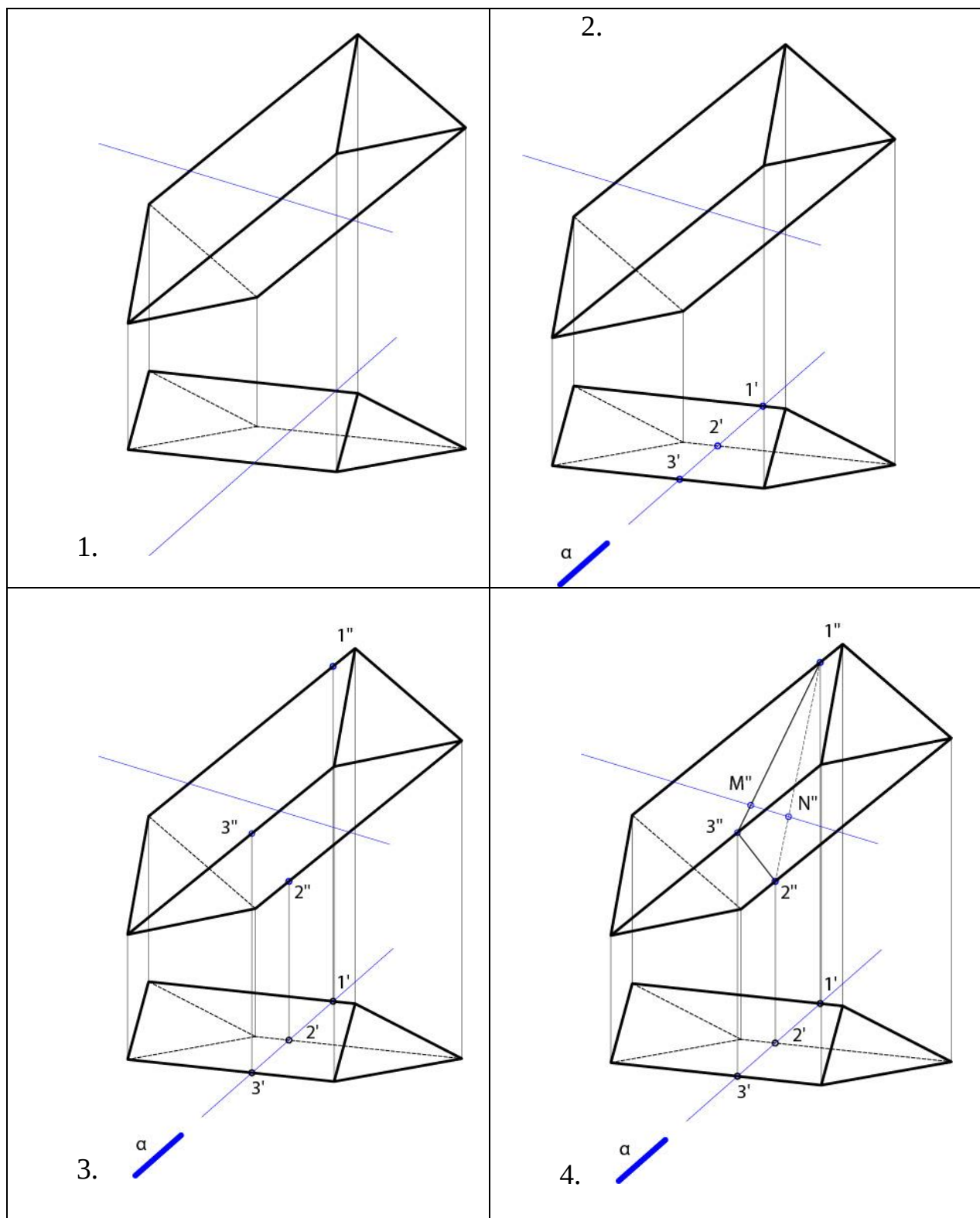
1.4.3. Пересечение прямой с поверхностью

Определение точек пересечения прямой линии с поверхностью на чертеже основывается на построении проекций линии плоского сечения, при пересечении с которым, в итоге, одной из проекций прямой определяются искомые точки. Алгоритм решения такого типа задач аналогичен алгоритму решения задач по определению точки пересечения прямой линии с плоскостью.

Алгоритм выполнения графических операций:

- через заданную прямую провести вспомогательную плоскость частного положения;
- определить линию пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью;
- точки пересечения полученной линии сечения с заданной прямой и будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью (такие точки иногда называют *точками входа и выхода*);
- определяется видимость заданных геометрических фигур.

Таблица 4.4 – Построение линии пересечения прямой общего положения и призмы общего положения



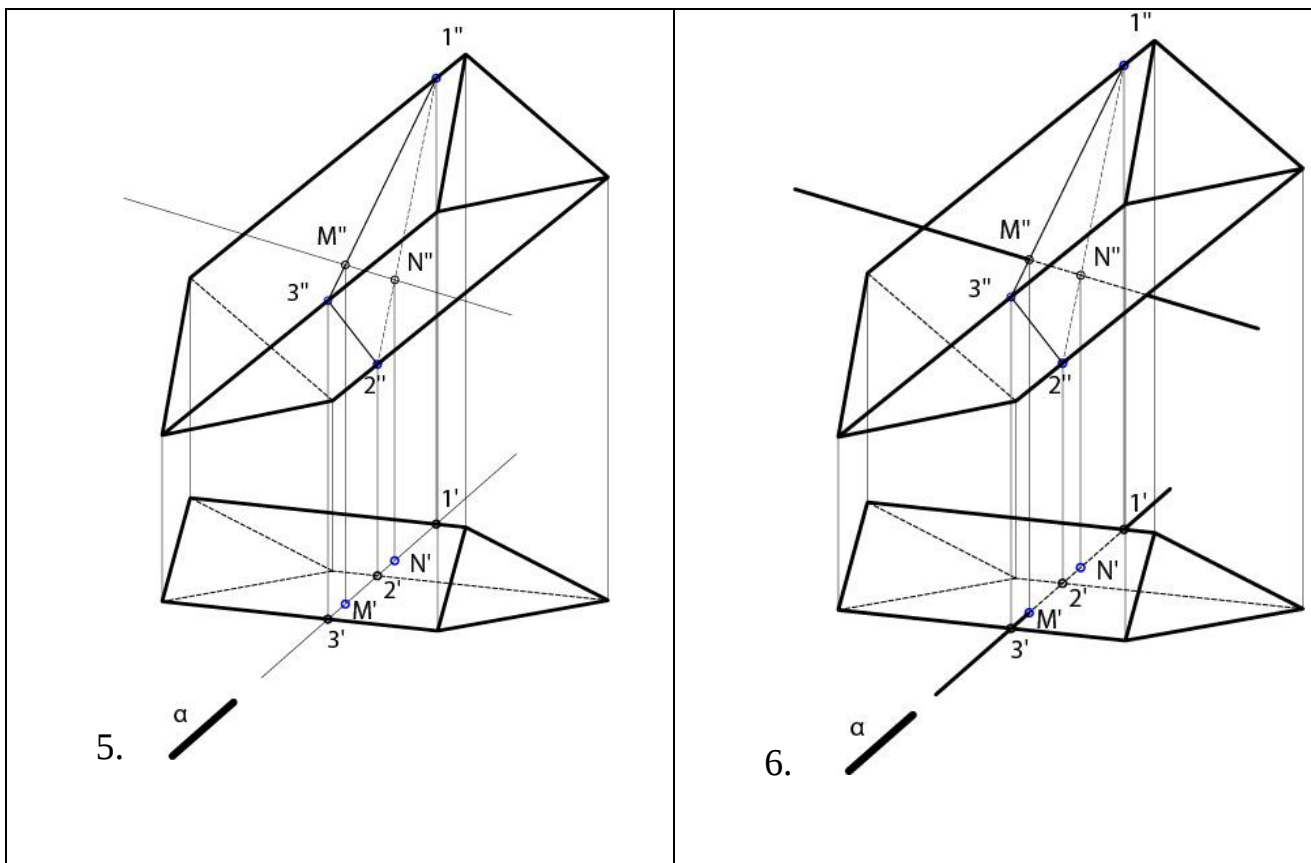
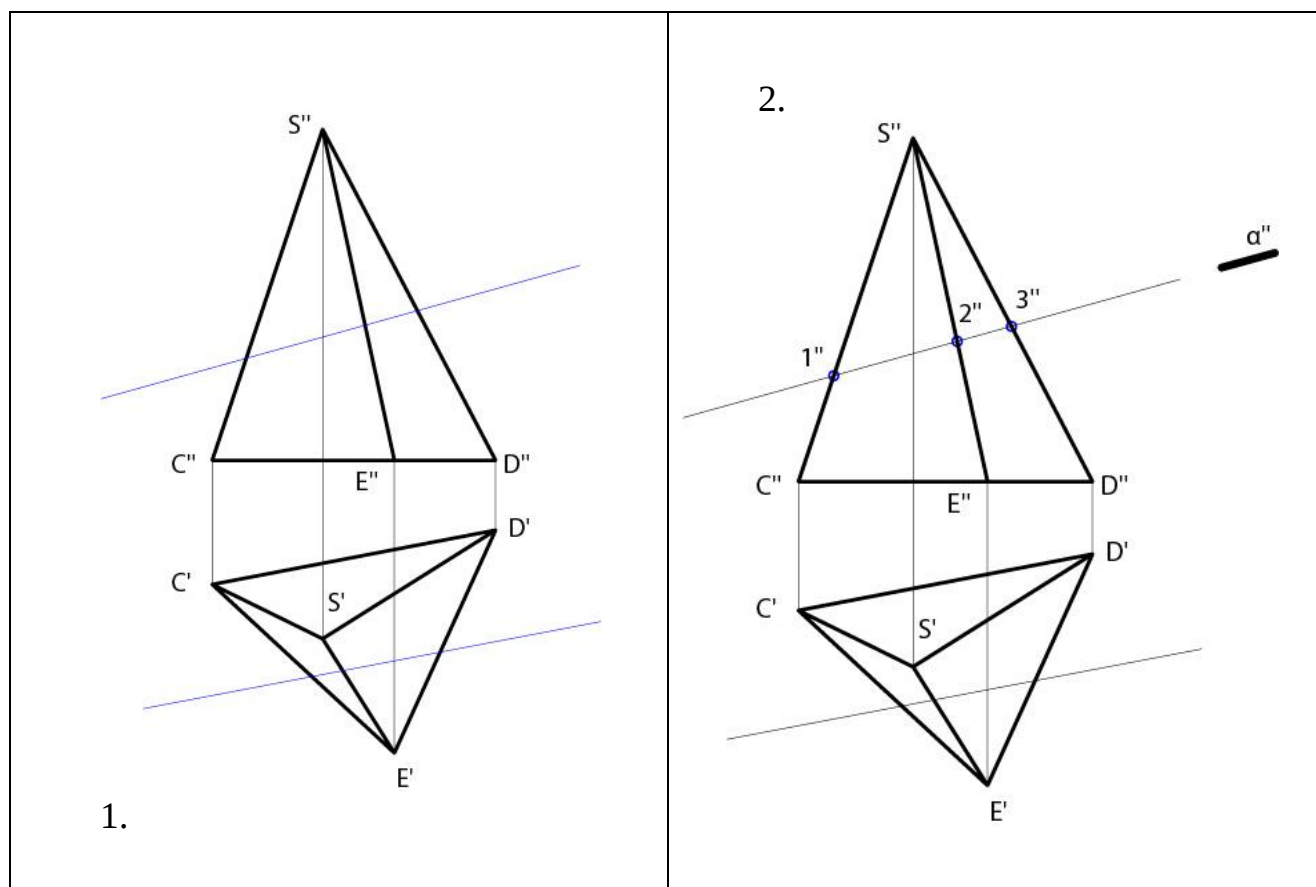
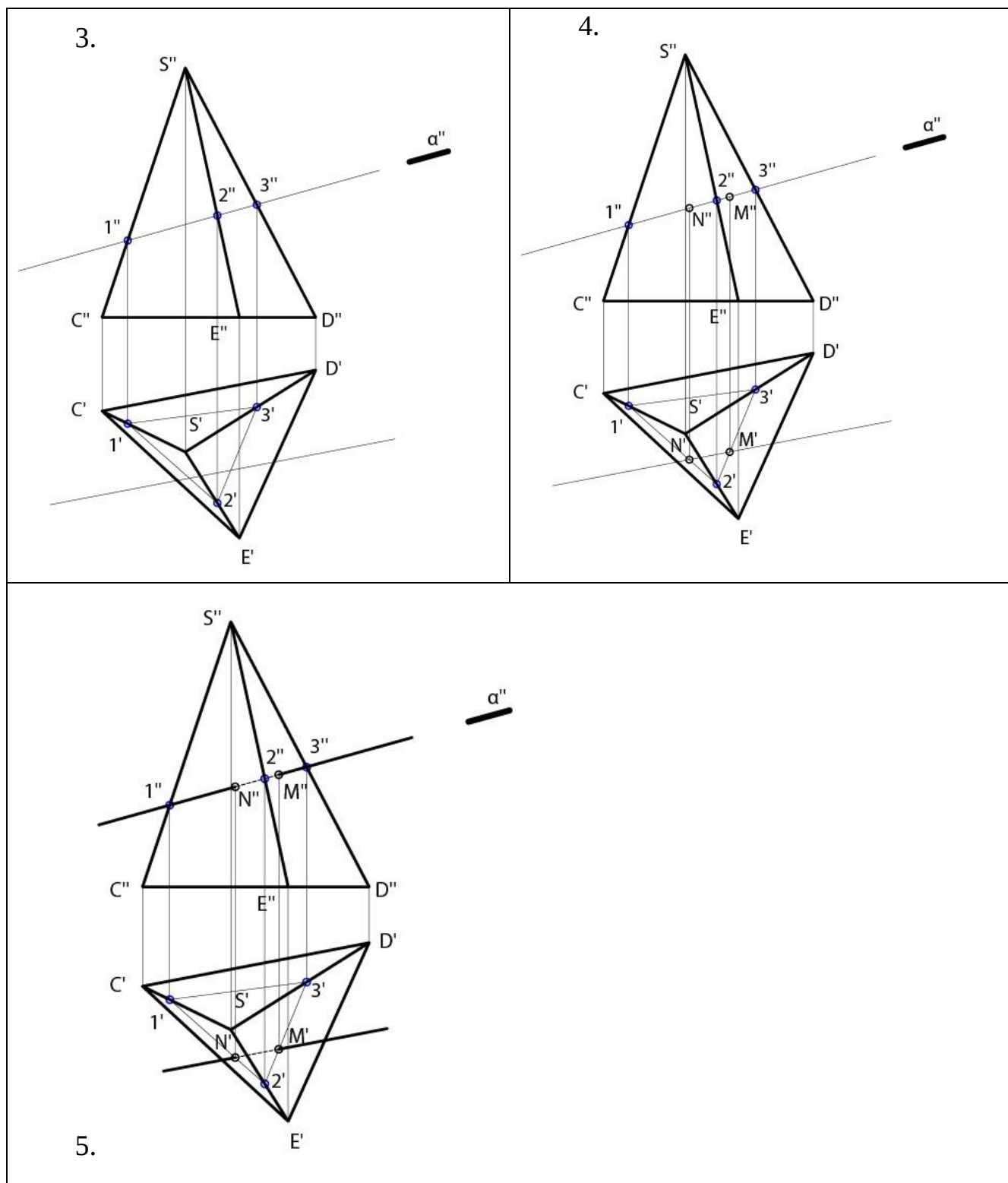


Таблица 4.5 – Построение линии пересечения прямой общего положения и поверхности пирамиды





Построение частных случаев пересечения прямой и поверхности с использованием свойства «собираемости»

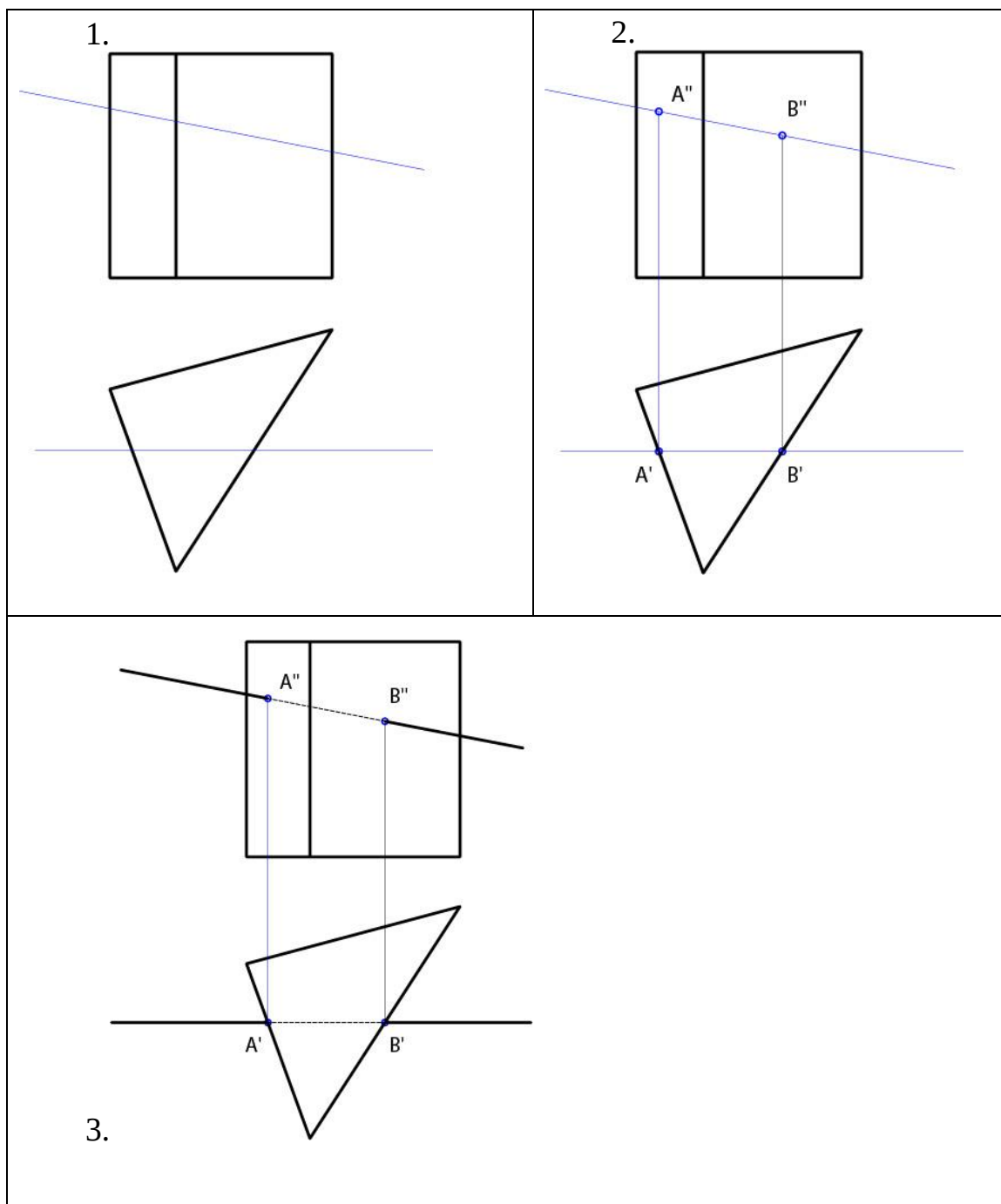
При условии пересечения фронтальной прямой уровня с поверхностью призмы, занимающей проецирующее положение, алгоритм построения следующий (таблица 4.6):

- так как поверхность призмы перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, а заданная прямая является прямой фронтального уровня, то на основании свойства «собираемости» горизонтальные

проекции точек, в которых прямая пересекает заданную поверхность, будут являться горизонтальными проекциями искомых точек пересечения прямой и поверхности;

- с помощью линий проекционной связи определяются фронтальные проекции точек пересечения прямой и поверхности;
- определяется видимость заданных геометрических фигур.

Таблица 4.6 – Построение линии пересечения прямой уровня с поверхностью призмы



Алгоритм построения пересечения прямой с линейчатыми поверхностями вращения (цилиндр (рисунок 4.3), конус) – аналогичен построению пересечения прямой с гранными поверхностями – соответственно, призма, пирамида, – за исключением оперирования криволинейными сечениями (окружность, эллипс).

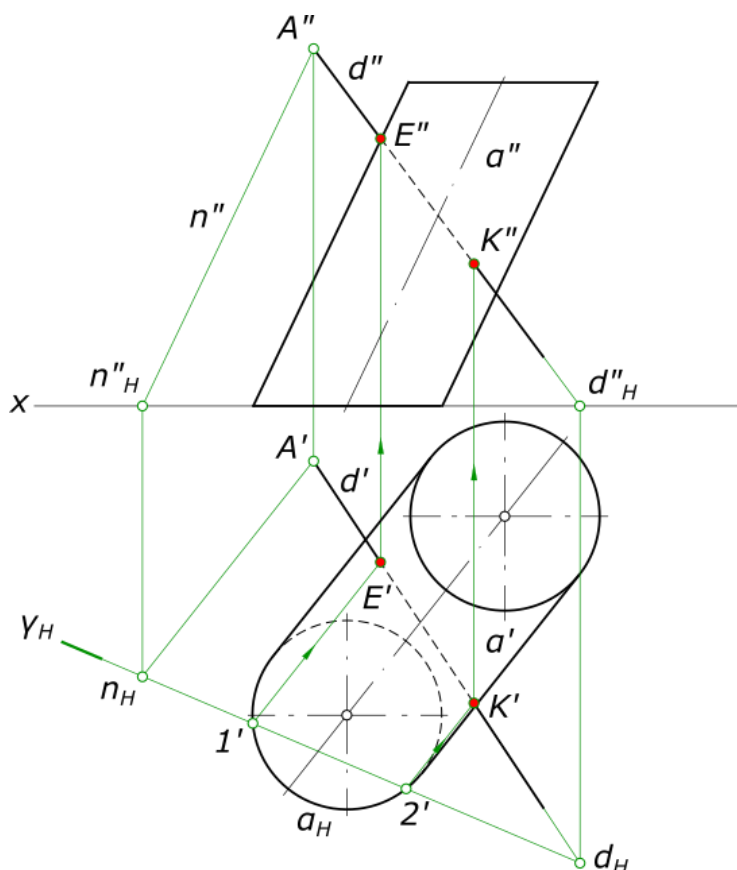


Рисунок 4.3 – Построение линии пересечения прямой общего положения с поверхностью цилиндра

Алгоритм построения пересечения прямой общего положения с поверхностью прямого кругового конуса (рисунок 4.4):

- заключить прямую d в вспомогательную плоскость γ , которая также проходит через вершину конуса S ;
- найти точки пересечения этой плоскости с основанием конуса, для чего необходимо построить горизонтальный след плоскости – γ_H по следам прямых n_H и m_H : $\gamma_H \cap a_H = A', B'$;
- соединить полученные точки с вершиной конуса прямыми линиями и найти линии пересечения этой плоскости с боковой поверхностью конуса $S'A', S'B'$, которые пересекаются с прямой d : $S'A' \cap d' = E' \Rightarrow E''$; $S'B' \cap d' = K' \Rightarrow K''$;
- определить видимость с помощью конкурирующих точек.

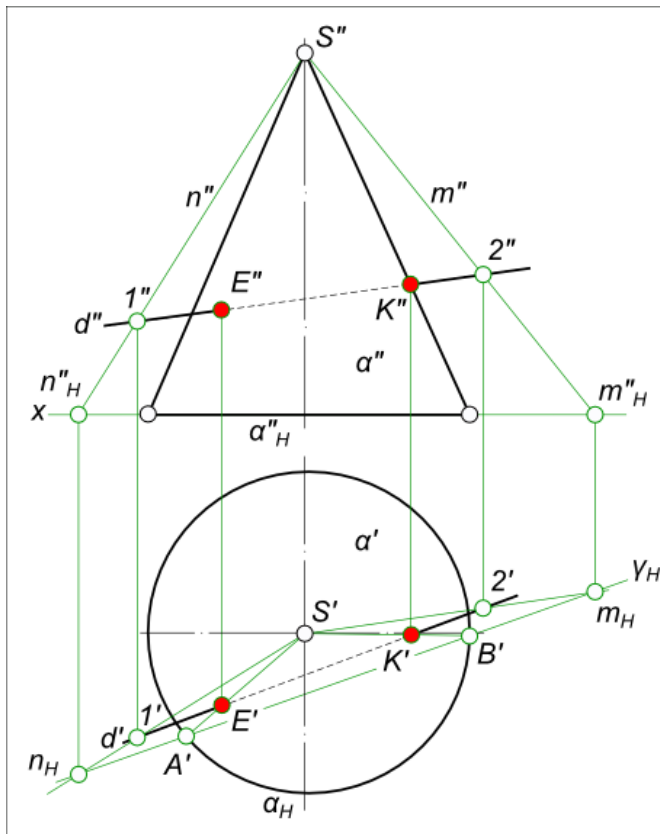


Рисунок 4.4 – Построение линии пересечения прямой общего положения с поверхностью конуса

Алгоритм построения пересечения прямой общего положения с поверхностью сферы (рисунок 4.5):

- заключить заданную прямую в горизонтально проецирующую плоскость;
- окружность сечения сферы этой плоскостью проецируется на фронтальную плоскость проекций в эллипс – во избежание построения эллипса, вспомогательную плоскость преобразовываем в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций;
- в новой системе плоскостей проекций заданная прямая занимает положение уровня;
- на новой плоскости проекций линия сечения поверхности сферы плоскостью спроецируется в окружность с центром в точке O_4 и радиусом R ;
- определить проекции точек пересечения заданной прямой и сечения сферы;
- обратным преобразованием определить горизонтальные и фронтальные проекции точек пересечения прямой и сферы;
- определить видимость заданных геометрических фигур.

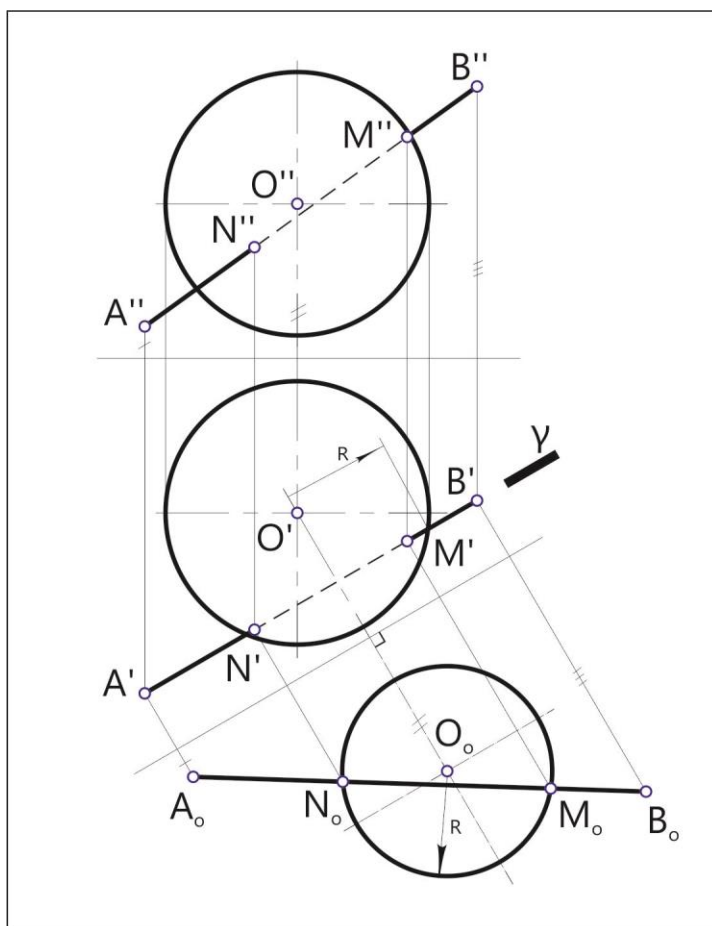


Рисунок 4.5 – Построение линии пересечения прямой общего положения с поверхностью сферы

1.4.4. Пересечение поверхности плоскостью

При пересечении поверхности плоскостью получается плоская замкнутая фигура, которую называют *сечением*.

Для того, чтобы построить линию пересечения любой поверхности плоскостью, необходимо найти ряд точек, принадлежащих как поверхности, так и плоскости, и затем соединить их линией (ломаной или кривой). Точки линии сечения подразделяются на *характерные* и *промежуточные*.

Характерными точками являются:

1. точки, принадлежащие участвующим в пересечении ребрам многогранника;

2. точки, в которых линия сечения пересекает линию видимого контура поверхности относительно той или иной плоскости проекций (проекция этих точек принадлежат очерковой линии соответствующей проекции поверхности и называются *очерковыми*). В этих точках проекция линии пересечения касается очерка проекции поверхности. Очерковые точки делят соответствующую им проекцию линии пересечения на видимую и невидимую части и называются *точками смены видимости*;

3. *высшая* и *низшая* точки, т.е. самая близкая и самая удаленная точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций.

Промежуточные точки – произвольные точки, принадлежащие линиям каркаса поверхности.

В зависимости от вида поверхности, а также расположения поверхности и секущей плоскости относительно плоскостей проекций применяются различные подходы к составлению алгоритма решения задач.

Линия пересечения многогранника плоскостью является плоской ломаной линией, вершины которой являются точками пересечения ребер, а стороны – линии пересечения граней многогранника плоскостью.

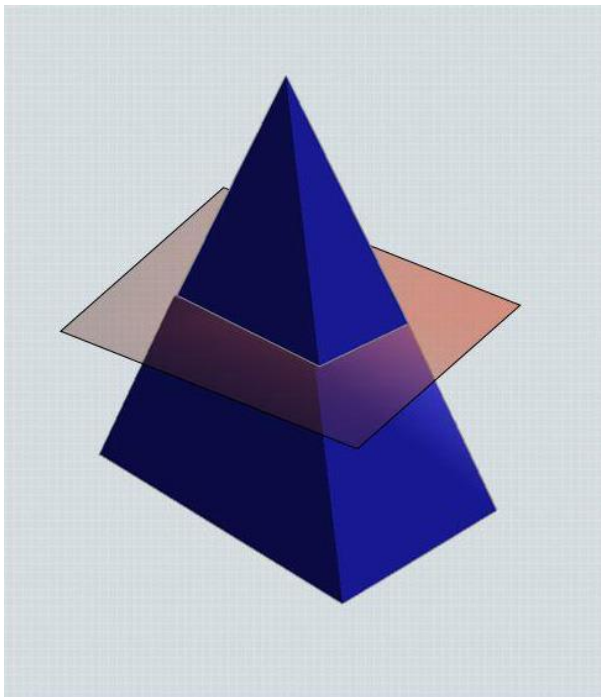


Рисунок 4.6 – Пересечение многогранника плоскостью

В представленном случае искомая линия может быть определена двумя частными способами, вытекающими из основного способа секущих плоскостей:

- построением линий пересечения граней многогранника плоскостью (**метод граней**);
- построением точек пересечения ребер многогранника плоскостью (**метод ребер**).

Можно выделить характерные случаи применения того или другого метода:

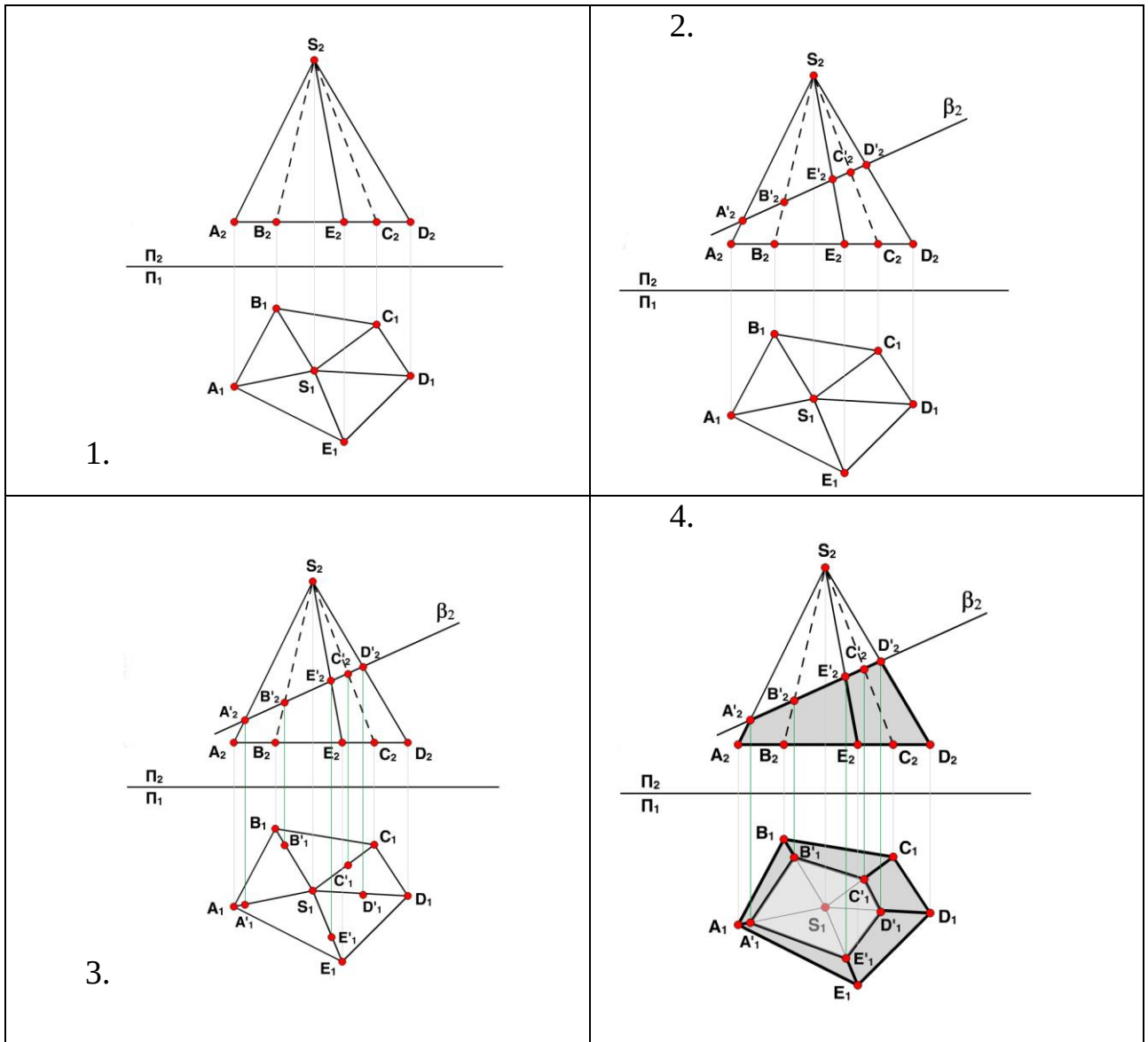
- Если гранная поверхность занимает частное положение относительно плоскостей проекций, а секущая плоскость – общее, то при составлении алгоритма решения могут применяться как метод ребер, так и метод граней.
- В случае, когда и поверхность, и секущая плоскость занимают общее положение, применяется метод ребер.
- Если секущая плоскость занимает частное положение, то используется метод ребер, однако, алгоритм решения задачи в этом случае будет иметь частный характер, т.к. будет использоваться свойство

«собирательности» плоскости частного положения на соответствующей плоскости проекций.

Алгоритм сечения пирамиды фронтально проецирующей плоскостью:

1. отметить точки пересечения плоскости с ребрами пирамиды;
2. провести линии проекционной связи вниз для построения из горизонтальных проекций;
3. отметить точки пересечения линий проекционной связи с горизонтальными проекциями ребер пирамиды и соединить их.

Таблица 4.7 – Пересечение пирамиды фронтально проецирующей плоскостью



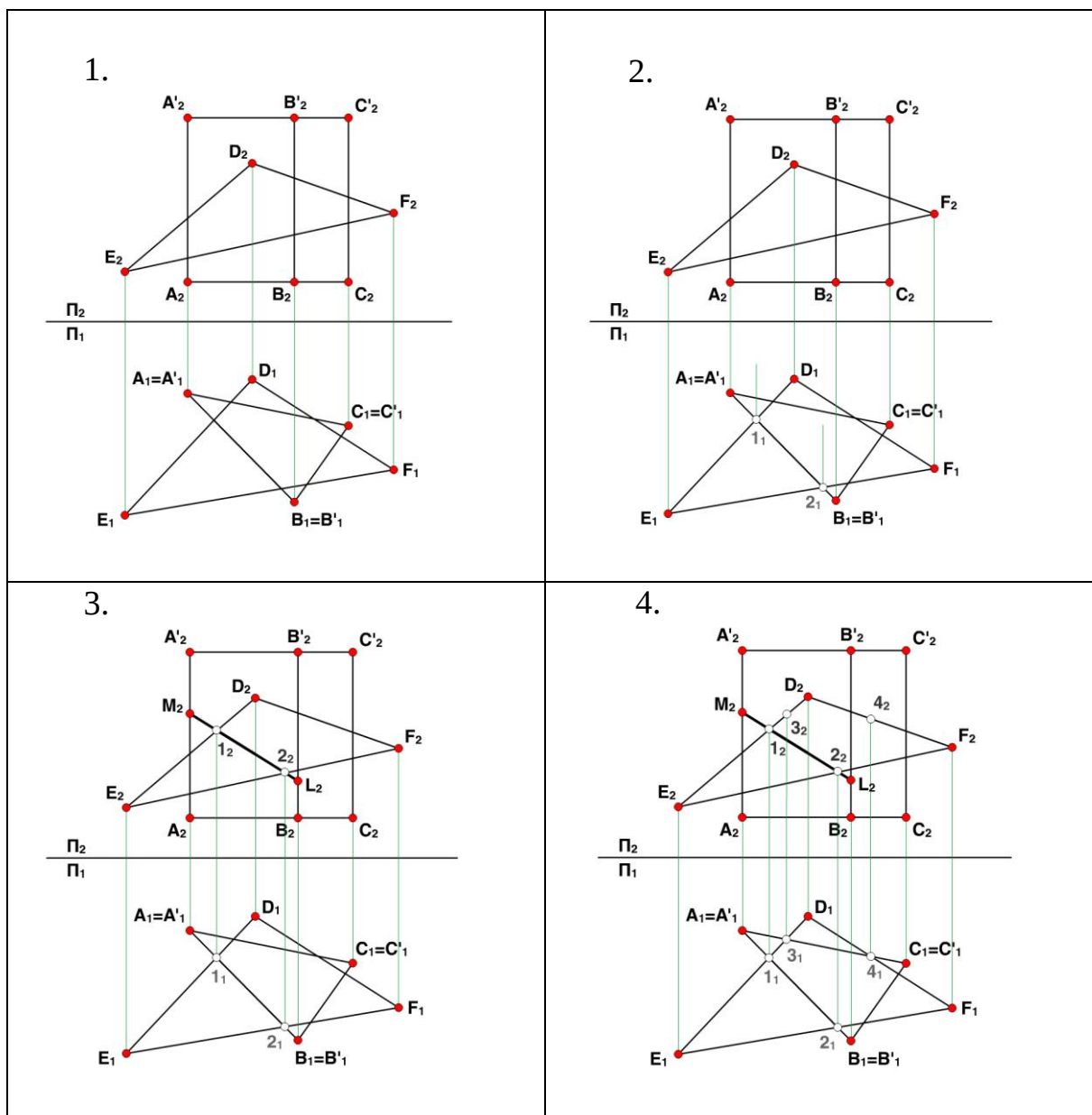
Алгоритм построения взаимного пересечения прямой призмы и плоскости общего положения:

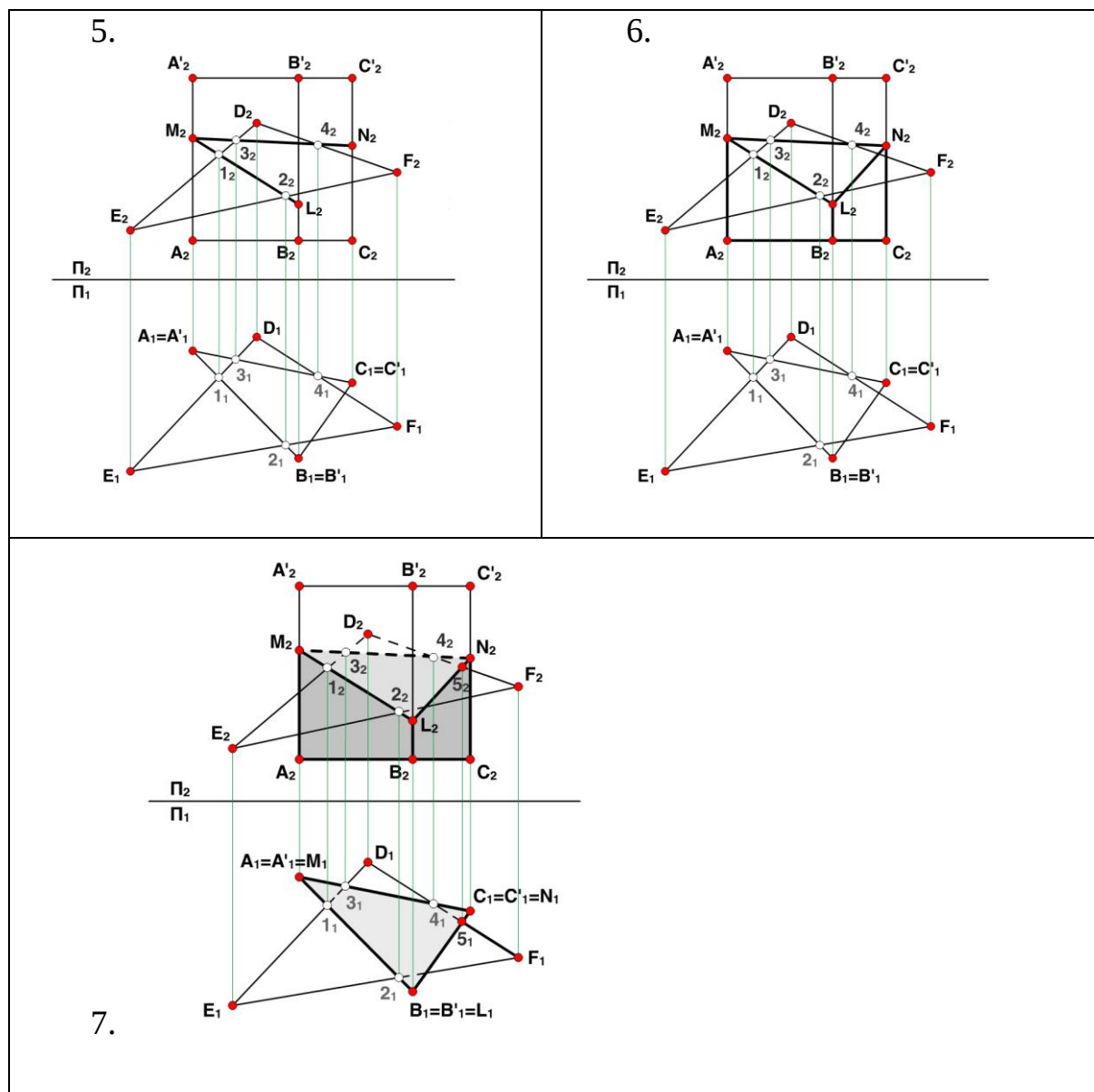
1. на горизонтальной проекции отметить характерные точки;
2. провести линии проекционной связи вверх для построения фронтальных проекций соответствующих точек;
3. соединить фронтальные проекции полученных точек и провести прямые до пересечения с проекциями ребер призмы;

4. соединить точки пересечения линий с ребрами призмы – полученный треугольник – проекция сечения призмы плоскостью общего положения;

5. определить видимость секущей плоскости и сечения с помощью метода конкурирующих точек.

Таблица 4.8 – Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения

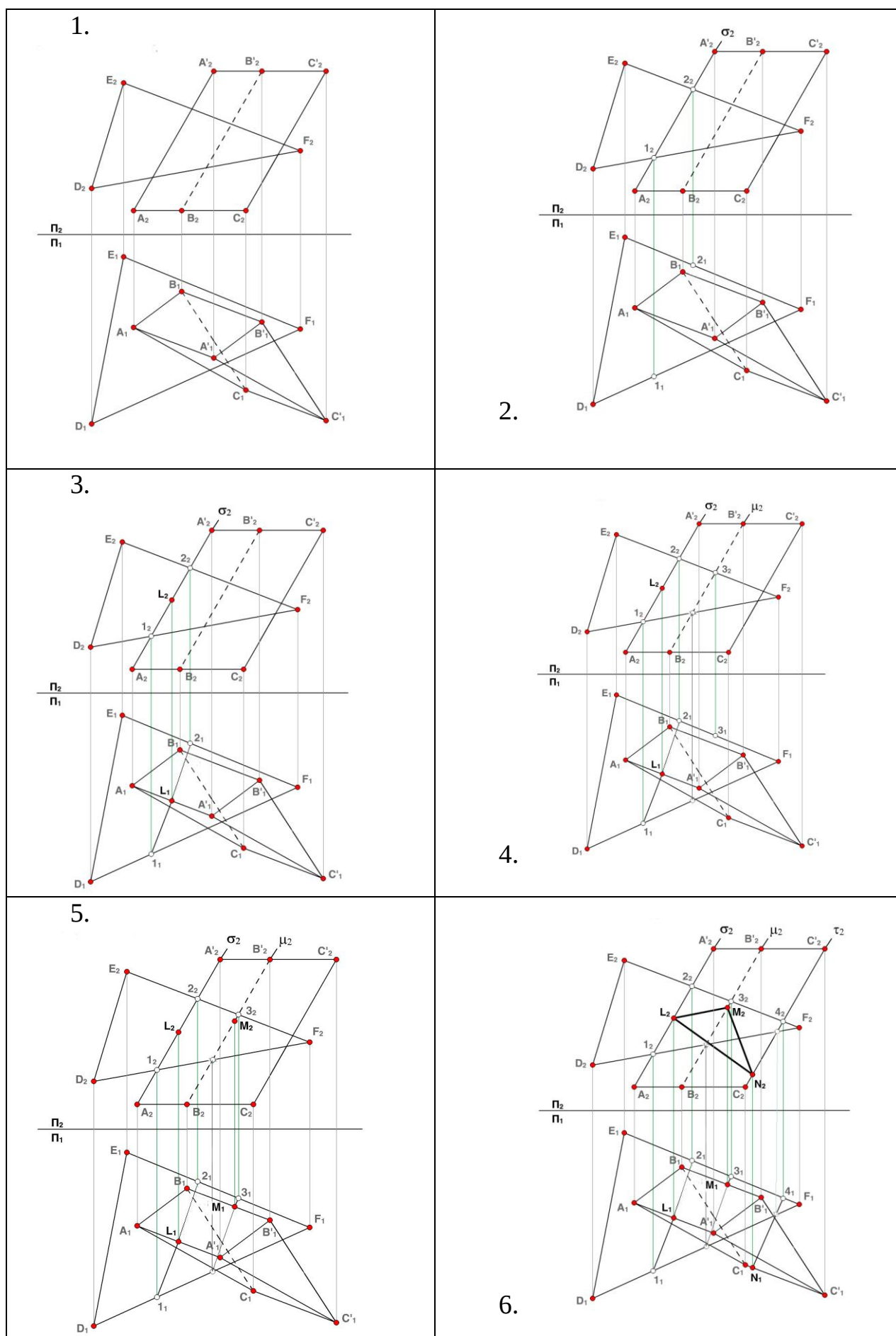


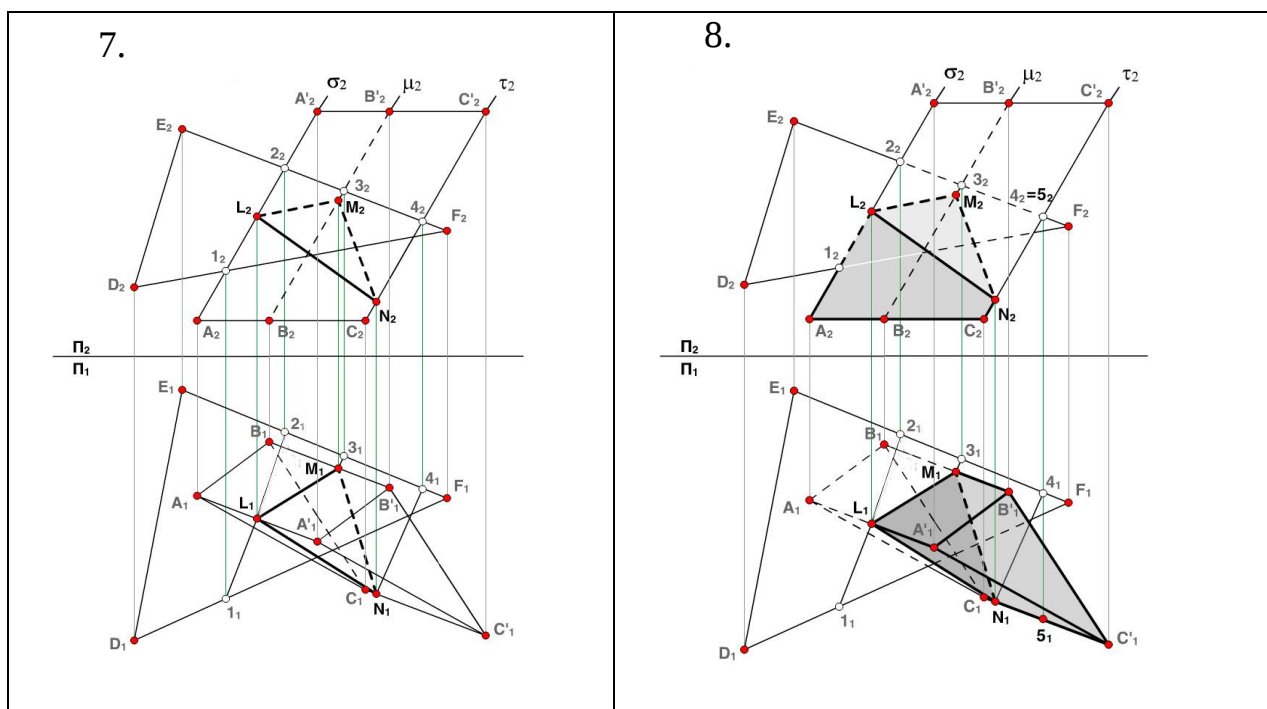


Алгоритм построения взаимного пересечения наклонной призмы и плоскости общего положения:

1. заключить наклонные ребра призмы во вспомогательные проецирующие плоскости;
2. отметить точки пересечения вспомогательной и заданной;
3. найти соответствующие горизонтальные проекции полученных точек;
4. найти и соединить точки пересечения ребер призмы и линий, соединяющих горизонтальные проекции вспомогательных точек;
5. построить фронтальные проекции полученных точек и соединить их;
6. определить видимость ребер призмы, секущей плоскости и сечения с помощью метода конкурирующих точек.

Таблица 4.9 – Пересечение наклонной призмы плоскостью общего положения





Линия пресечения криволинейной поверхности плоскостью представляет собой плоскую кривую. При решении такого типа задач необходимо в исходный чертеж поверхности вписать многогранник. В этом случае задача сводится к определению точек пересечения прямолинейных образующих каркаса поверхности плоскостью.

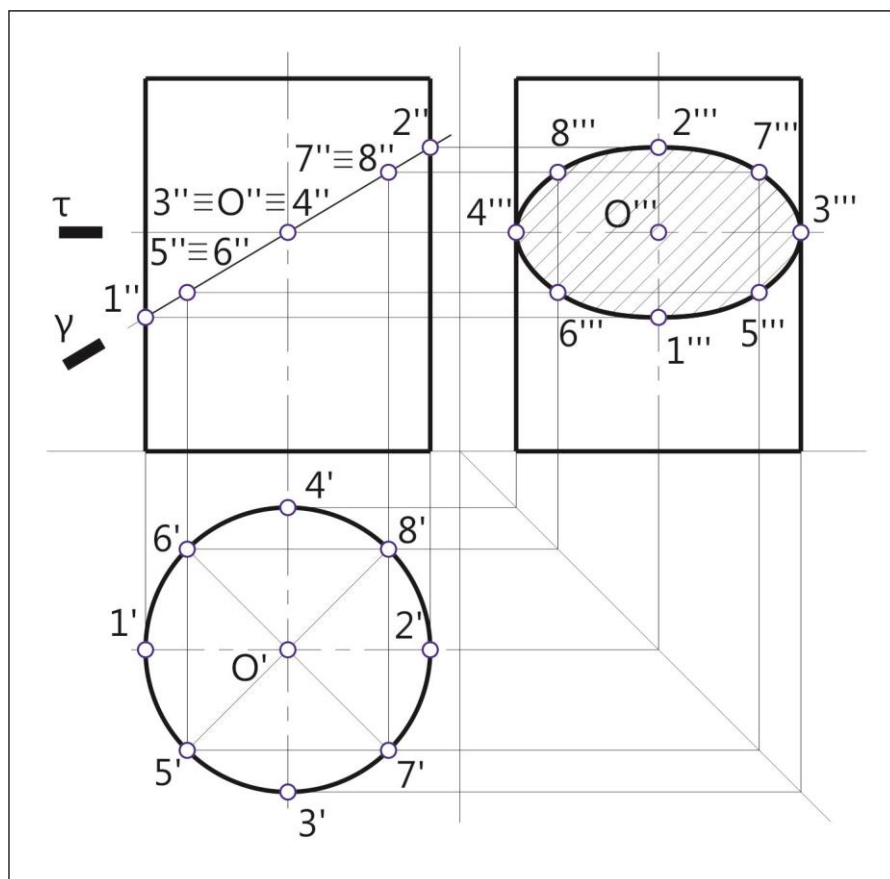
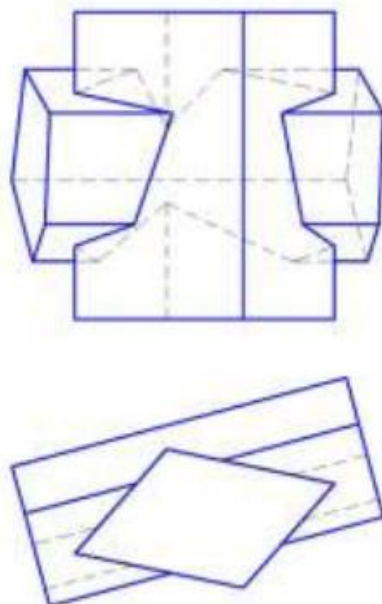
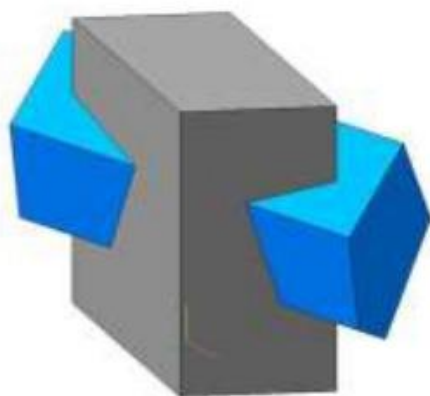


Рисунок 4.7 – Пересечение цилиндра плоскостью

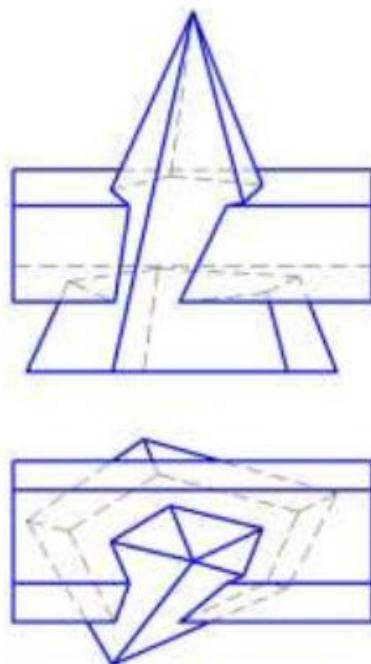
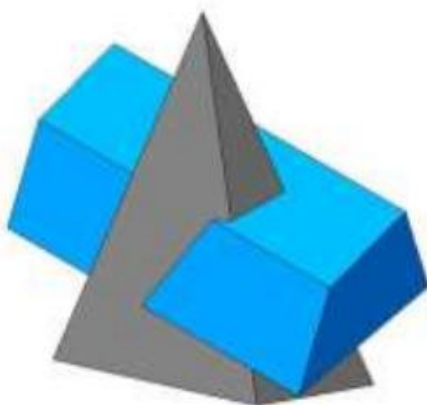
1.4.5. Комбинированные тела

Комбинированным называют геометрическое тело, составленное из совокупности простых тел: призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и др. Комбинированное тело может быть образовано как путем сложения простых тел, так и путем их вычитания (вырезания или отсечения).

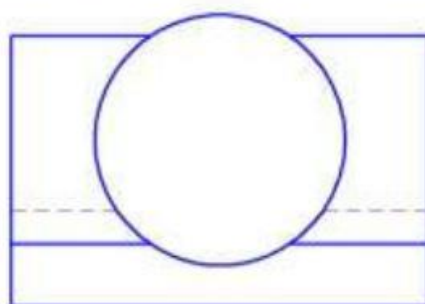
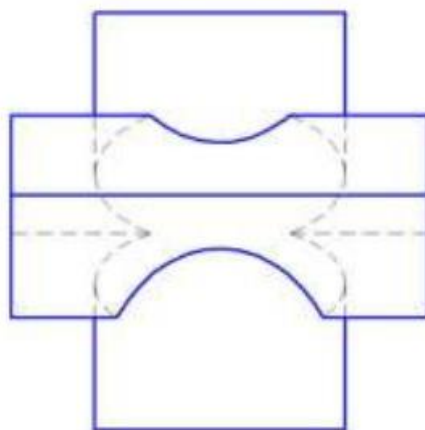
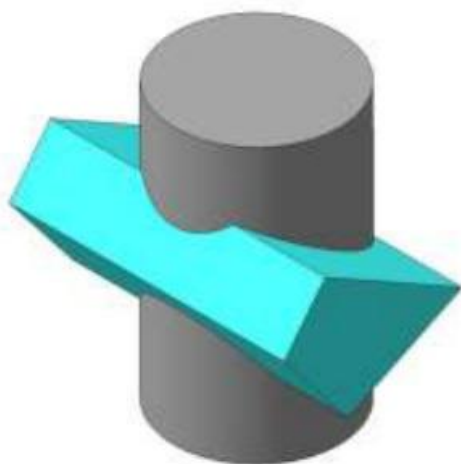
Таблица 4.10 – Комбинированные тела и их проекции



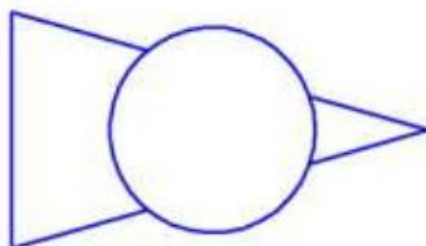
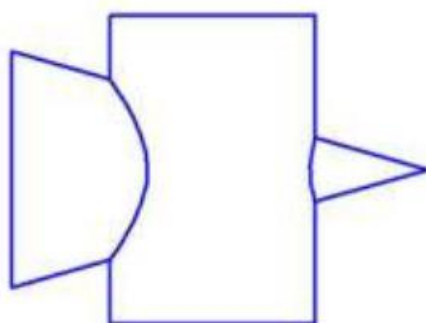
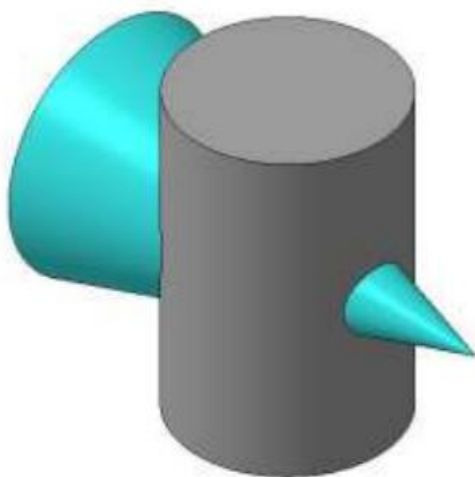
Пересечение призм



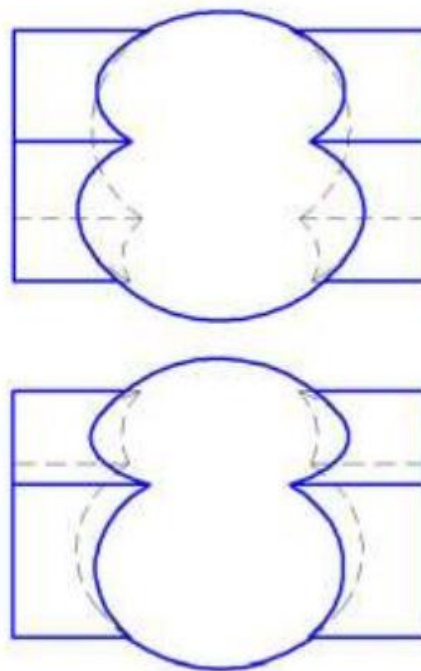
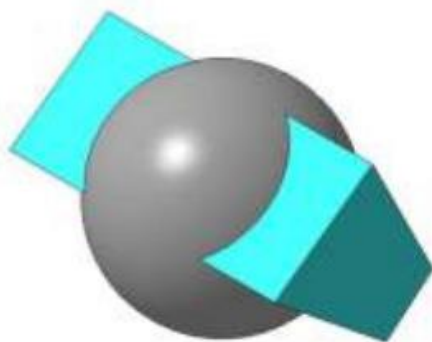
Пересечение призмы и пирамиды



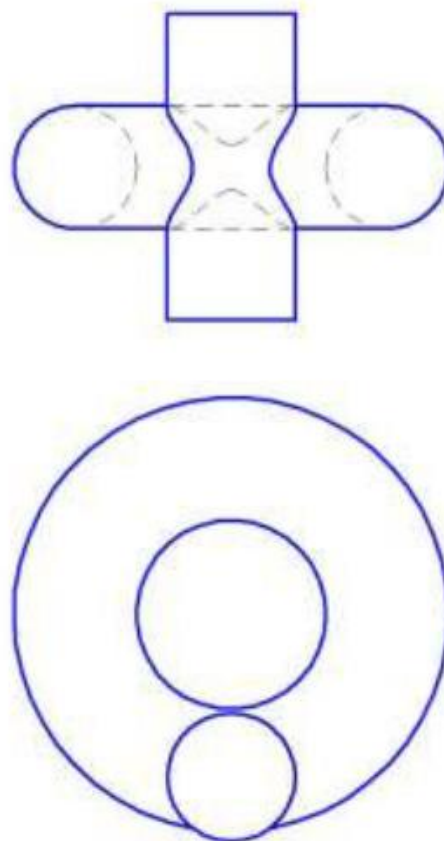
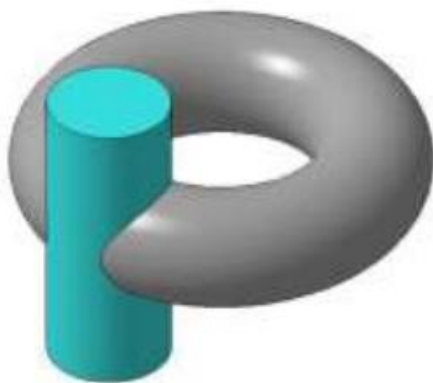
Пересечение призмы и цилиндра



Пересечение конуса и цилиндра



Пересечение призмы и шара



Пересечение тора и цилиндра

В основе построения комбинированных тел – нахождение взаимного пересечения поверхностей (рисунок 4.8). Для построения линии

пересечения двух поверхностей чаще всего используют два основных метода:

- метод вспомогательных секущих плоскостей-посредников частного положения;
- метод концентрических сфер-посредников.

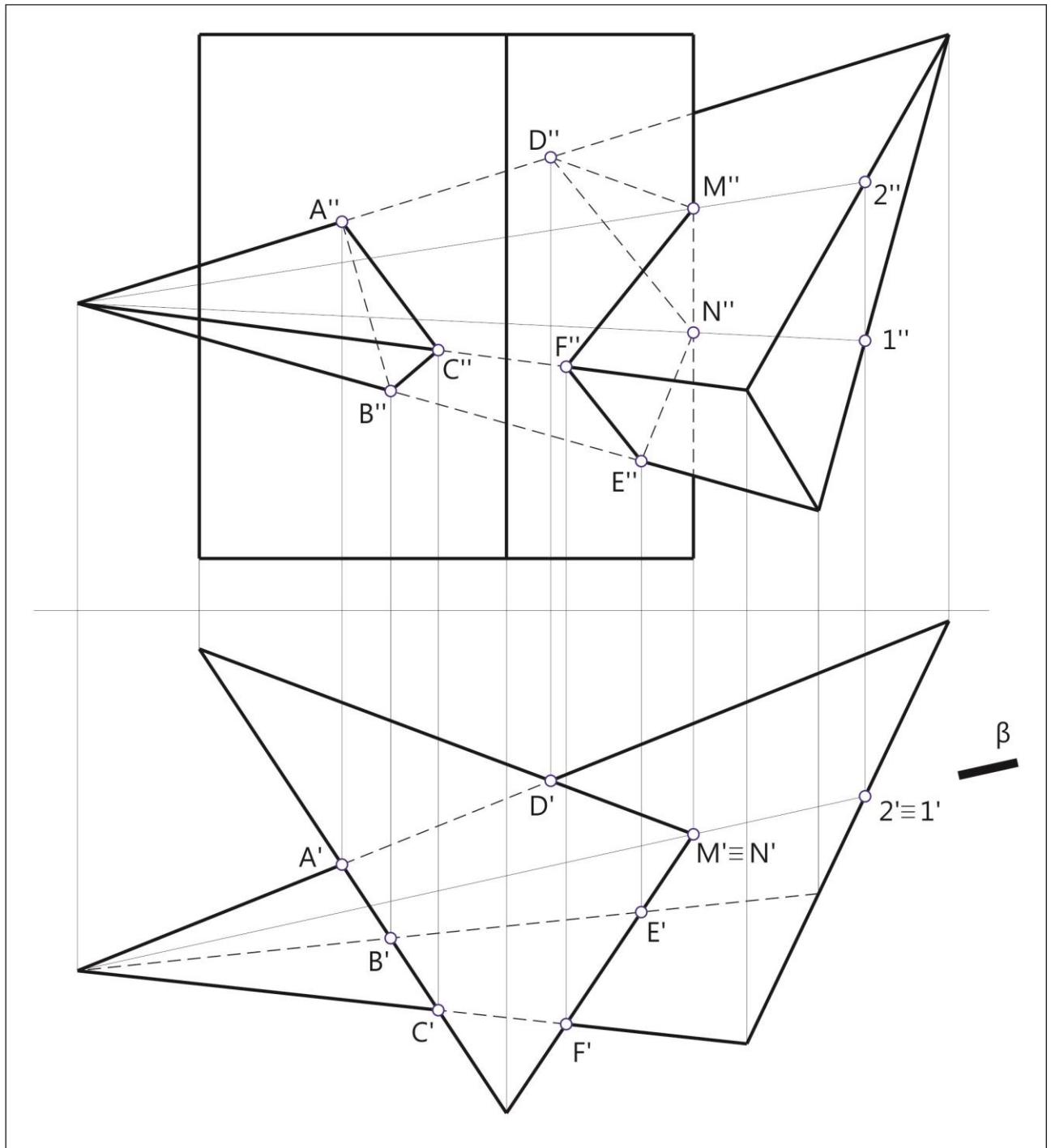


Рисунок 4.8 – Взаимное пересечение гранных поверхностей

Общий методический подход применения секущих плоскостей-посредников либо концентрических сфер-посредников заключается в следующем:

1. заданные две поверхности пересекаются третьим посредником – плоскостью частного положения либо сферой;
2. определяются поэтапно две линии пересечения плоскости-посредника либо сферы-посредника с каждой из заданных поверхностей;
3. две полученные линии пересечения, принадлежащие третьему посреднику (плоскости), пересекаясь, определяют точки, принадлежащие искомой линии пересечения двух поверхностей.

Концентрические сферы-посредники применяются в том случае, когда пересекающиеся соосные (с общей осью) поверхности вращения пересекаются по окружностям-параллелям.

При применении метода плоскостей-посредников частного положения последние следует выбирать так, чтобы они пересекали заданные поверхности по наиболее простым для графического построения линиям – прямым либо окружностям.

1.4.6. Теорема Монжа

Теорема Монжа фиксирует частный случай пересечения поверхностей вращения.

Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (рисунок 4.9).

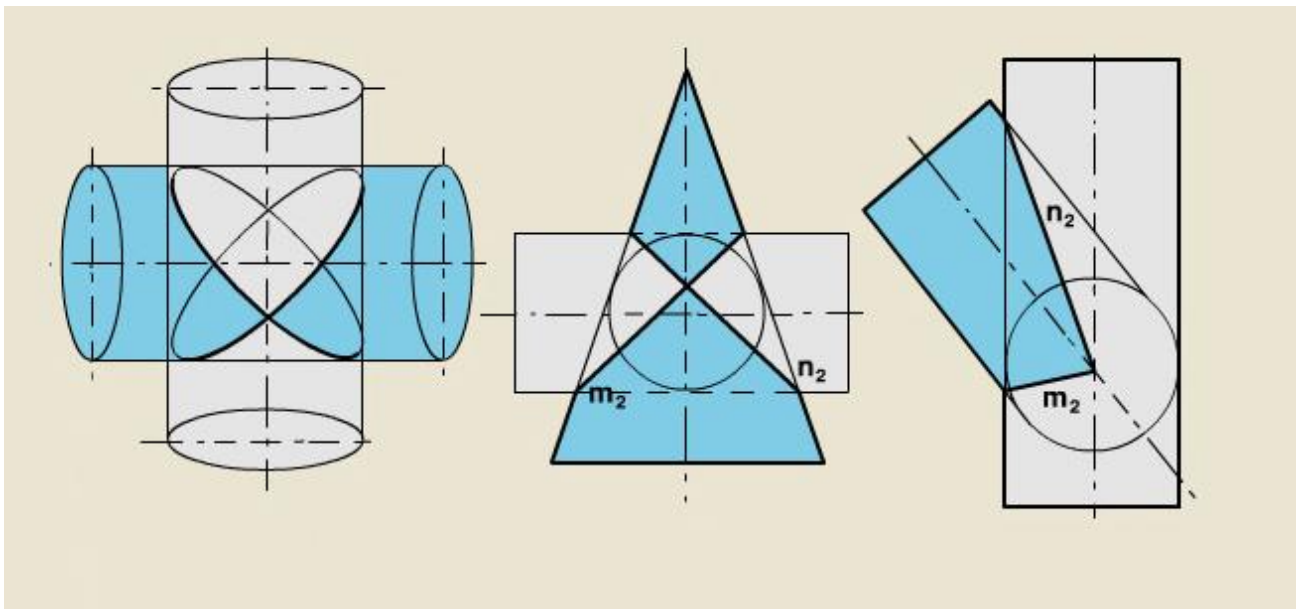


Рисунок 4.9 – Частный случай пересечения поверхностей вращения

1.5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

1.5.1. Позиционные и метрические задачи

Группу *позиционных задач* составляют:

1. задачи на взаимный порядок геометрических объектов (задание точки, линии, плоскости или поверхности; расположение геометрических образов относительно плоскостей проекций);
2. задачи на взаимную принадлежность геометрических объектов;
3. задачи на взаимное пересечение геометрических объектов.

Задачи, в условиях или в процессе решения которых присутствуют численные характеристики, называются *метрическими*.

К метрическим задачам относятся:

1. задачи на определение расстояний, углов, площадей и др.;
2. задачи на перпендикулярность прямой линии и плоскости;
3. задачи по определению проекций расстояний между двумя точками (или на определение натуральной величины отрезка прямой).

Для решения позиционных и метрических задач широко используют методы преобразования комплексного чертежа.

Чаще всего геометрические объекты расположены относительно плоскостей проекций в общем положении, и при решении задач для достижения поставленной цели необходимо выполнять много построений. Количество построений можно значительно сократить, если геометрические элементы будут расположены в частном положении относительно плоскостей проекций.

Существуют два основных способа преобразования чертежа, при которых:

1. объект остается неподвижным, при этом меняется аппарат проецирования;
2. условия проецирования не меняются, но изменяется положение объекта в пространстве.

К первому способу относится способ замены плоскостей проекций. Ко второму – способ вращения (вращение вокруг проецирующей прямой).

1.5.2. Преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций

Преобразование чертежа способом замены плоскостей проекций заключается в том, что заданный объект остается неподвижным в пространстве, а одна из основных плоскостей заменяется новой дополнительной плоскостью, расположенной параллельно или перпендикулярно заданной геометрической фигуре.

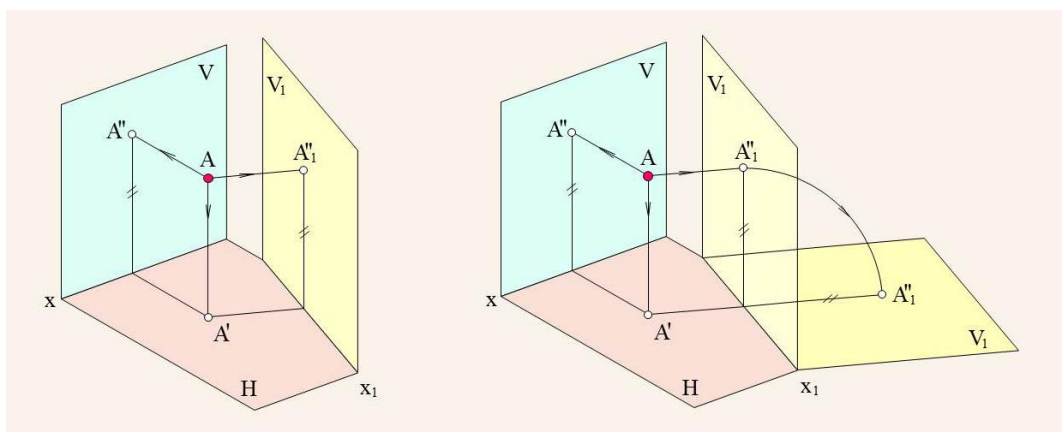


Рисунок 5.1 – Наглядное изображение способа замены плоскостей проекций

Решение четырех основных задач способом замены плоскостей проекций

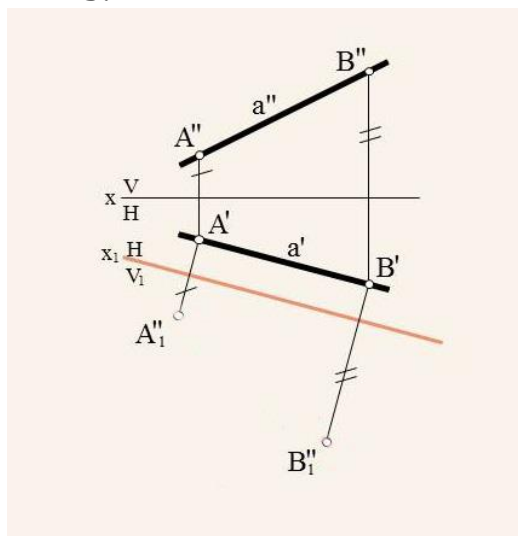
Задача 1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций (таблица 5.1).

Решение этой задачи позволяет найти натуральную величину отрезка. Новую проекцию прямой, отвечающую поставленной задаче, можно построить на новой плоскости проекций, расположив ее параллельно одной из исходных проекций прямой и перпендикулярно исходной плоскости проекций.

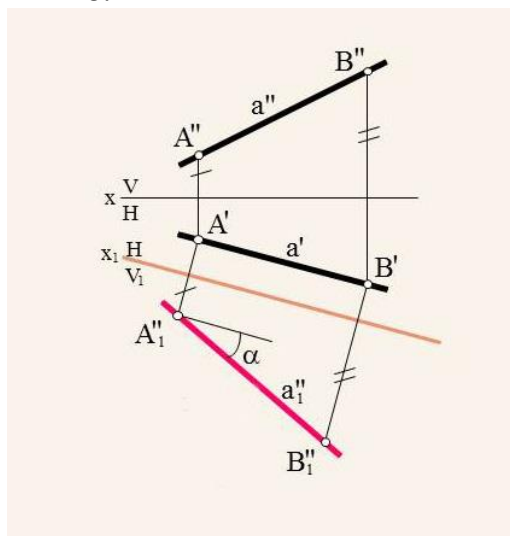
Таблица 5.1 – Пошаговое решение задачи 1 на преобразование чертежа

1.	2.
3.	4.

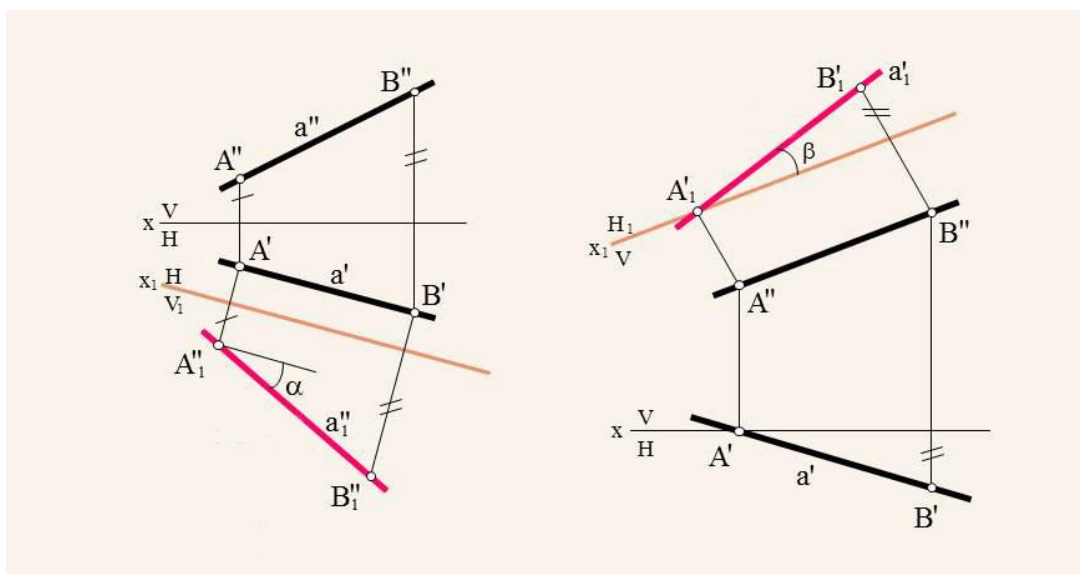
5.



6.



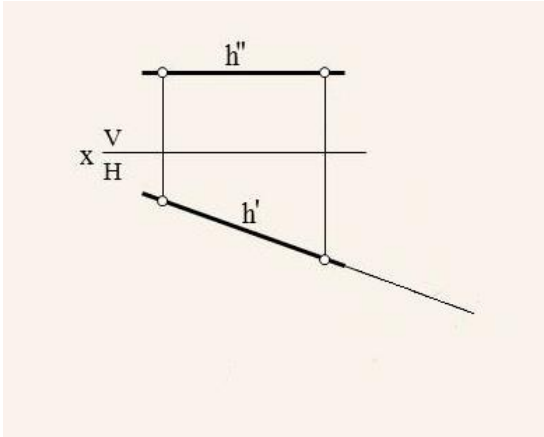
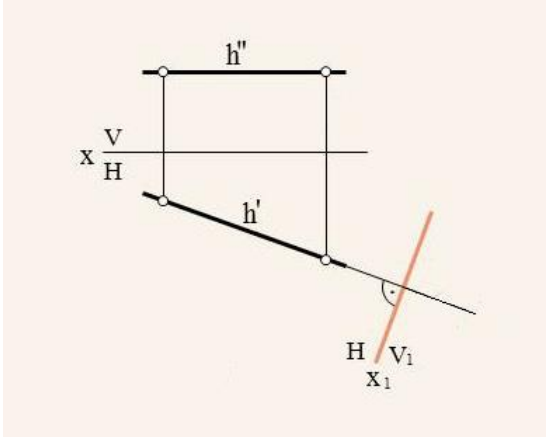
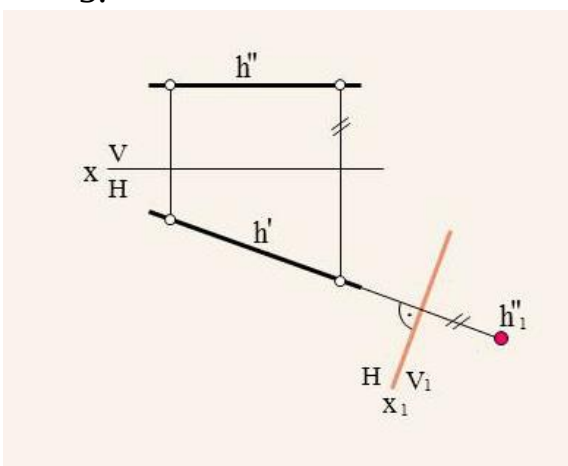
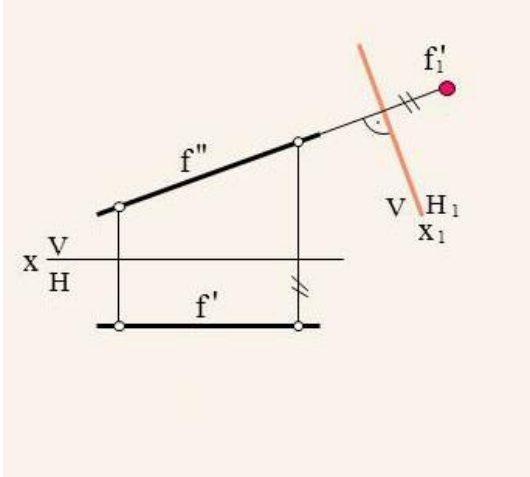
7.



Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая уровня оказалась перпендикулярной одной из плоскостей проекций (таблица 5.2).

Новую плоскость проекций необходимо расположить перпендикулярно заданной проекции прямой (проекции в натуральную величину).

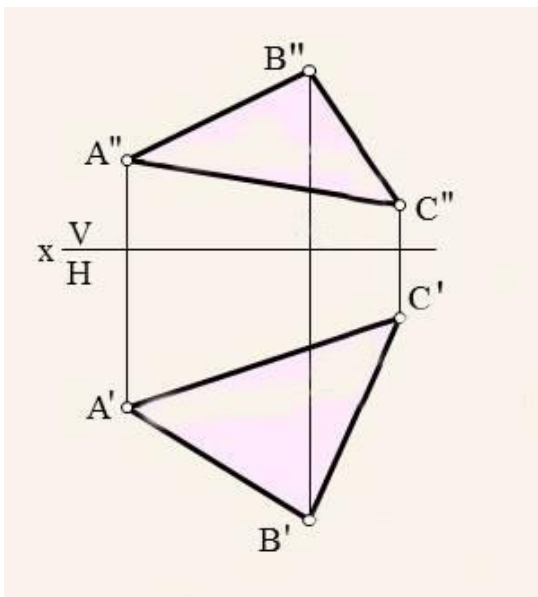
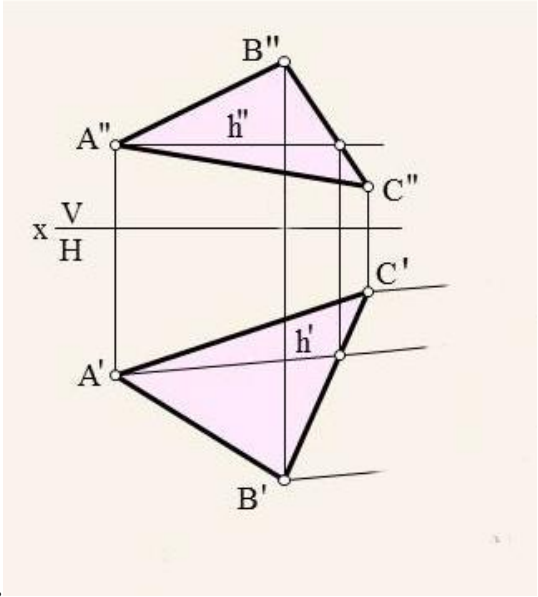
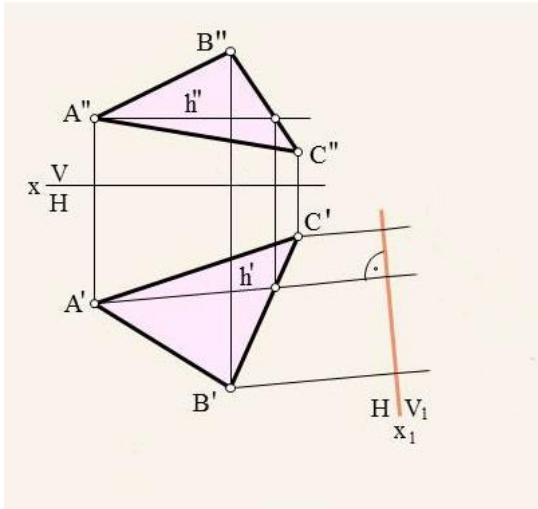
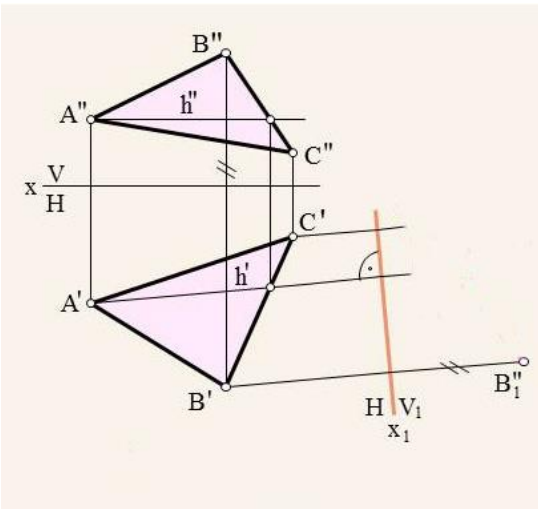
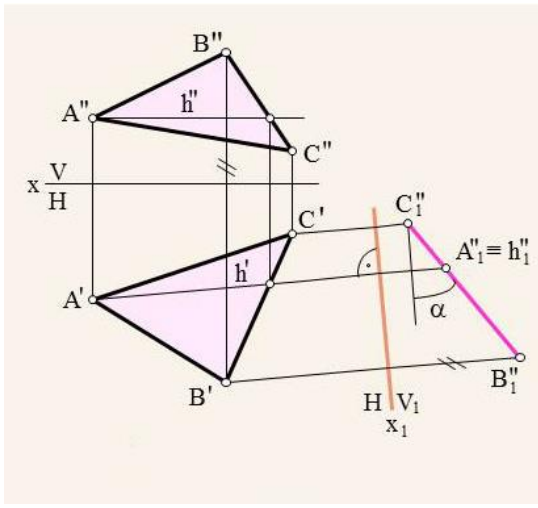
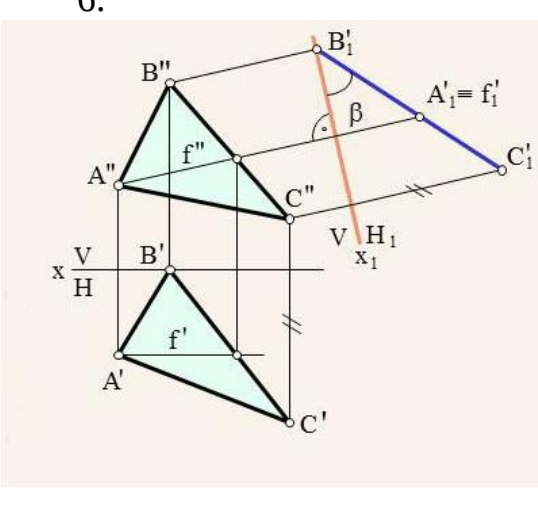
Таблица 5.2 – Пошаговое решение задачи 2 на преобразование чертежа

1. 	2. 
3. 	4. 

Задача 3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей (таблица 5.3).

Для решения этой задачи необходимо провести одну из главных линий плоскости (в данном случае – горизонталь). Новую плоскость проекций необходимо ввести перпендикулярно главной линии плоскости.

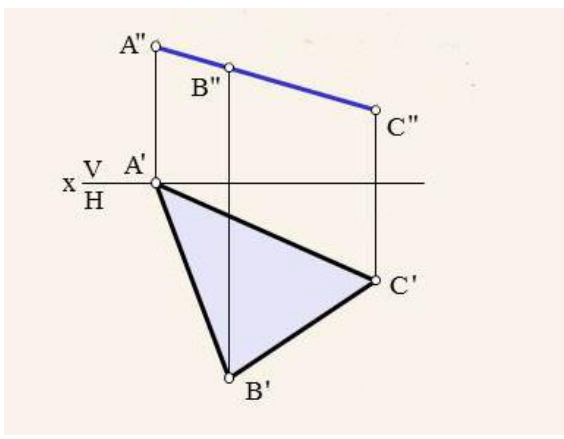
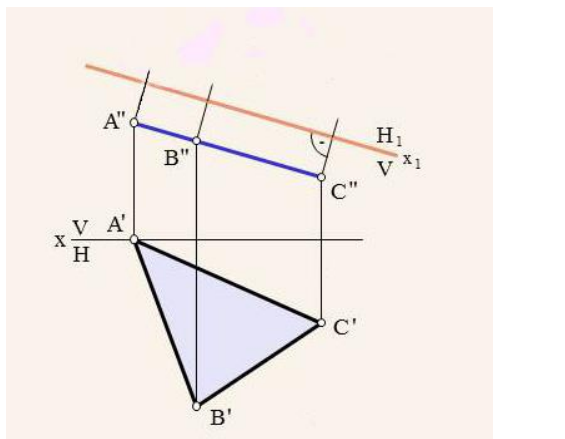
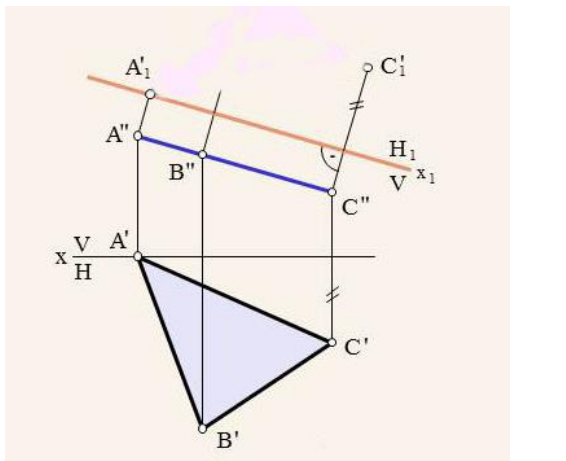
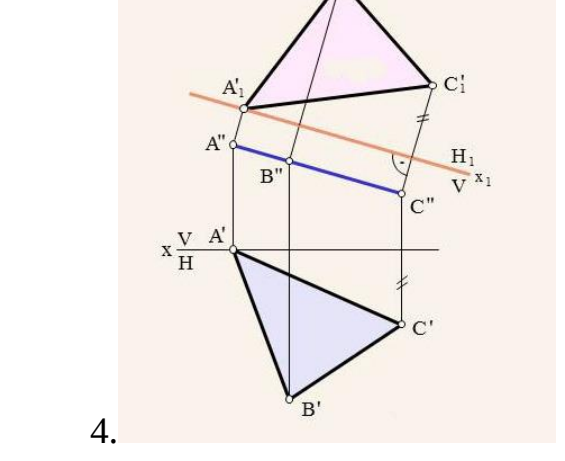
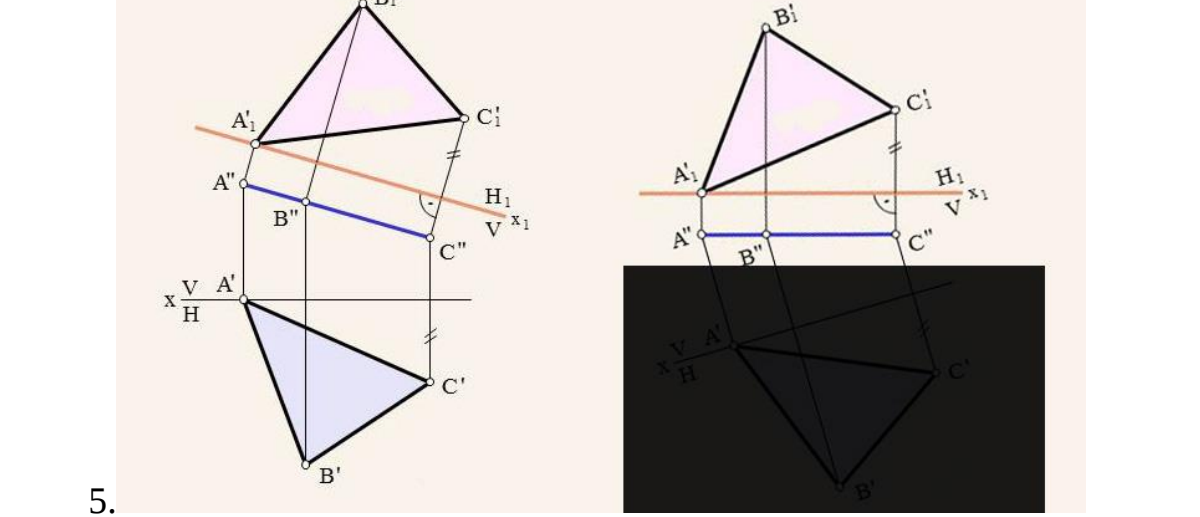
Таблица 5.3 – Пошаговое решение задачи 3 на преобразование чертежа

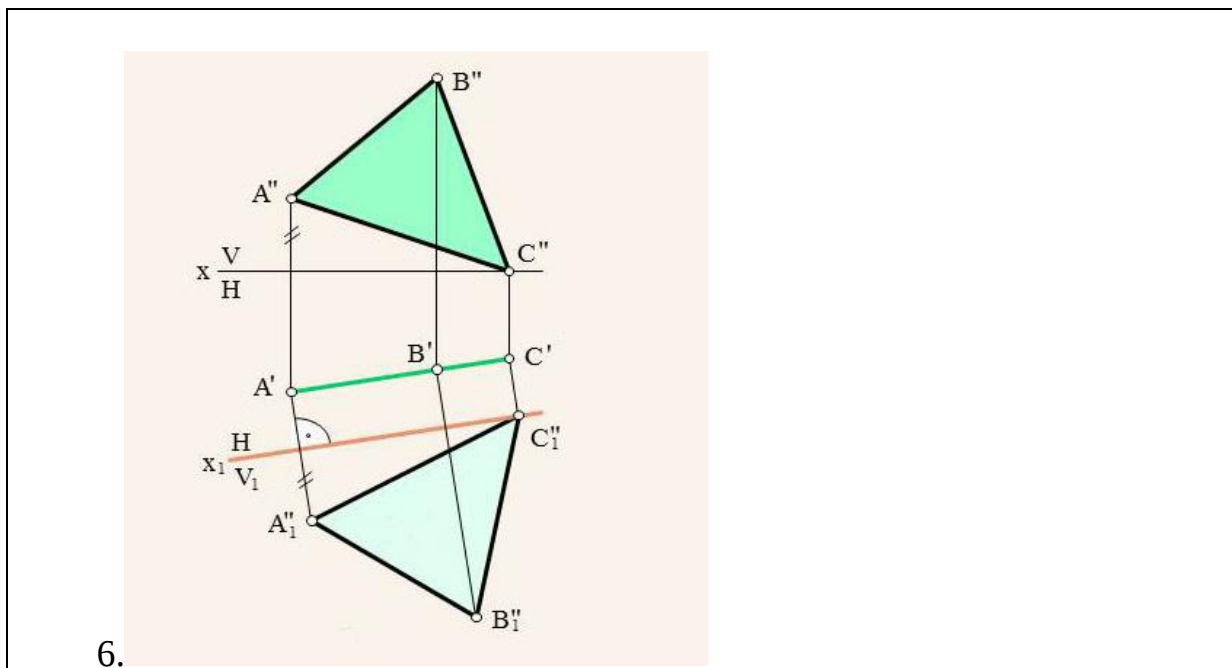
1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	6. 

Задача 4. Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в новой системе плоскостей проекций заняла положение плоскости уровня.

Решение этой задачи позволяет определить натуральную величину плоской фигуры. Новую плоскость проекций необходимо расположить параллельно заданной плоскости.

Таблица 5.4 – Пошаговое решение задачи 4 на преобразование чертежа

1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	



1.5.3. Преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующей оси

Преобразование чертежа способом вращения вокруг проецирующей оси заключается в том, что система плоскостей проекций остается неподвижной, а положение геометрических объектов меняется путем вращения вокруг одной или двух выбранных осей до нужного положения в данной системе.

Этим способом решаются задачи на определение: натуральной величины отрезков и углов их наклона к плоскостям проекций; для проведения прямой и плоскости под заданными углами; для совмещения оригиналов.

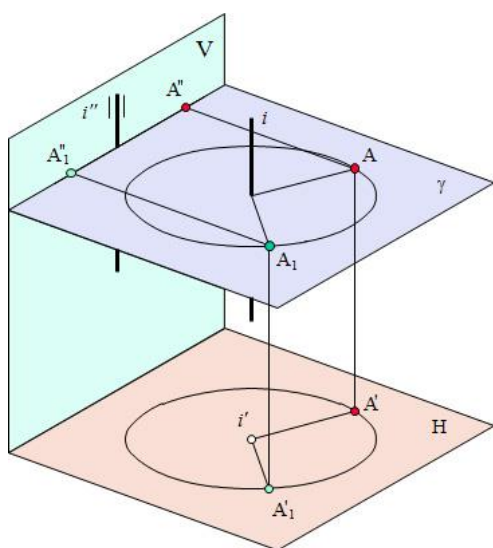
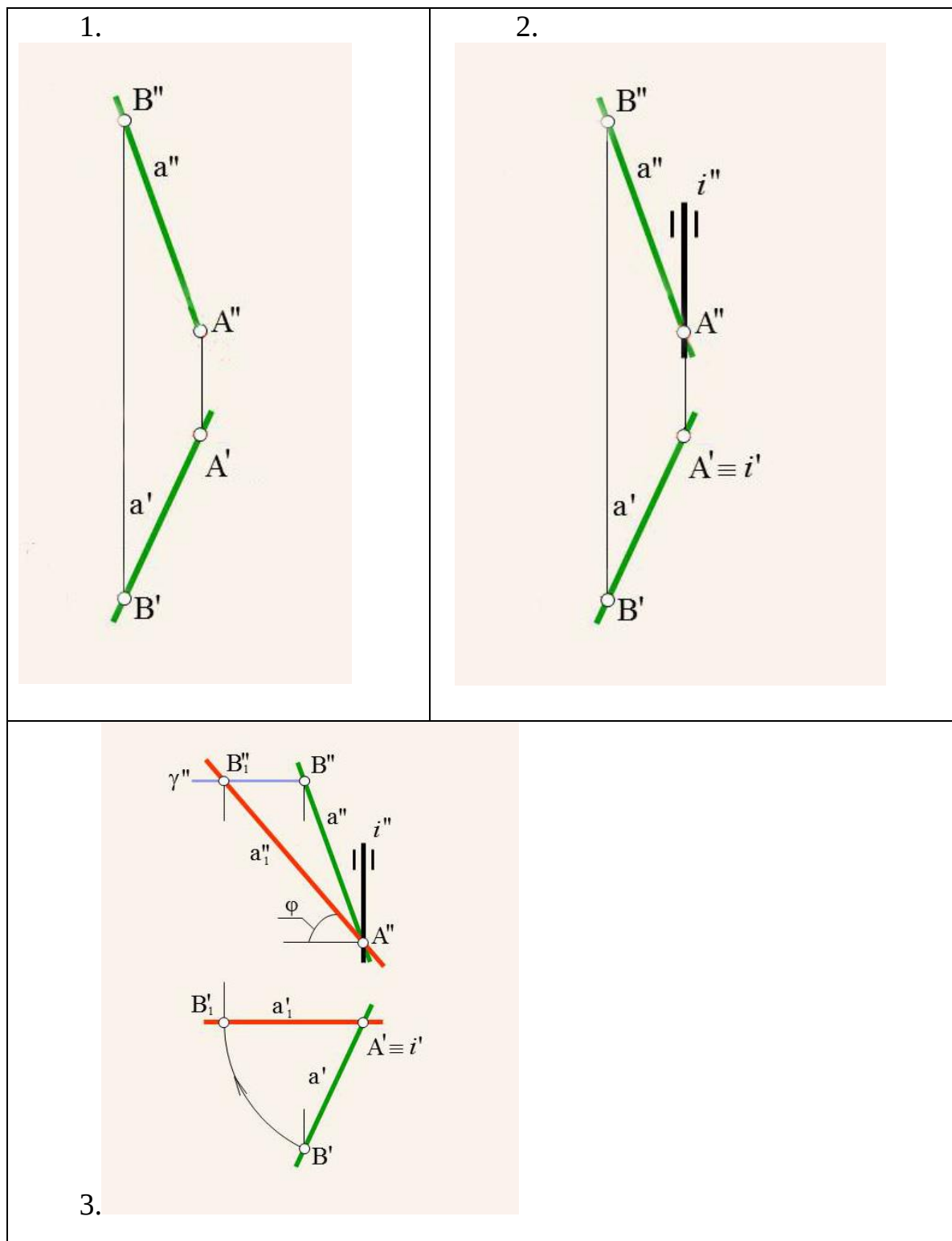


Рисунок 5.2 – Наглядное изображение способа вращения вокруг проецирующей прямой

Решение четырех основных задач способом вращения вокруг проецирующей прямой

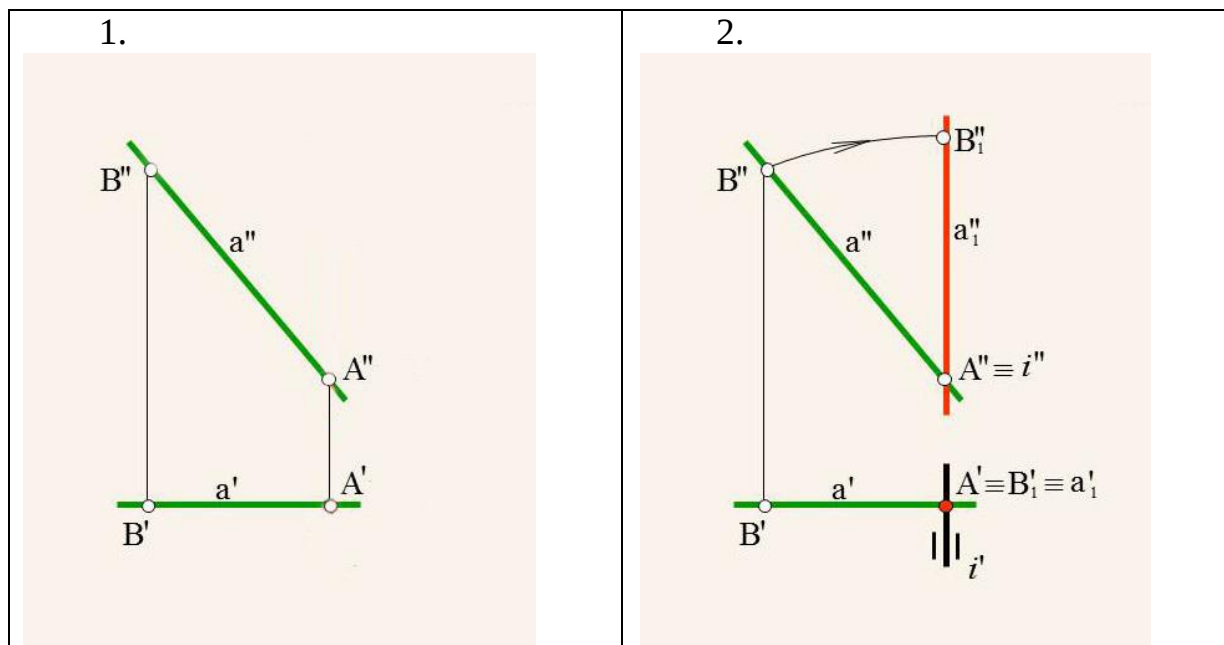
Задача 1. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая общего положения оказалась параллельной одной из плоскостей проекций (таблица 5.5).

Таблица 5.5 – Пошаговое решение задачи 1 на преобразование чертежа способом вращения



Задача 2. Преобразовать чертеж так, чтобы прямая уровня оказалась перпендикулярной одной из плоскостей проекций (таблица 5.6).

Таблица 5.6 – Пошаговое решение задачи 2 на преобразование чертежа способом вращения

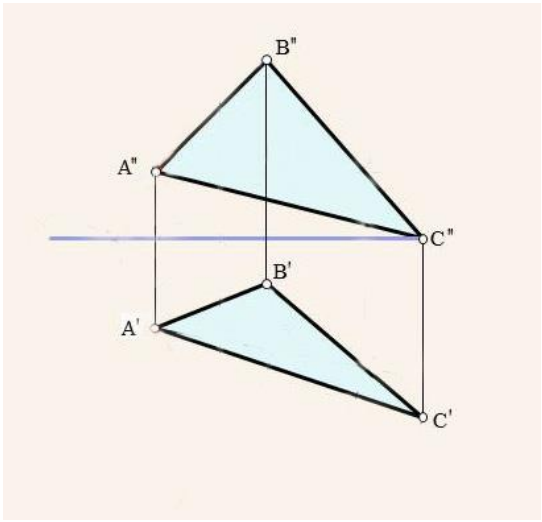
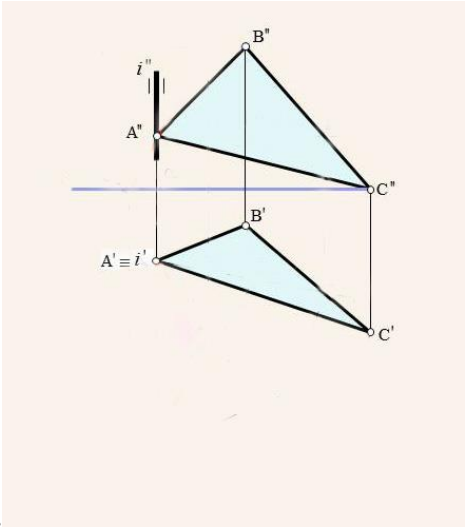
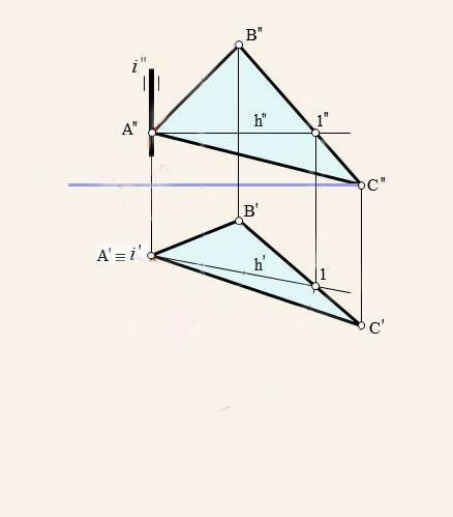
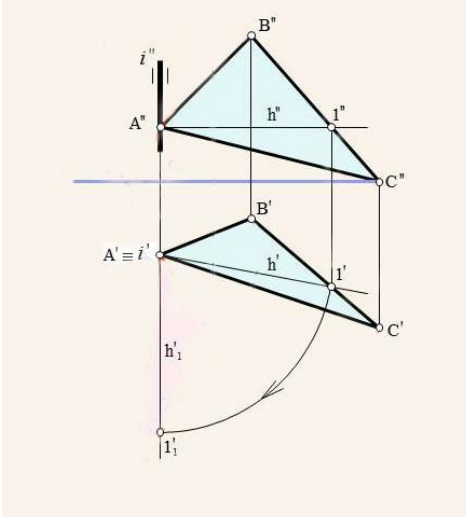
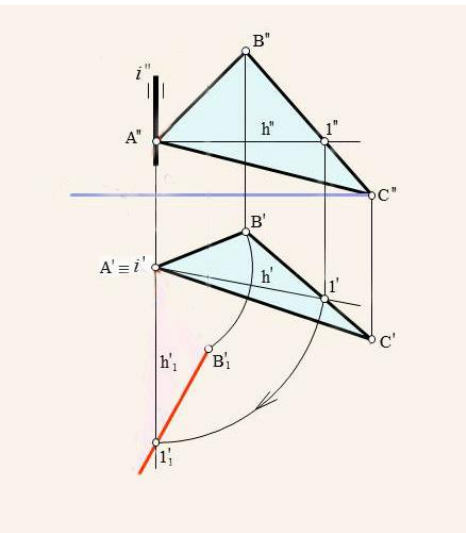
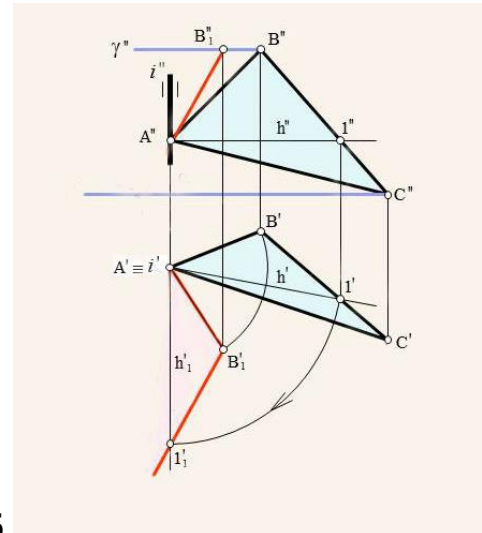


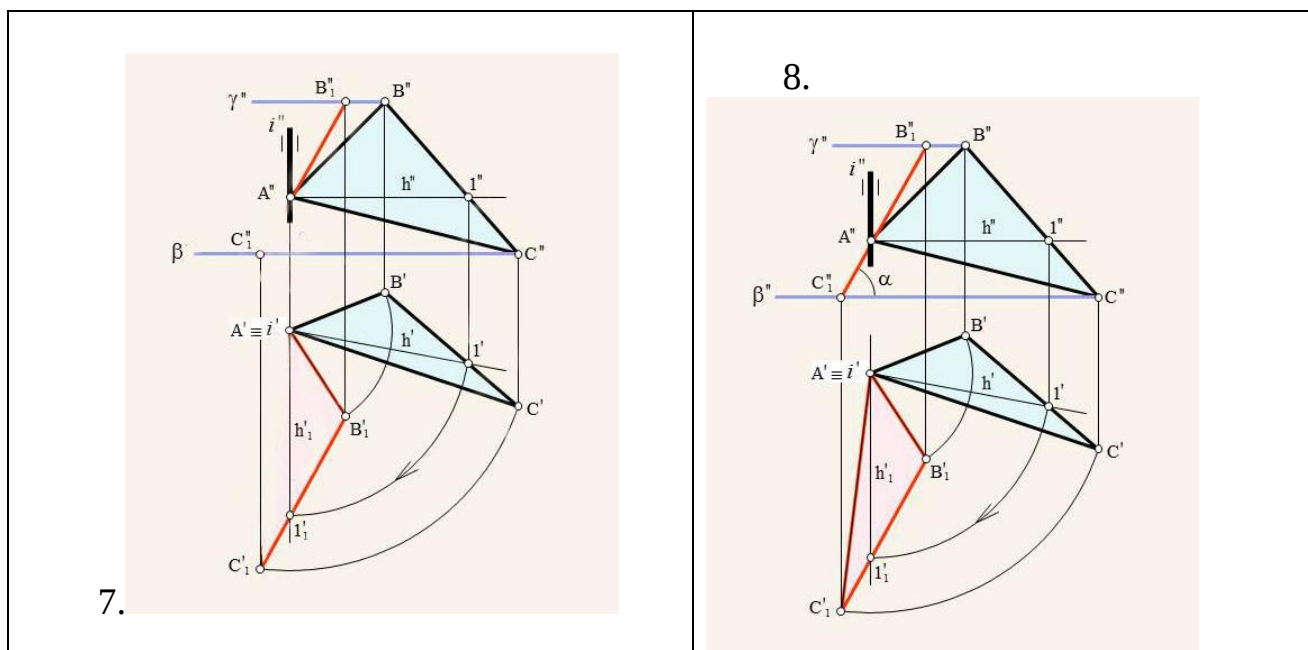
Задача 3. Преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения после поворота стала проецирующей (таблица 5.7).

Для решения этой задачи в плоскости нужно провести одну из главных линий (в данной задаче – горизонталь), которую одним поворотом сделать проецирующей прямой.

При вращении плоской фигуры вокруг проецирующей оси, проекция ее на плоскость, к которой ось вращения перпендикулярна, не изменяется по величине, так как не изменяется наклон плоской фигуры к этой плоскости проекций, а меняется только положение этой проекции относительно линий связи. Вторая же проекция на плоскости, параллельной оси вращения, изменяется и по форме и по величине.

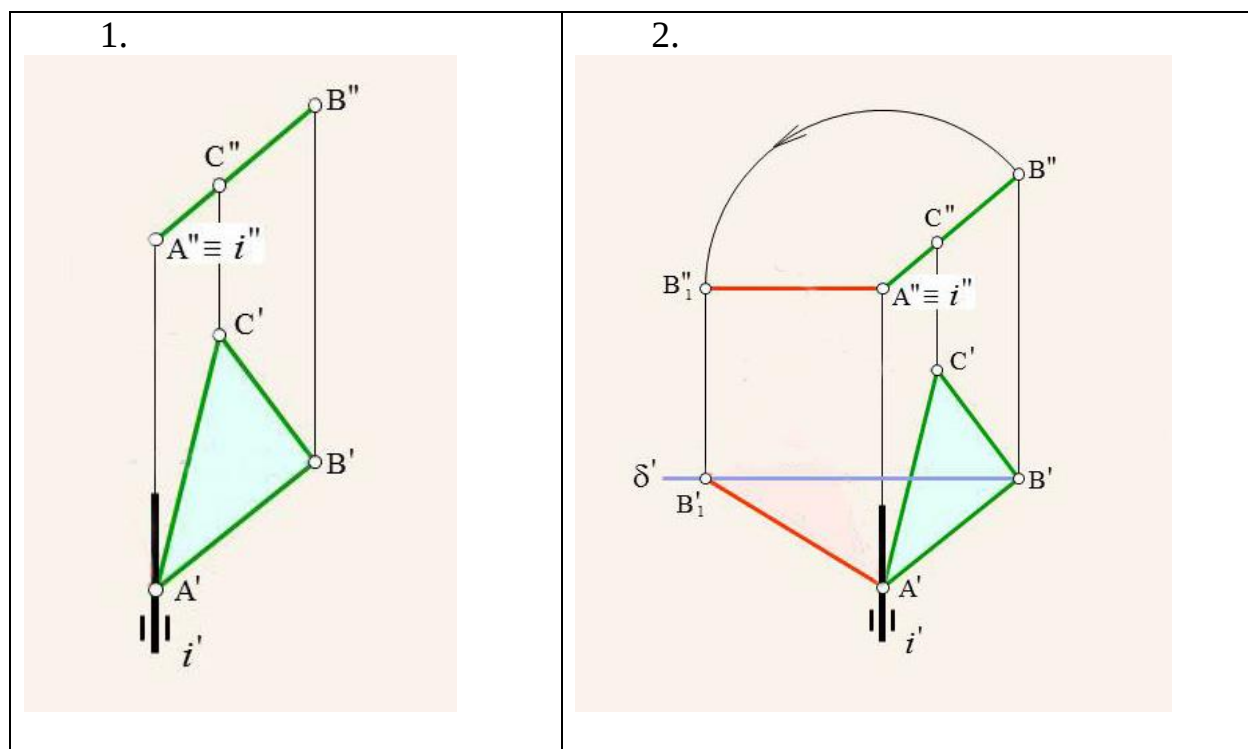
Таблица 5.7 – Пошаговое решение задачи 3 на преобразование чертежа способом вращения

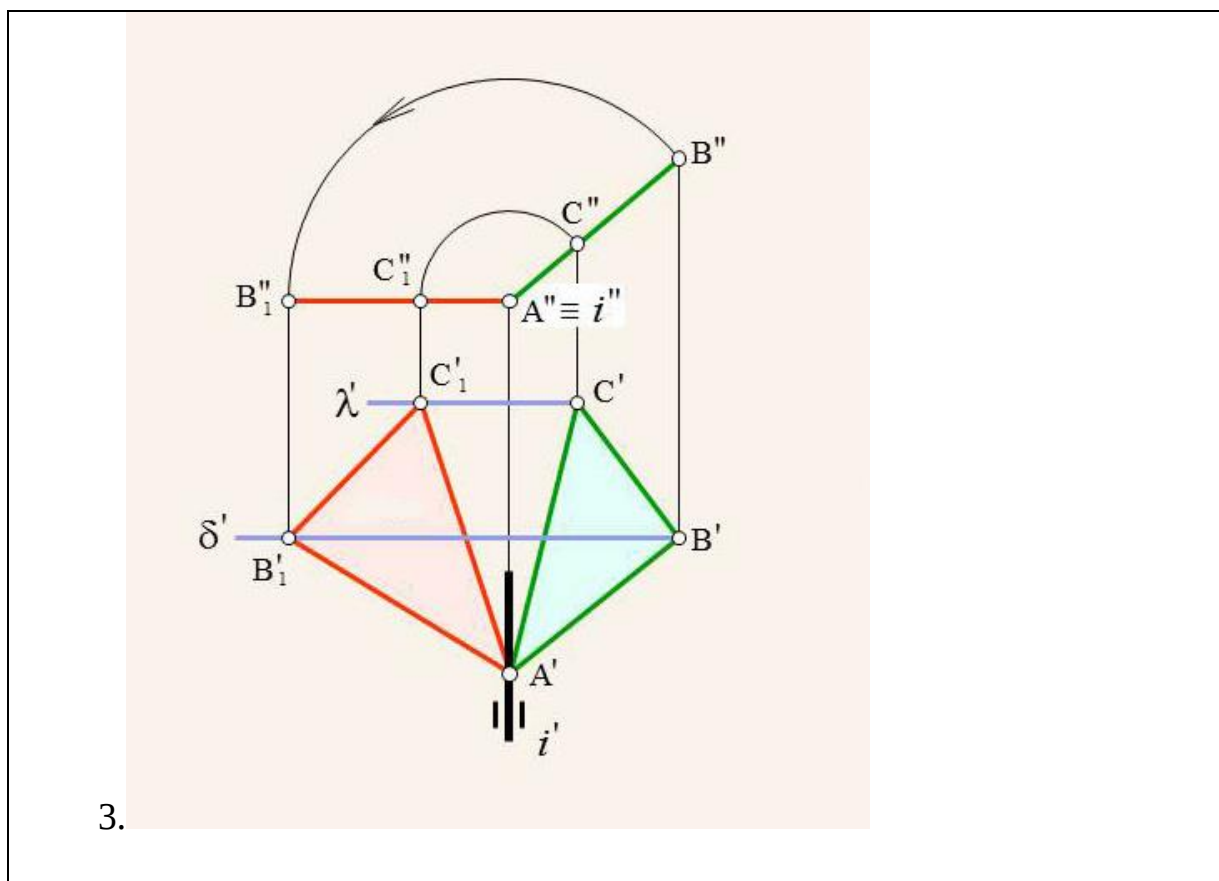
1. 	2. 
3. 	4. 
5. 	6. 



Задача 4. Преобразовать чертеж так, чтобы проецирующая плоскость в результате вращения заняла положение плоскости уровня (таблица 5.8).

Таблица 5.8 – Пошаговое решение задачи 4 на преобразование чертежа способом вращения





Поэтапное выполнение задачи 3 и задачи 4 позволяет найти натуральную величину плоской фигуры (рисунок 5.3).

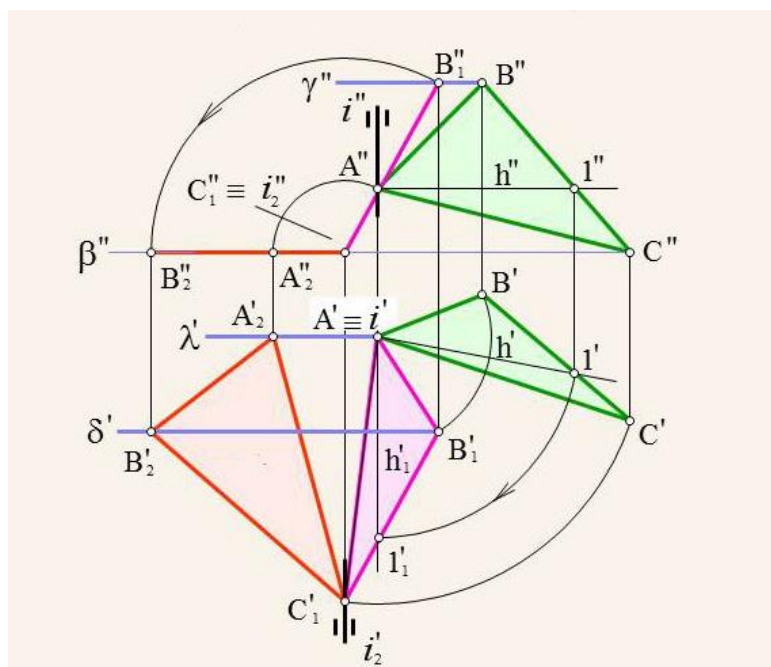


Рисунок 5.3 – Нахождение натуральной величины треугольника

1.6. ОСНОВЫ СТАНДАРТИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНСТРУКТОРСКОЙ ДОКУМЕНТАЦИИ

Для оформления чертежей используют Единую систему конструкторской документации (ЕСКД), стандарты которой устанавливают единые для всех предприятий правила разработки, оформления и обращения конструкторской документации. Знание некоторых стандартов (ГОСТ – государственный стандарт) необходимо для оформления любых чертежей, в том числе чертежей графических работ по начертательной геометрии.

1.6.1. Форматы – ГОСТ 2.301-68

Этот стандарт устанавливает форматы листов чертежей – размеры внешней рамки чертежа в миллиметрах (мм).

Формат с размерами сторон 1189х841 мм, площадь которого равна 1 м² с соотношением сторон 5/7, принят за самый большой основной формат.

Прочие основные форматы получают последовательным делением большей стороны предыдущего формата пополам параллельно его меньшей стороне.

Таблица 6.1 – Основные стандартные форматы чертежей по ГОСТ 2.301-68

Обозначение	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Размеры сторон	1189х841	594х841	594х420	297х420	297х210	148х210

Применяются для выполнения чертежей и дополнительные форматы, образование и размеры которых смотрите в указанном стандарте (здесь не приведены).

Чертежи индивидуальных заданий контрольной работы следует выполнять на форматах А3 с размерами сторон 297х420. Внутренняя рамка чертежа выполняется сплошными толстыми основными линиями. Основная надпись выполняется в правом нижнем углу чертежа также сплошной толстой линией (рисунок 6.2).

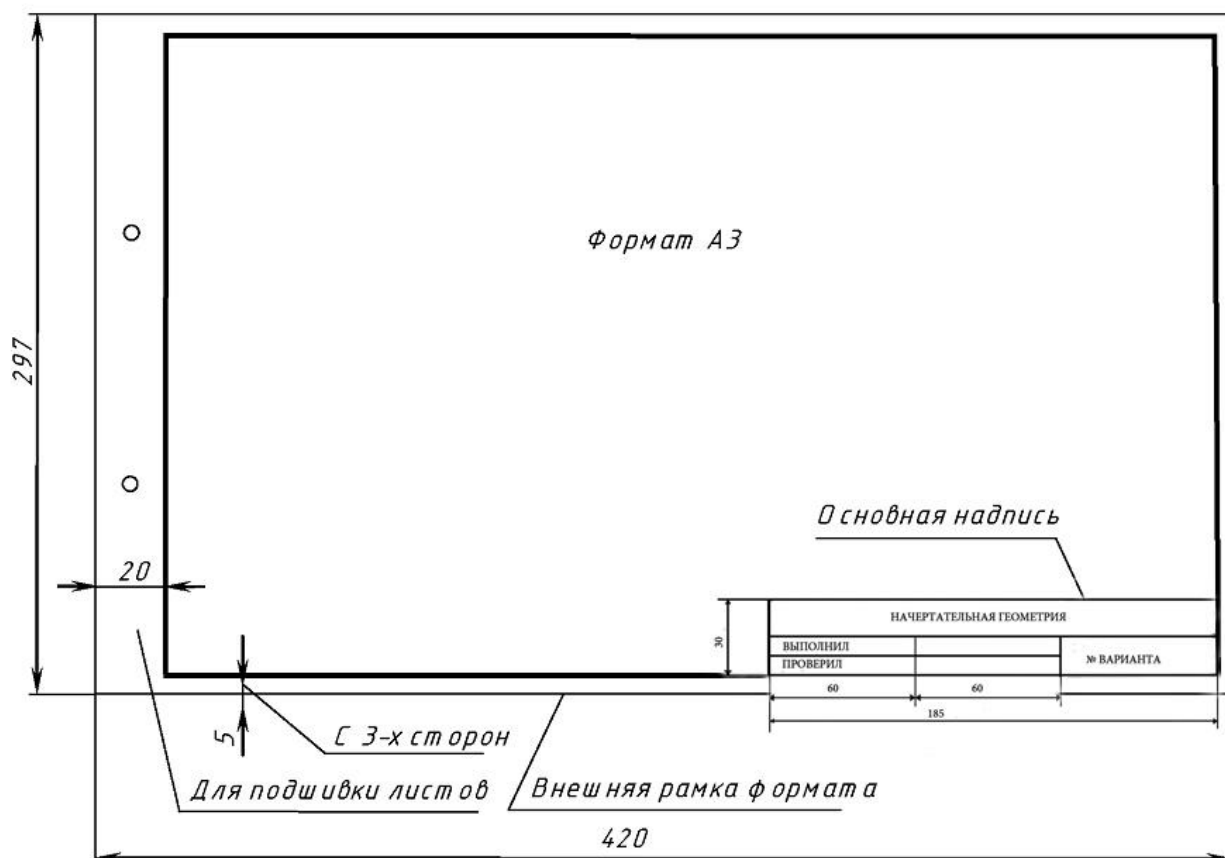


Рисунок 6.1 – Оформление листа формата А3

1.6.2. Масштабы – ГОСТ 2.302-68

Этот стандарт устанавливает масштабы изображений и их обозначение на чертежах.

Масштабы изображений на чертежах в соответствии с ГОСТ 2.302-68 должны выбираться из следующих рядов:

- масштаб уменьшения – 1:2, 1:4, 1:5, 1:10 ... 1:1000;
- натуральная величина – 1:1;
- масштаб увеличения – 2:1; 4:1; 5:1; ... 100:1.

Чертежи индивидуальных заданий необходимо выполнять в натуральную величину в М1:1.

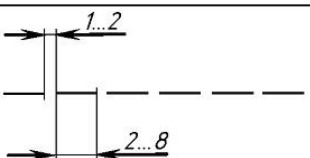
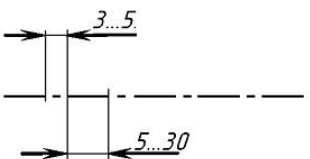
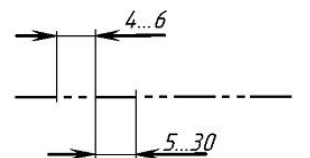
1.6.3. Линии – ГОСТ 2.303-68

Этот стандарт устанавливает начертание и основные назначения линий на чертежах.

Толщина линий одного и того же типа должна быть одинакова для всех изображений на чертеже.

Толщина s сплошной толстой основной линии должна быть в пределах от 0,5 до 1,4 мм, а толщина всех прочих линий на чертеже берется в зависимости от выбранной для чертежа сплошной толстой основной линии.

Таблица 6.1 – Линии по ГОСТ 2.303-68

Наименование	Начертание	Толщина линии, мм	Основное назначение
1	2	3	4
1. Сплошная толстая основная		$s = 0,5 \dots 1,4$	Линии видимого контура
2. Сплошная тонкая		От $s/3$ до $s/2$	Линии выносные и размерные
3. Сплошная волнистая		От $s/3$ до $s/2$	Линия обрыва изображения
4. Штриховая		От $s/3$ до $s/2$	Линии невидимого контура
5. Штрихпунктирная тонкая		От $s/3$ до $s/2$	Линии осевые и линии симметрии
6. Штрихпунктирная с двумя точками		От $s/3$ до $s/2$	Линии сгиба на развертках

Рекомендуемая толщина линий различного назначения и их начертание для выполнения графических работ по начертательной геометрии на формате А3:

а) сплошная толстая основная – $s = 0,7 - 0,9$ мм;

б) все тонкие линии – $s/3$;

в) начертание штриховой линии:

- длина штрихов – 4 мм;
- разрывы между штрихами – 1 мм.

При этом на чертеже:

- штрихи этой линии должны касаться линий видимого контура;
- на изгибах линии ее штрихи должны касаться друг друга;
- пересечения линий не должны совпадать с разрывами между штрихами.

г) начертание штрихпунктирной линии:

- длинные штрихи – 12 мм;
- между длинными штрихами под короткий пунктир расстояние 3 мм;
- длина пунктира – 1 мм.

При этом на чертеже:

- штрихпунктирные линии должны пересекаться длинными штрихами;

- за видимый контур изображения длинные штрихи этой линии выступают на 2 мм.

1.6.4. Шрифты чертежные – ГОСТ 2.3304-81

Этот стандарт устанавливает чертежные шрифты, т.е. размеры и начертание цифр и букв различных алфавитов (рисунк 6.2 – 6.5).

Некоторые определения:

1. Размер шрифта ***h*** – высота прописных (больших) букв и цифр в миллиметрах.

Стандартом установлены следующие размеры шрифта: 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40.

2. Высота строчных (маленьких) букв ***c*** (без отростков ***k***) определяется по отношению $c = 7/10h$, то есть в каждом размере шрифта высота строчных букв на размер меньше прописных.

3. Толщина линий шрифта ***d*** равна:

- для шрифта типа **А** (узкого) $d = 1/14h$;
- для шрифта типа **Б** (широкого) $d = 1/10h$.

Буквы шрифта любого типа можно выполнять с наклоном в 75° к одной из сторон рамки чертежа или без наклона.

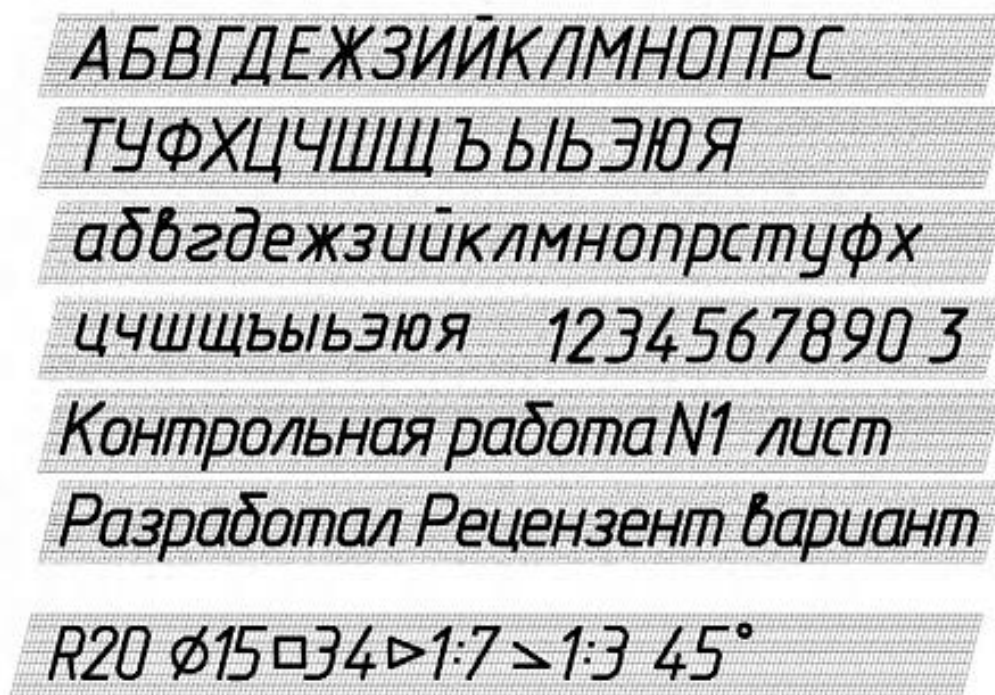


Рисунок 6.2 – Шрифт с наклоном

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У
 Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я
 а б в г д е ж з и й к л м н о п р с т у ф х ц ч
 ш щ ъ ы ь э ю я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 3
 Контрольная работа N1
 R20 ∅15 □34 ▷1:7▷1:3 45°

Рисунок 6.3 – Шрифт без наклона

A B C D E F G H I J K L M N
 O P Q R S T U V W X Y Z
 a b c d e f g h i j k l m n o p q
 r s t u v w x y z

Рисунок 6.4 – Латинский алфавит



Рисунок 6.5 – Греческий алфавит

1.6.5. Чертежные материалы, принадлежности и инструменты

Чертежные материалы, принадлежности и инструменты для графического выполнения индивидуальных графических заданий существенно влияют на качество и трудоемкость выполнения чертежей.

Для выполнения графических работ необходимо использовать:

1. Чертежную белую бумагу – ватман формата А3 – хорошего качества без типографской рамки чертежа и основной надписи.

2. Чертежные линейки и угольники – желательно деревянные или из качественной прозрачной пластмассы (с выступающими опорными элементами во избежание размазывания вычерченных линий):

- линейка должна быть длиной не менее 400 мм (для вычерчивания рамки чертежа и нанесения горизонтальных линий связи);

- можно использовать роликовые линейки-рейсшины хорошего качества (длина – 220...300 мм) для вычерчивания параллельных линий;

- прямоугольные треугольники (деревянные или пластмассовые с выступающими опорными элементами) должны иметь острые углы в 45° или 30° и 60° и прямолинейные гладкие кромки. Необходимо проверять качество изготовления треугольника, в частности, выдержан ли прямой угол.

3. Набор чертежных инструментов (готовальня) с циркулем и измерителем. В головку циркуля необходимо вставить хороший грифель и заточить его.

4. Карандаши:

- Рекомендуемые карандаши «НВ» (твёрдо-мягкий), «ВН» (мягко-твёрдый), «В» (мягкий) и «F» (более мягкий). В головку циркуля необходимо вставлять грифель из карандаша твёрдостью «В» или «F».

- Автоматические карандаши с грифелями 0,9; 0,7 и 0,5 для выполнения толстых и тонких линий на чертежах.

5. Немаловажное значение для качества выполнения графических работ имеет ластик: он должен вытирать линию, а не размазывать ее, и не должен протирать бумагу (без абразивных включений – белого цвета, как правило).

Качественными являются чертежные принадлежности (карандаши, ластики, циркули, линейки и др.) известных фирм: KON-I-NOOR, HARDVUTH, Rotring, MAPED, Stadler, Pelikan и др.

1.7. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.7.1. Общие сведения о разворачивании поверхностей

Разворачиванием поверхности называется совмещение поверхности геометрического тела с плоскостью чертежа. Фигура, образуемая при разворачивании поверхности, называется *разверткой*. Существуют два подхода к построению разверток поверхностей.

- Первый способ – *алгебраический* – заключается в определении геометрических размеров развертки (длин линий, принадлежащих контуру развертки, и величин некоторых углов между этими линиями) путем вычислений. Таким способом, к примеру, легко разворачивается поверхность прямого кругового конуса и прямого кругового цилиндра.

- Второй способ – *графический*. Так как в начертательной геометрии поверхности всегда задаются при помощи каких-либо построений, то этот способ является предпочтительным.

Поверхности делятся на разворачиваемые и неразворачиваемые (или косые).

Разворачиваемой поверхностью называется поверхность, которая при совмещении с плоскостью чертежа не претерпевает каких-либо повреждений - разрывов, складок и т.д. При этом должны выполняться следующие условия:

- каждая точка на развертке соответствует единственной точке поверхности;
- принадлежащие поверхности прямые линии при разворачивании остаются прямыми;
- параллельные прямые также параллельны на развертке;
- на развертке сохраняются длины линий, лежащих на поверхности, величины углов между линиями и площади фигур, образованные замкнутыми линиями.

К разворачиваемым поверхностям относятся все многогранные поверхности и некоторые линейчатые поверхности.

Неразворачиваемой поверхностью называется поверхность, которая при совмещении с плоскостью чертежа претерпевает какие-либо повреждения. У

неразвертываемых поверхностей разверток быть не может, однако на практике в отдельных случаях возникает необходимость в построении приближенной «развертки» таких поверхностей. В этом случае говорят об условном развертывании, которое заключается в следующем. Неразвертываемую поверхность аппроксимируют (заменяют) другой развертываемой поверхностью (например, цилиндрической или конической). К неразвертываемым поверхностям относятся все нелинейчатые поверхности и некоторые линейчатые поверхности.

1.7.2. Развертывание многогранных поверхностей

Развертка многогранной поверхности представляет собой плоскую фигуру, составленную из всех граней этого геометрического тела, изображенных в натуральную величину. Поэтому построение развертки многогранной поверхности сводится к определению натуральных величин отдельных граней ее поверхности. Последовательность расположения отдельных граней на развертке может быть различна.

1.7.2.1. Развертка поверхности призмы способом нормального сечения

Построение развертки поверхности *призмы* можно выполнить несколькими способами:

1. способ нормального сечения;
2. способ раскатки;
3. способ треугольников (триангуляции).

Способ нормального сечения для развертки боковой поверхности призмы можно применить, если на чертеже:

- ребра призмы являются прямыми уровня, т.е. имеют на одной из заданных проекций натуральную величину;
- на проекциях нет натуральных величин оснований призмы.

Если на чертеже ребра призмы являются прямыми общего положения, то следует изменить положение призмы относительно плоскостей проекций, преобразовав ребра в прямые уровня, например, способом замены плоскостей проекций.

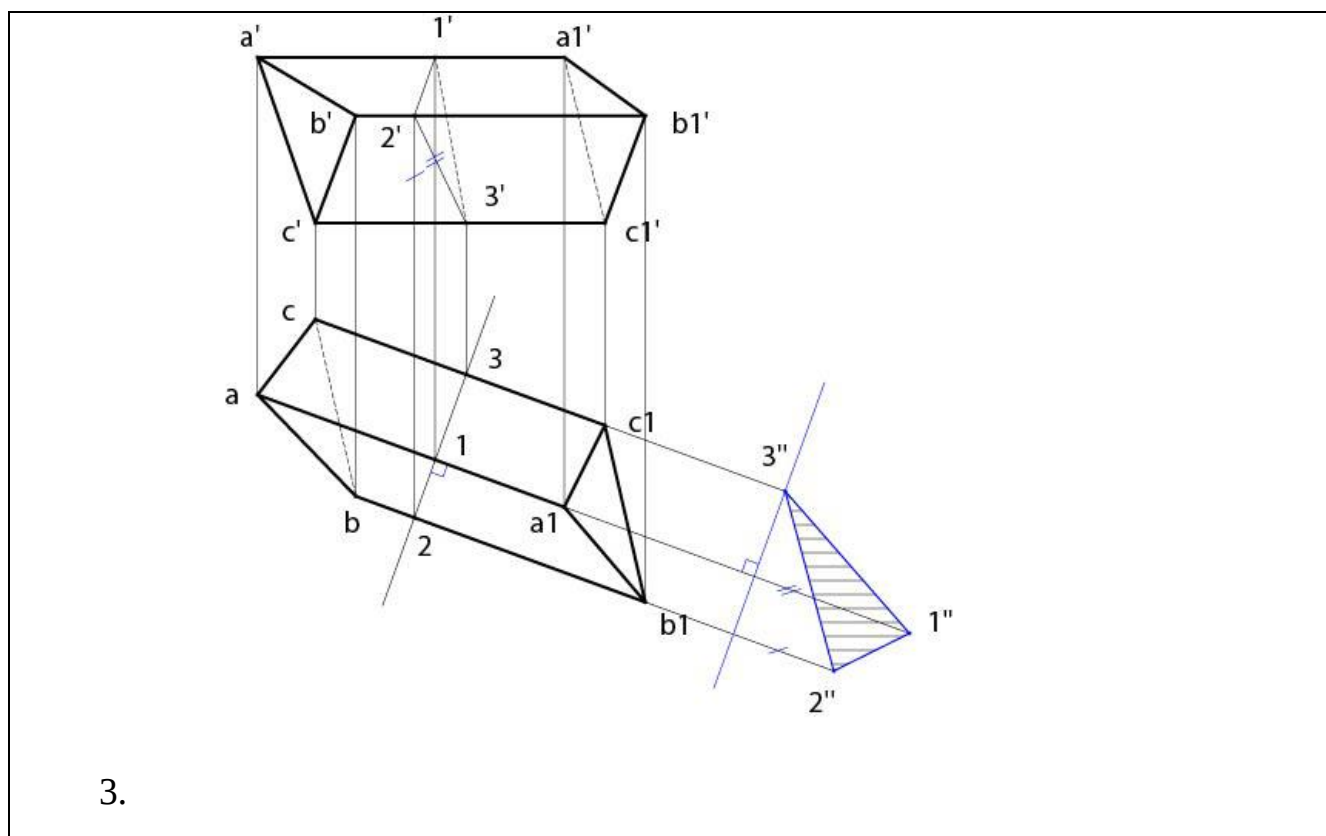
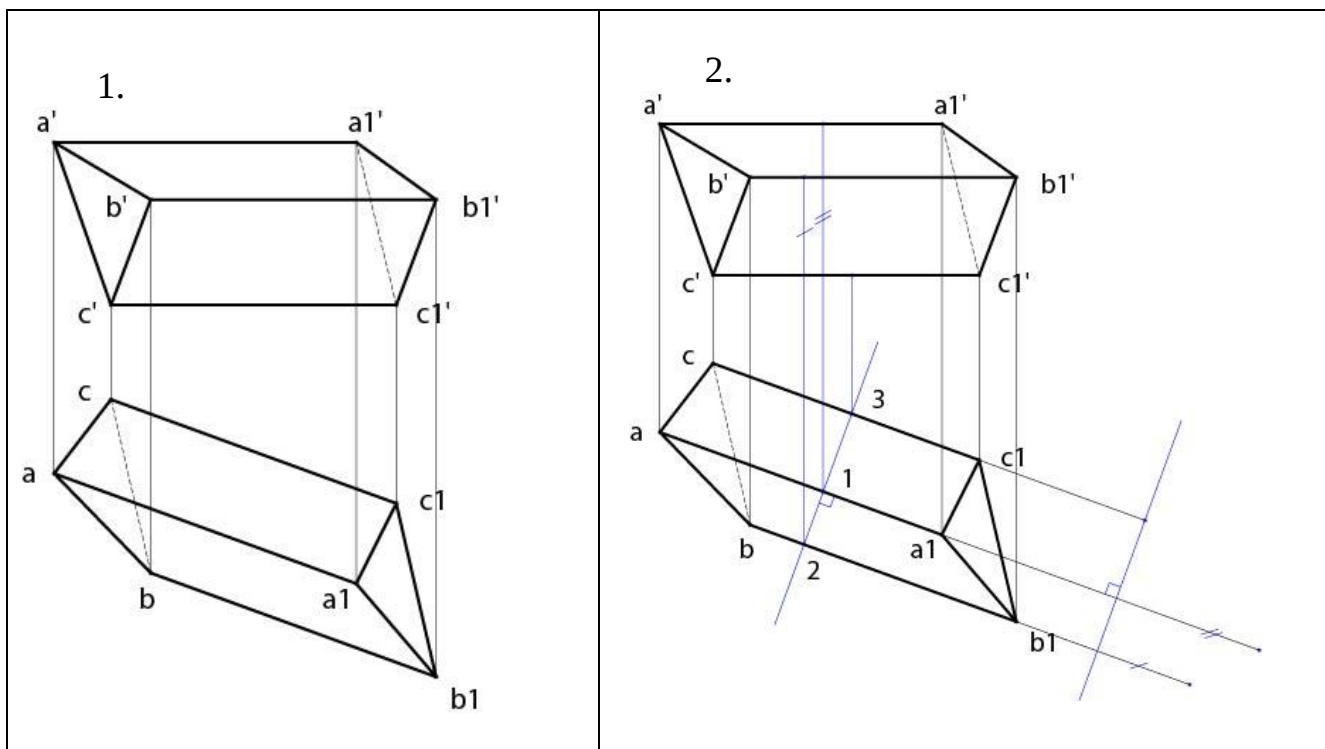
Построение развертки боковой поверхности призмы способом нормального сечения выполняется по следующему графическому алгоритму:

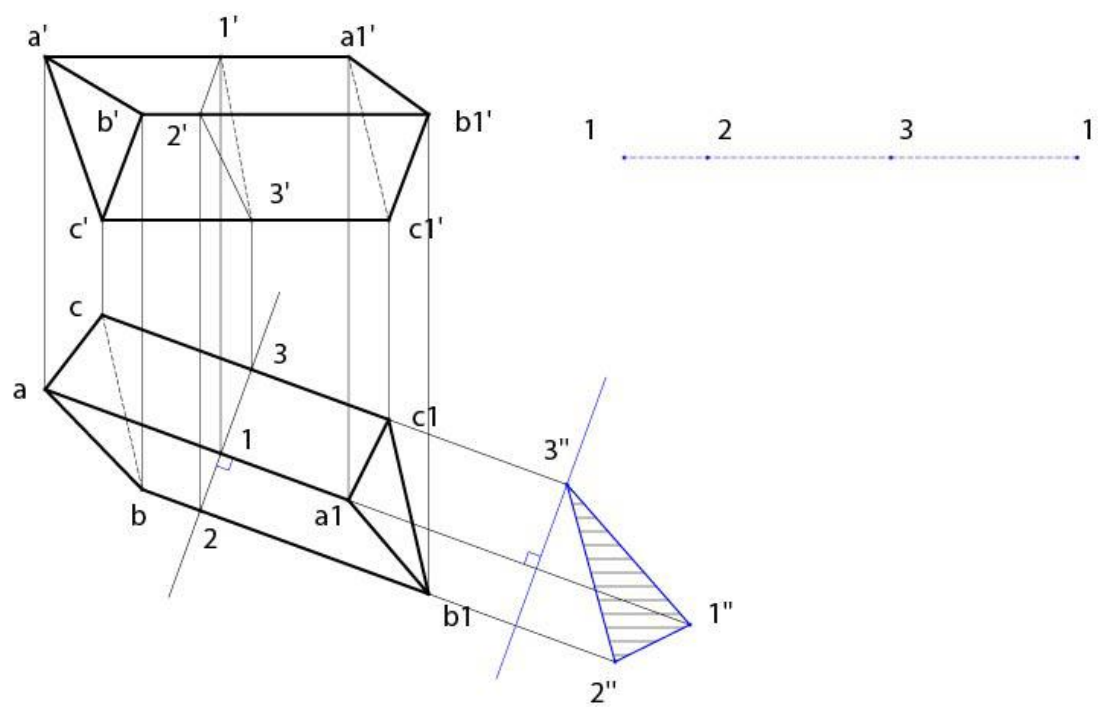
1. На проекции призмы, на которую ребра призмы проецируются в натуральную величину, провести плоскость *нормального сечения*, перпендикулярную ее ребрам (в произвольном месте по длине ребер).
2. Построить натуральную величину многоугольника нормального сечения (например, способом замены плоскостей проекций).
3. Развернуть на свободном поле чертежа натуральный многоугольник сечения в прямую и через точки его вершин провести перпендикулярные прямые – направления ребер.
4. Отложить на направлениях ребер в обе стороны от линии нормального сечения натуральные отрезки соответствующих ребер.

5. Соединить построенные конечные точки ребер отрезками прямых и достроить плоскую фигуру развертки боковой поверхности призмы.

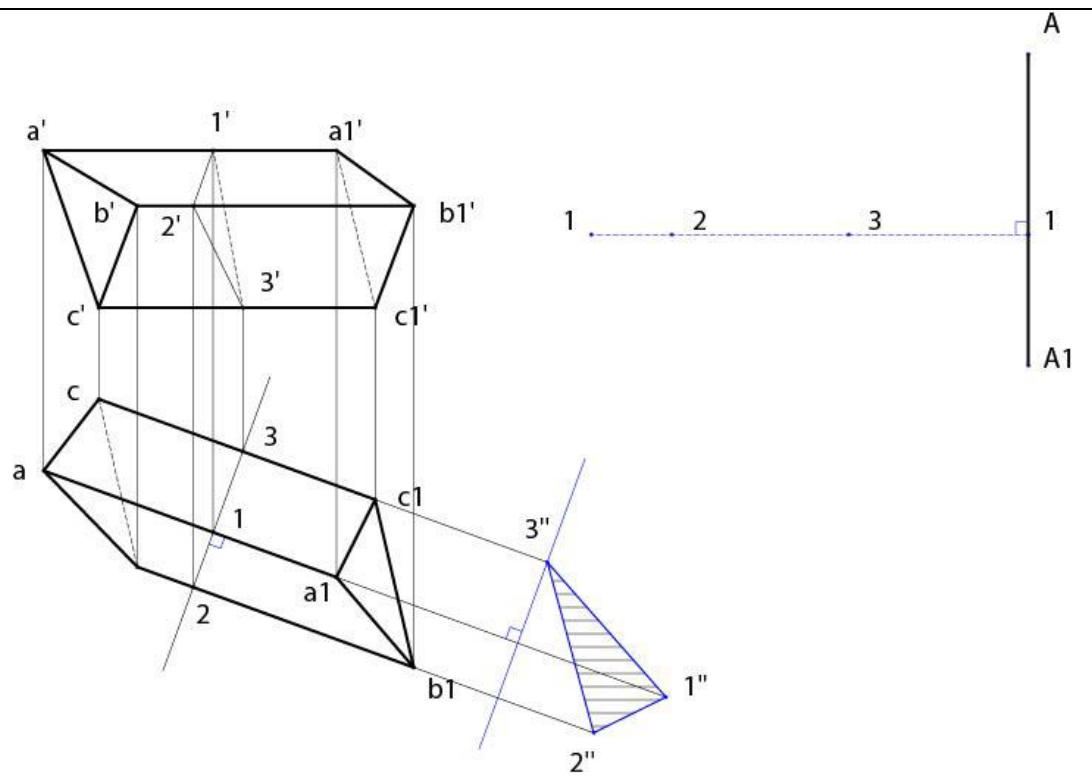
6. Оформить чертеж развертки, проводя тонкими штрихпунктирными линиями с двумя короткими пунктирами линии сгиба в местах расположения ребер.

Таблица 7.1 – Построение развертки боковой поверхности призмы способом нормального сечения

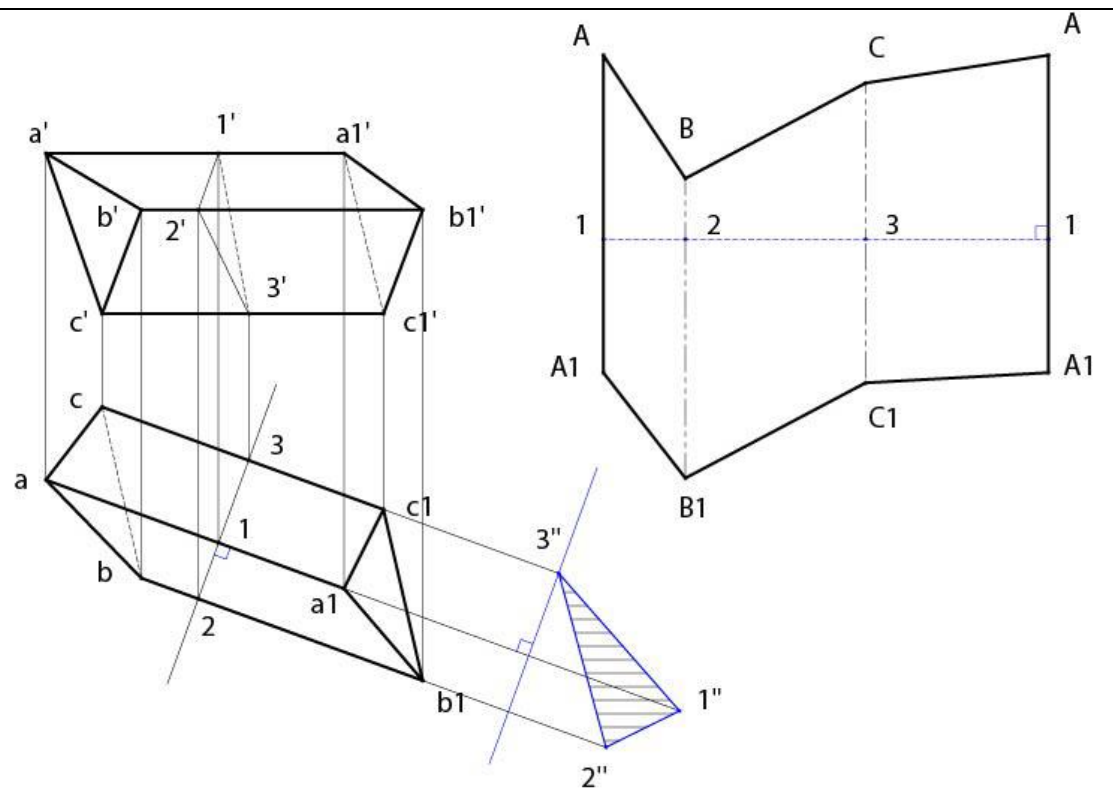




4. 



5.



6.

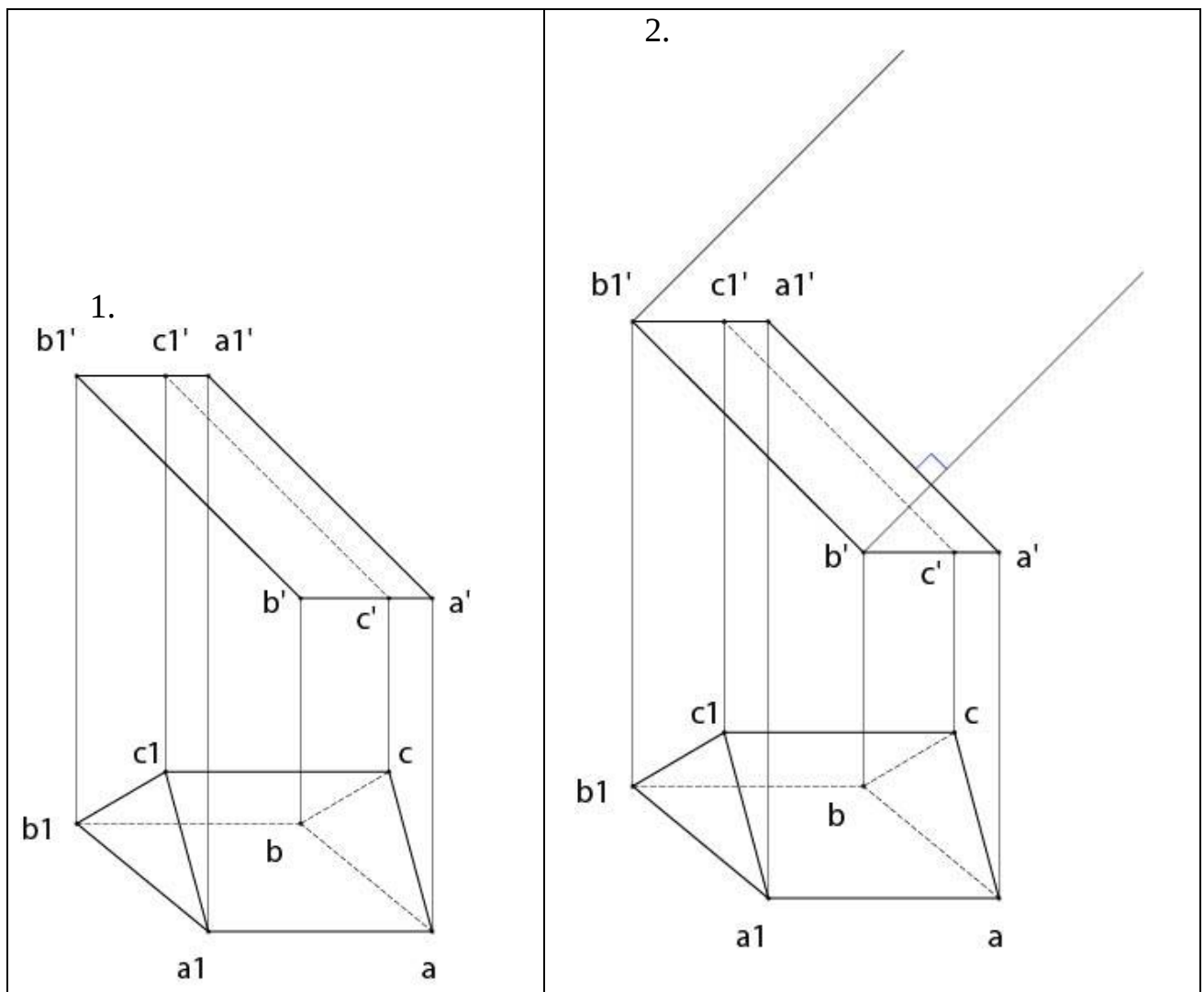
1.7.2.2. Развертка поверхности призмы способом раскатки

Способ раскатки применяется, если на чертеже:

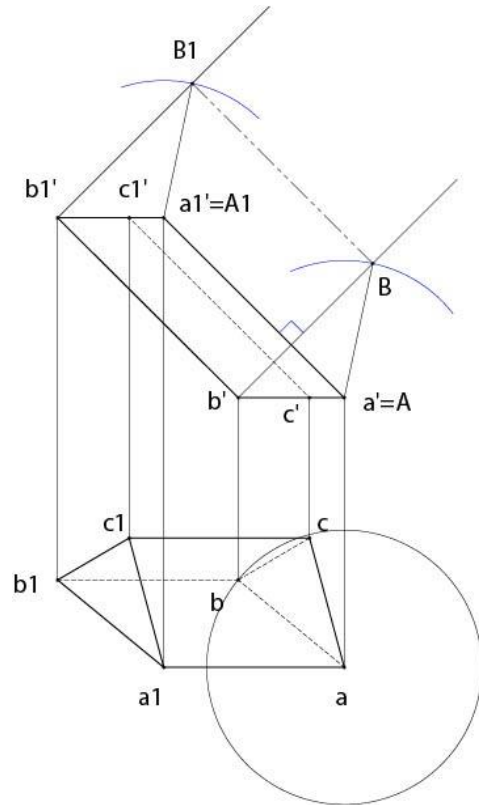
- Ребра призмы являются прямыми уровня;
- Основания призмы (или одно из оснований) лежат в плоскости уровня, т.е. имеют на чертеже натуральную величину.

Суть способа в том, что «разрезав» поверхность призмы по одному из ее ребер, вращением призмы (раскаткой) вокруг этого ребра ближайшая грань призмы совмещается с плоскостью развертки (за плоскость развертки принимается плоскость проекций, которой параллельны ребра призмы). Затем последовательным вращением призмы вокруг следующих ребер с плоскостью последовательным вращение призмы вокруг следующих ребер с плоскостью развертки совмещаются все прочие грани призмы, т.е. выполняется полная *раскатка* ее боковой поверхности.

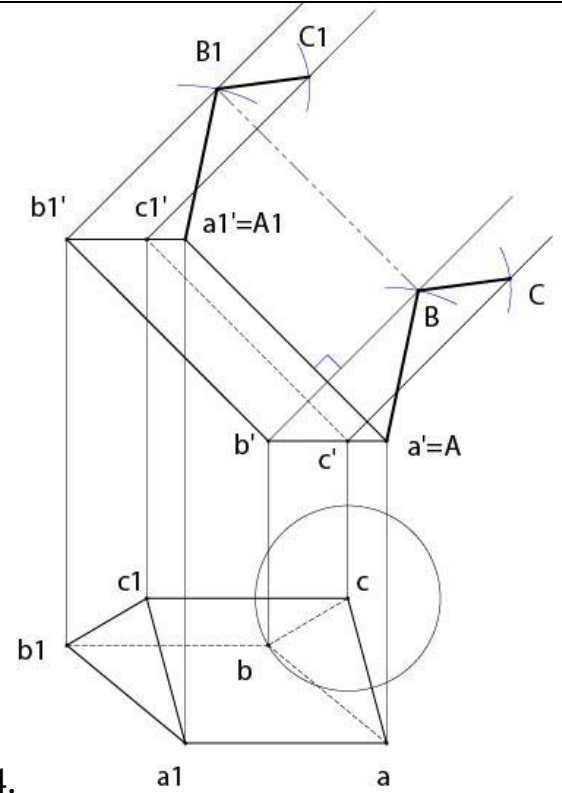
Таблица 7.2 – Построение развертки боковой поверхности призмы способом раскатки

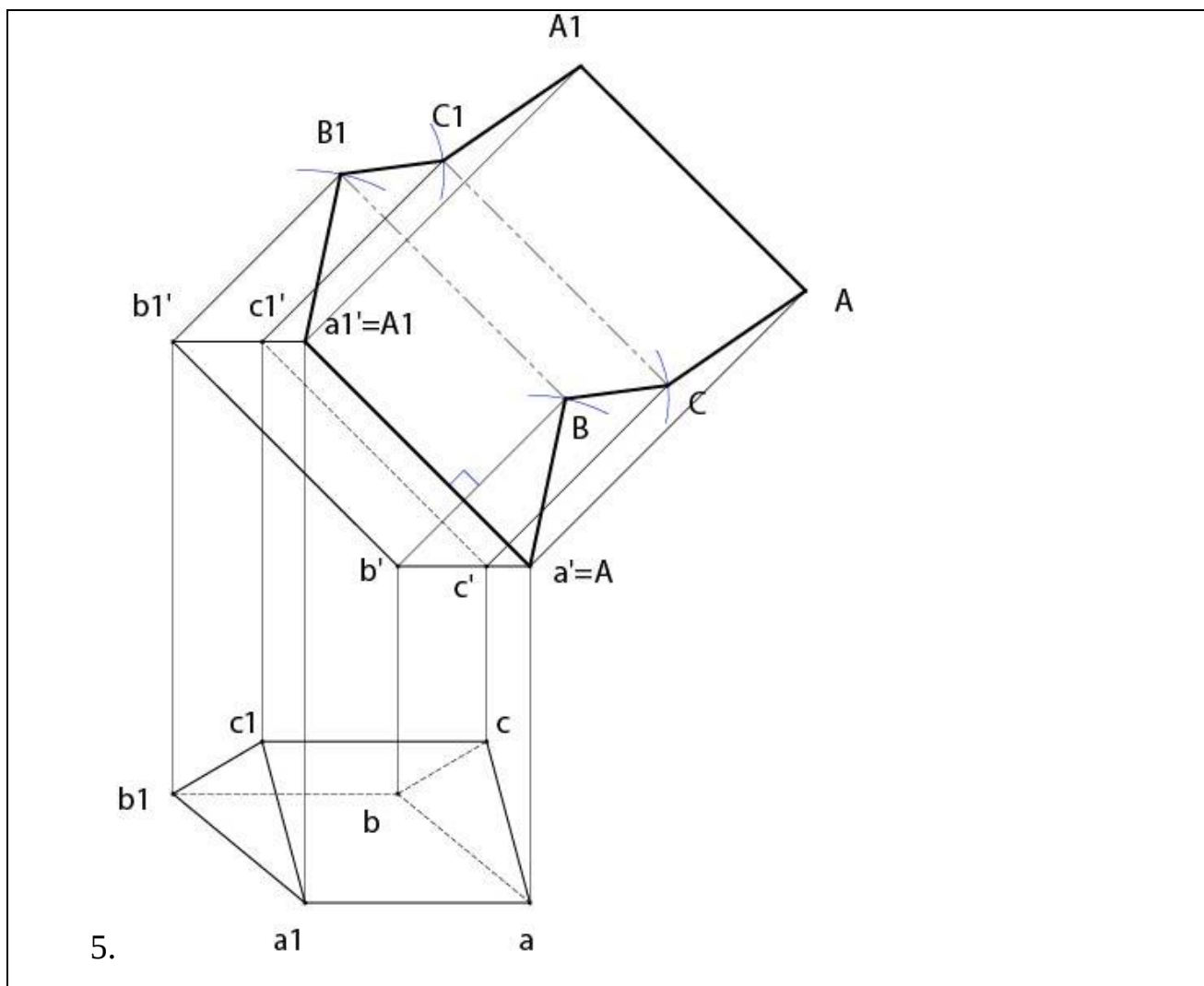


3.



4.





1.7.2.3. Развертка поверхности пирамиды

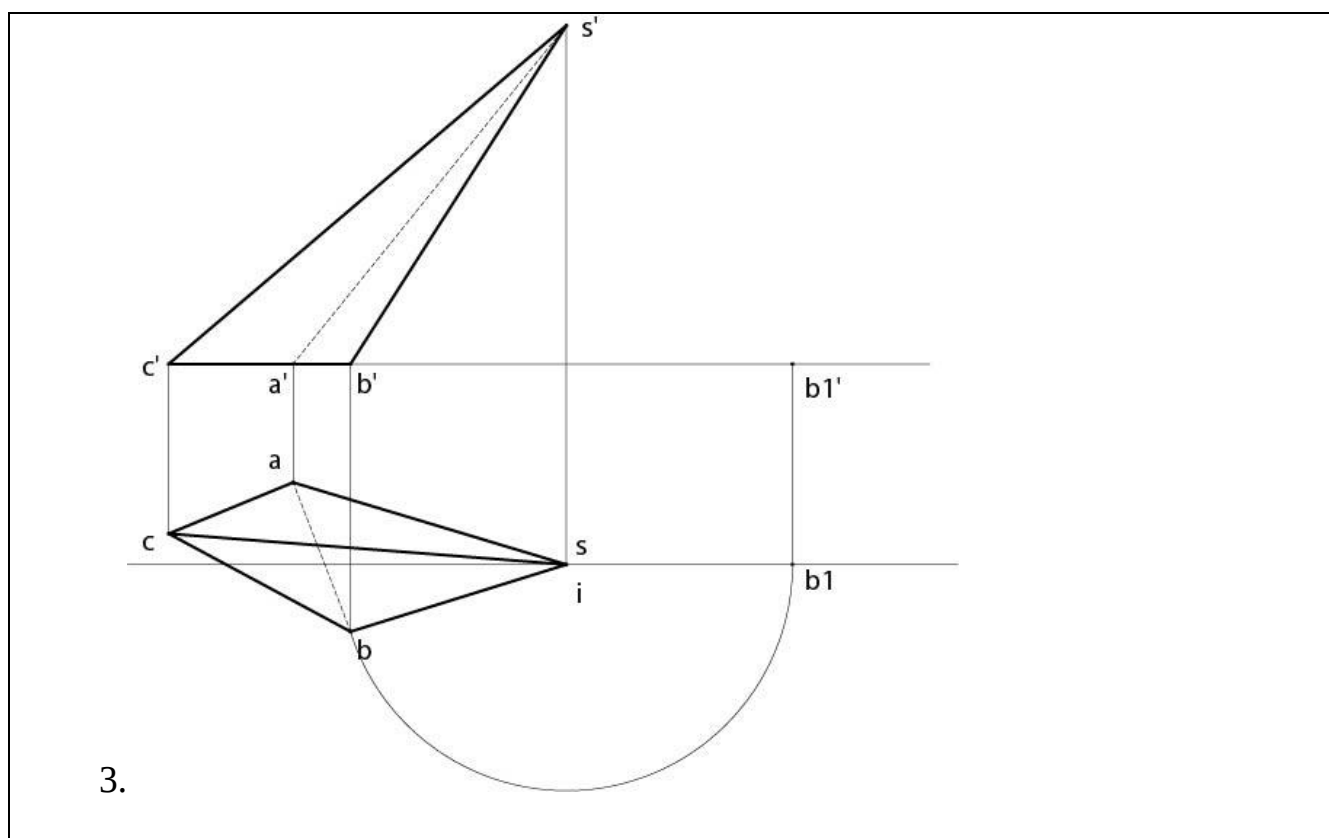
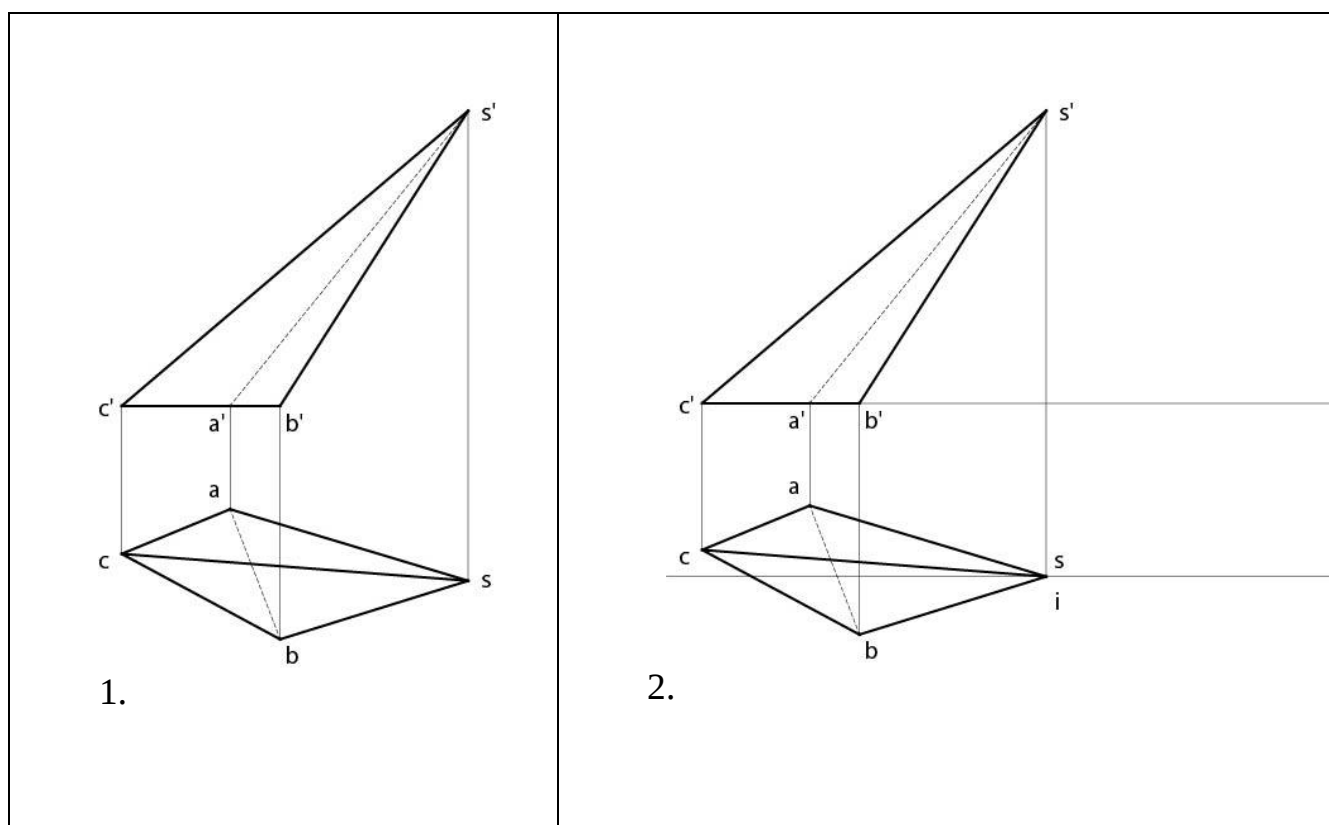
Построение развертки боковой поверхности пирамиды по натуральным величинам ее ребер выполняется по следующему графическому алгоритму:

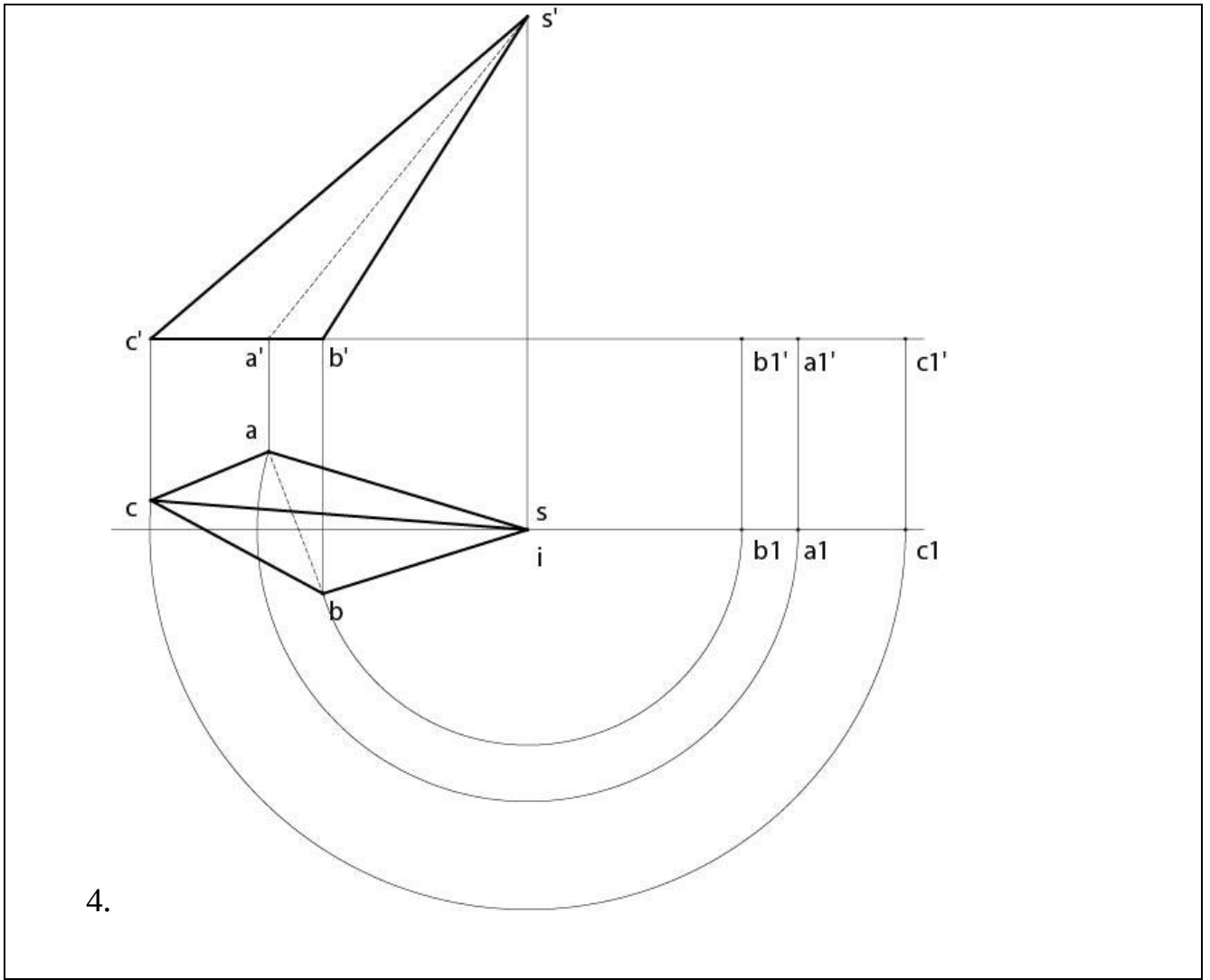
1. Построить на заданных проекциях пирамиды натуральные величины всех ее боковых ребер (например, способом вращения вокруг проецирующей прямой) и натуральные величины сторон многоугольника основания пирамиды (если основание лежит в плоскости уровня, то натуральные величины даны на одной из проекций).

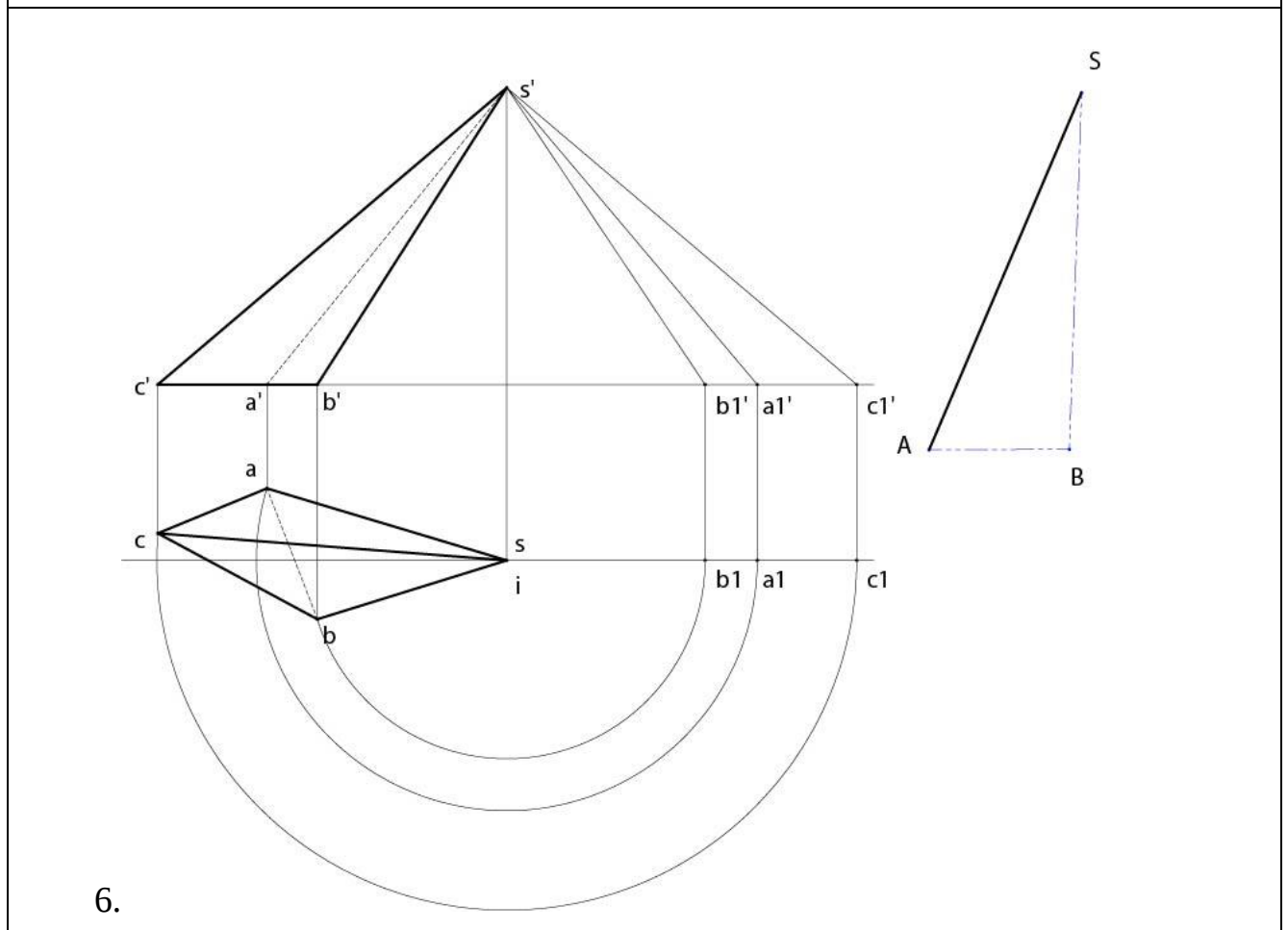
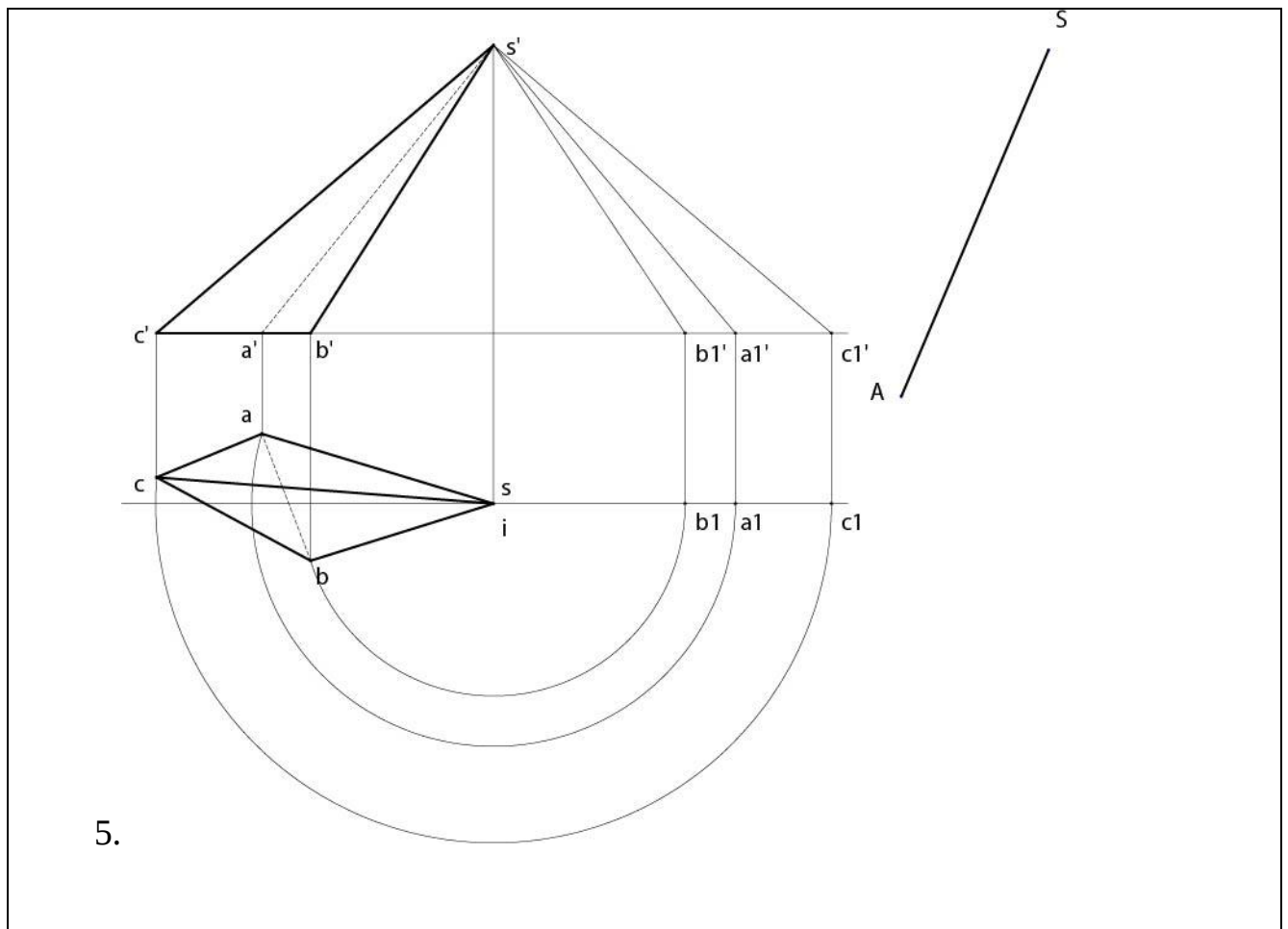
2. Построить на свободном поле чертежа последовательно грани пирамиды по натуральным величинам ребер и натуральным величинам сторон основания (с помощью дуг-засечек) так, чтобы они имели общую вершину S и примыкали друг к другу.

3. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам пирамиды тонкими штрихпунктирными линиями с двумя штрихами.

Таблица 7.3 – Построение развертки поверхности пирамиды







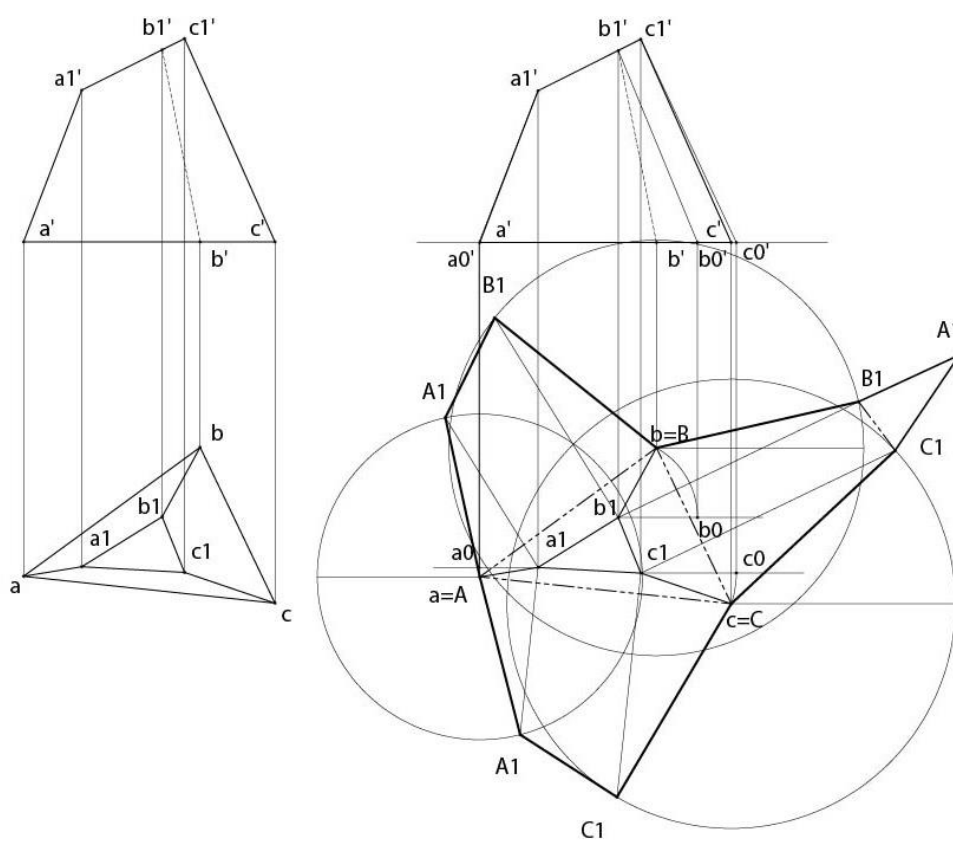
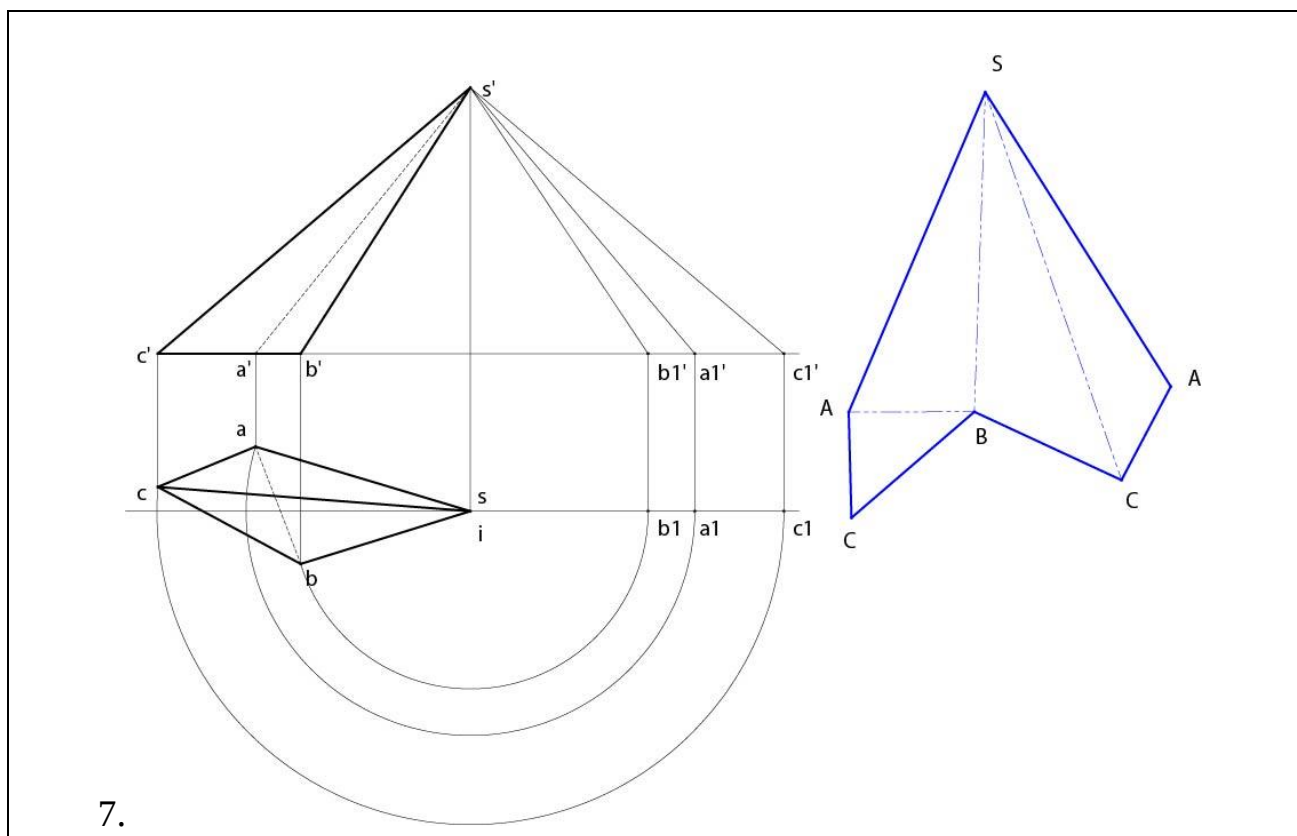


Рисунок 7.1 – Использование способа вращения вокруг проецирующей прямой для определения натуральных величин при построении развертки поверхности пирамиды

1.7.3. Развертывание линейчатых поверхностей

Линейчатая поверхность является развертываемой, если касательная плоскость, проведенная в какой-нибудь точке поверхности, касается во всех точках прямолинейной образующей, проходящей через эту точку. Другими словами, у развертываемой линейчатой поверхности касательная плоскость во всех точках одной образующей постоянна. К числу развертываемых линейчатых поверхностей относятся три типа: коническая, цилиндрическая и торсы.

Развертки цилиндрических и конических поверхностей выполняются аналогично разверткам призматических и пирамидальных поверхностей. При этом цилиндрическая поверхность заменяется (аппроксимируется) вписанной многоугольной призматической поверхностью (обычно 12-угольной), а коническая поверхность заменяется вписанной многоугольной пирамидальной поверхностью, т.е. строятся приближенные развертки.

1.7.3.1. Развертка усеченного цилиндра

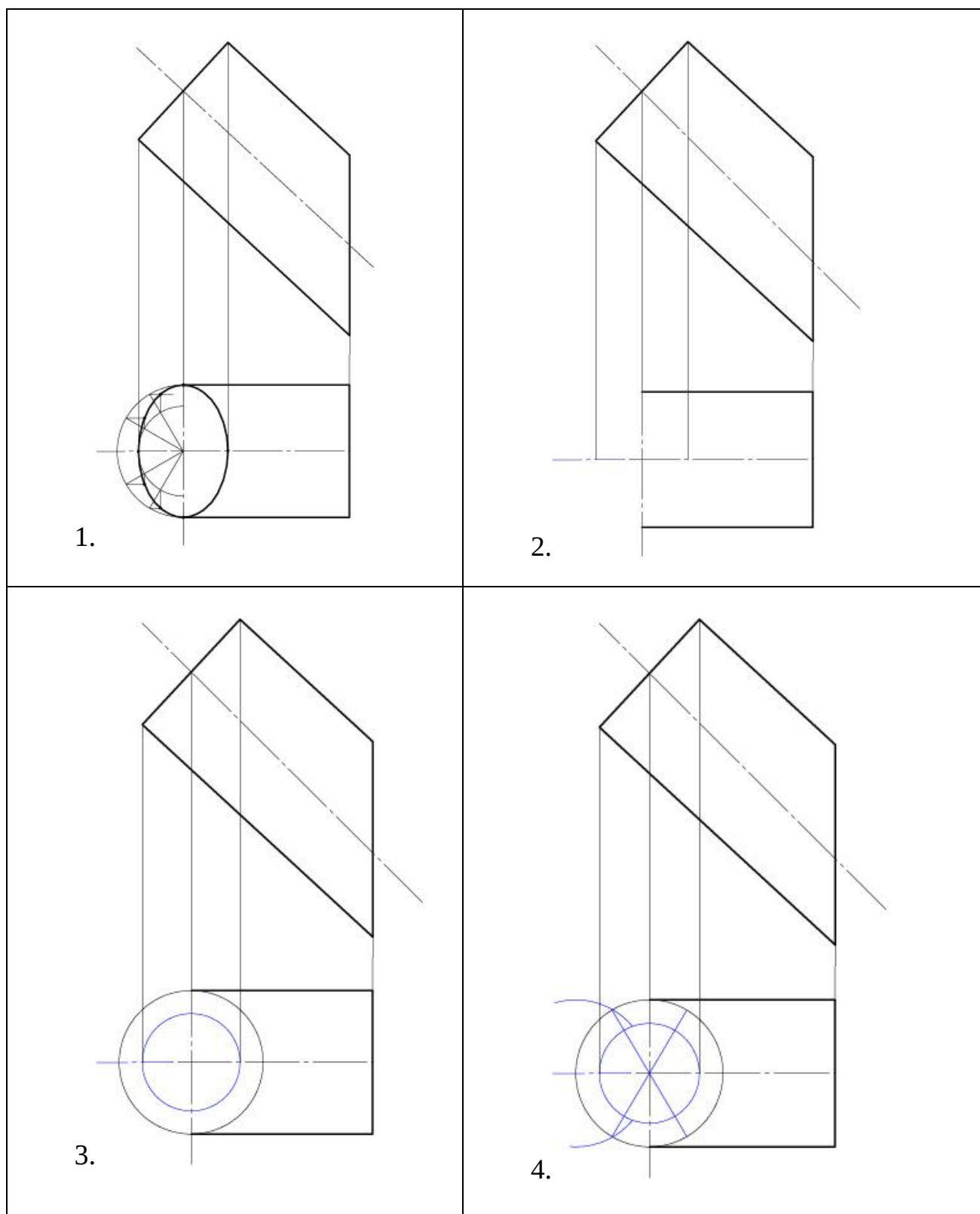
Развертку поверхности прямого кругового цилиндра можно выполнять следующими способами:

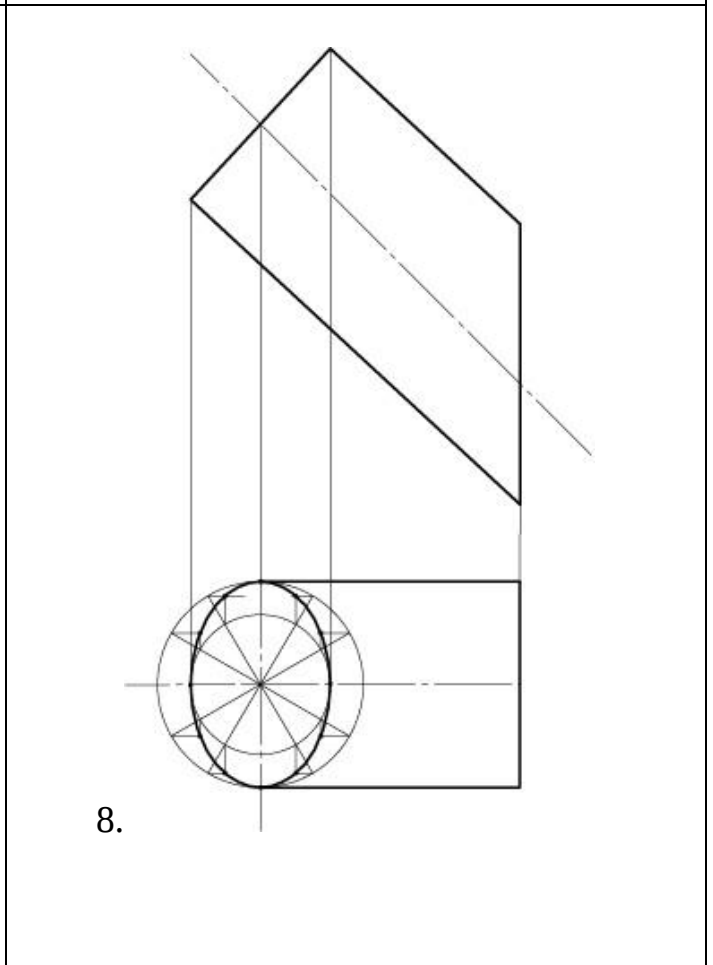
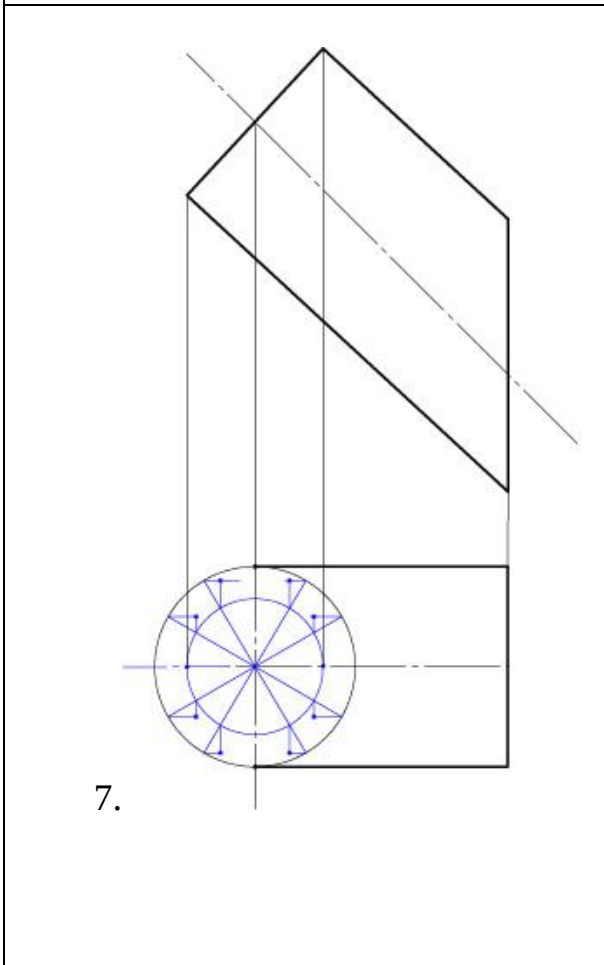
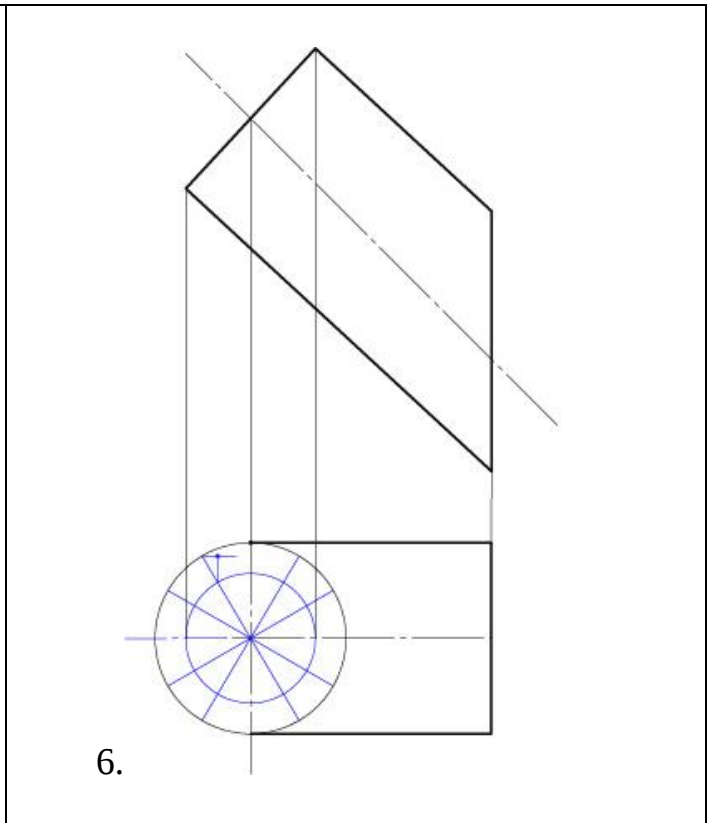
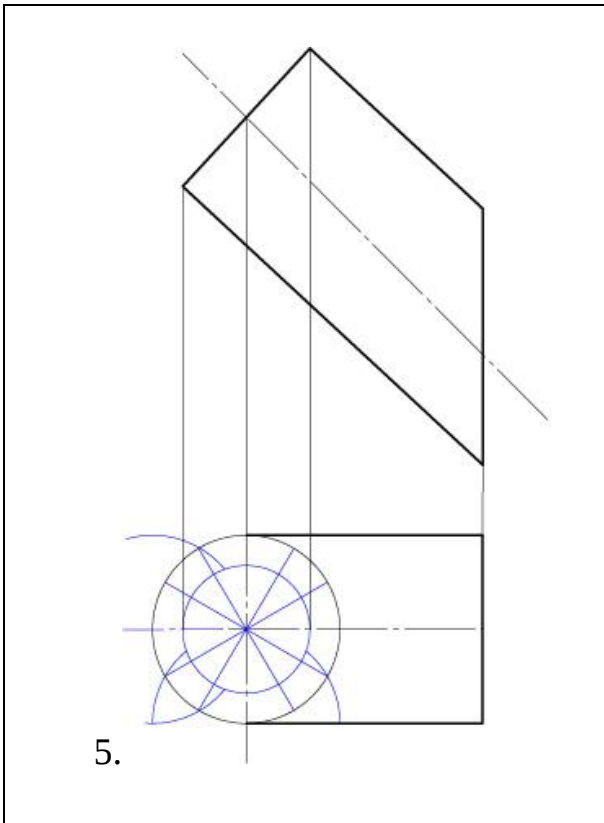
- способом нормального сечения на свободном поле чертежа, если образующие являются прямыми уровнями, а основания не перпендикулярны образующим;
- способом раскатки при тех же условиях (развертка является при этом продолжением проекции).

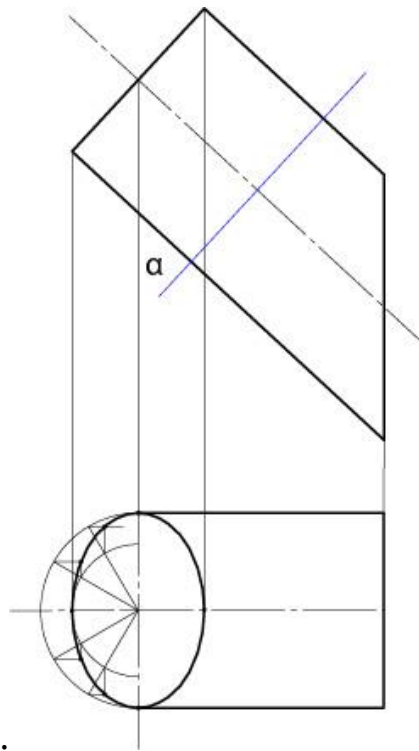
Графические алгоритмы для построения разверток поверхности цилиндра этими способами аналогичны вышеприведенным графическим алгоритмам для построения разверток призмы такими же способами.

Фигура, образуемая при развертывании поверхности цилиндра, представляет собой «отпечаток», полученный при качении цилиндра по плоскости чертежа. Если цилиндр прямой, то эта фигура является прямоугольником, ширина которого равна длине образующей цилиндра, а длина равна $h = 2\pi R$, где R – радиус основания цилиндра.

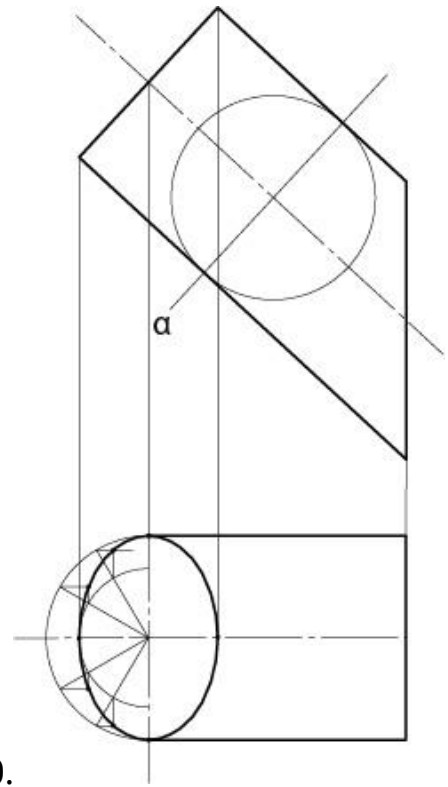
Таблица 7.4 – Пошаговое построение развертки поверхности прямого кругового цилиндра, наклоненного относительно горизонтальной плоскости проекций и срезанного по одному торцу профильной плоскостью



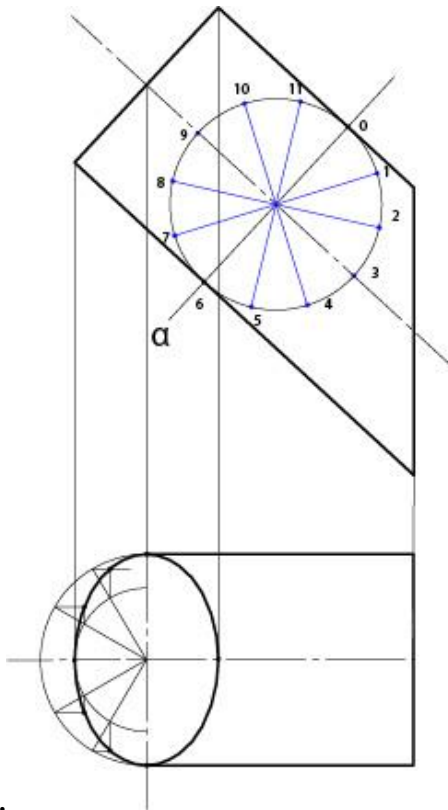




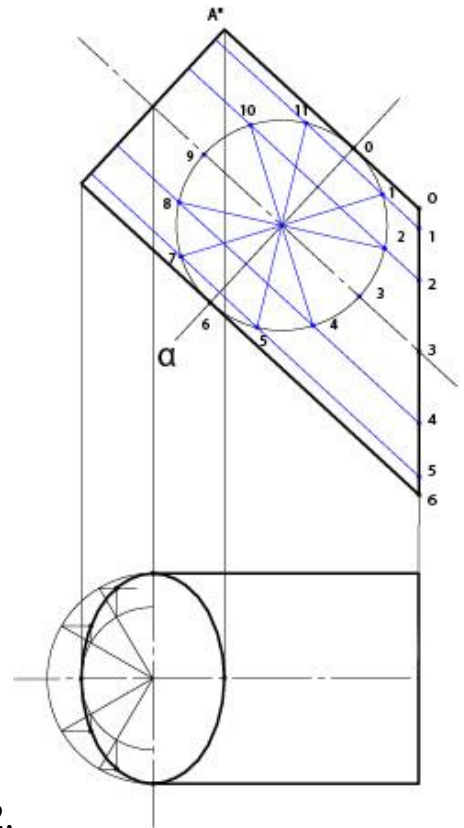
9.



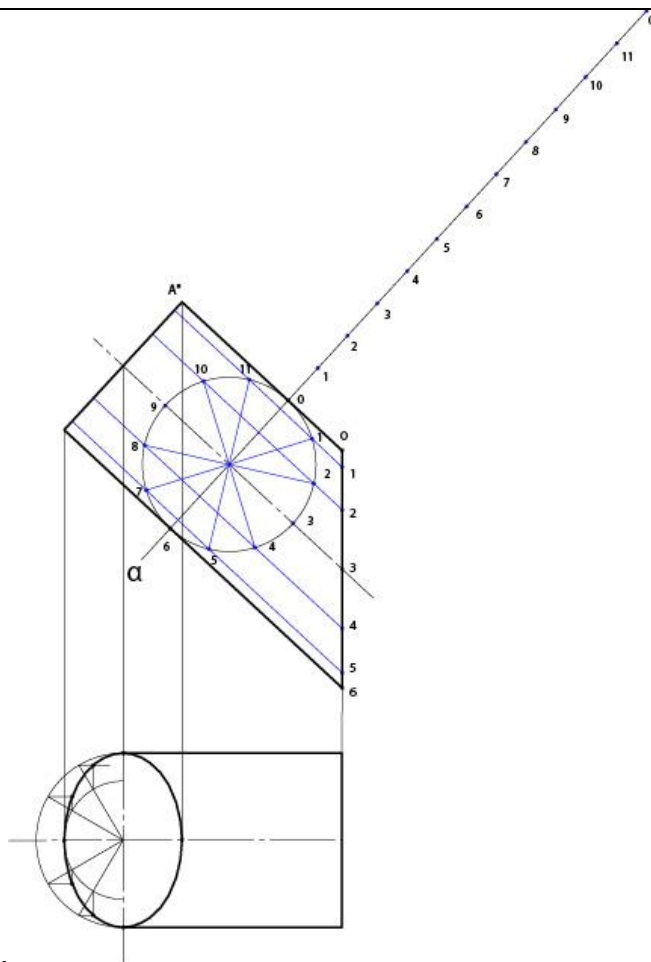
10.



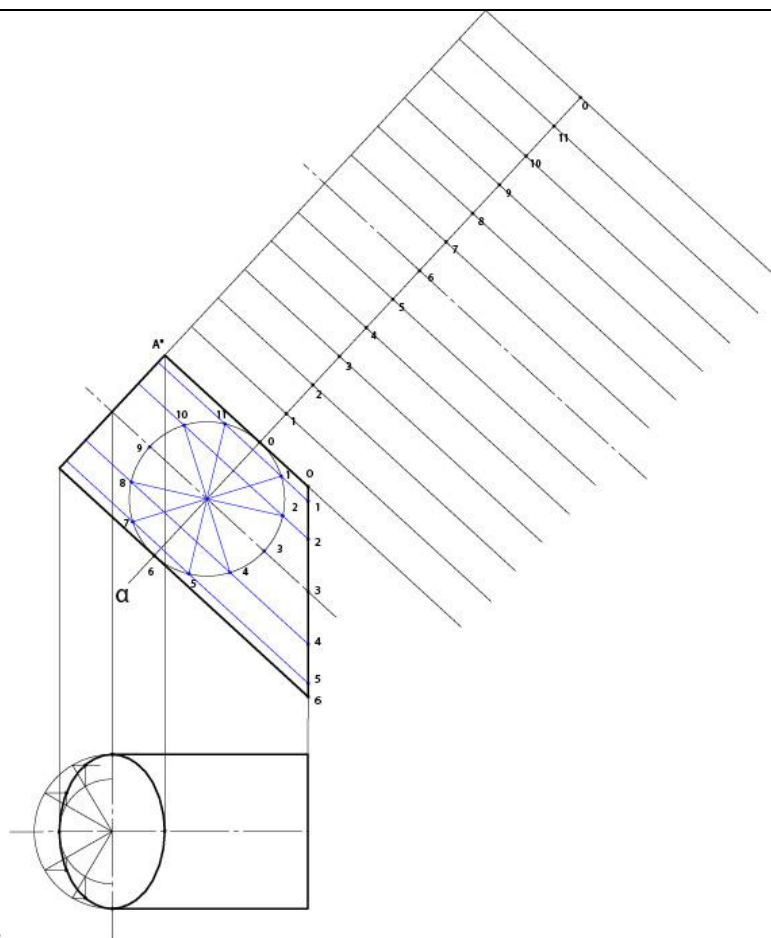
11.



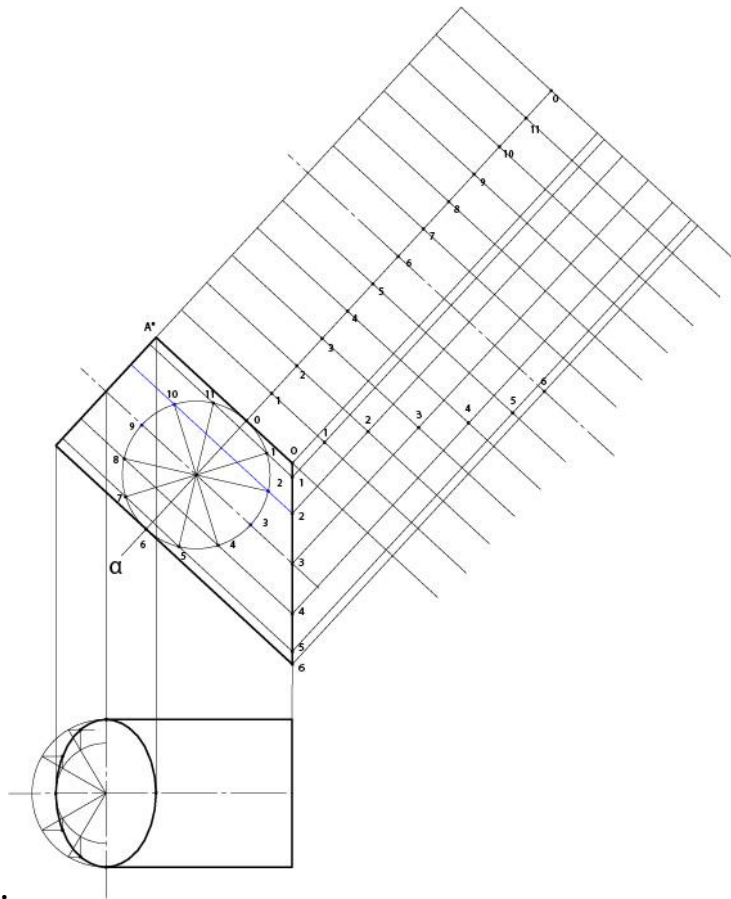
12.



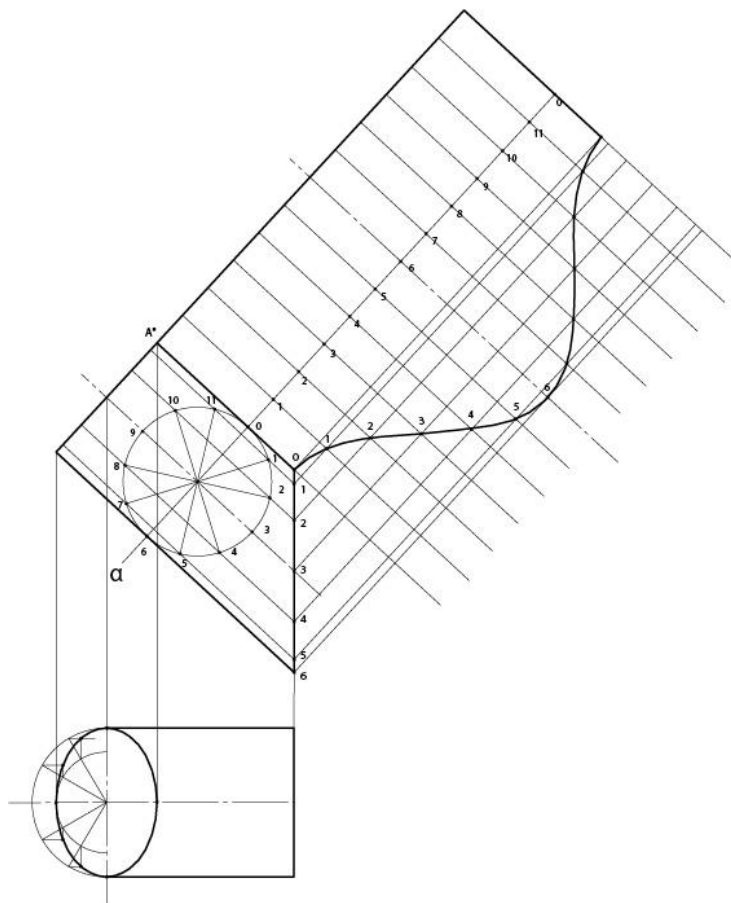
13.



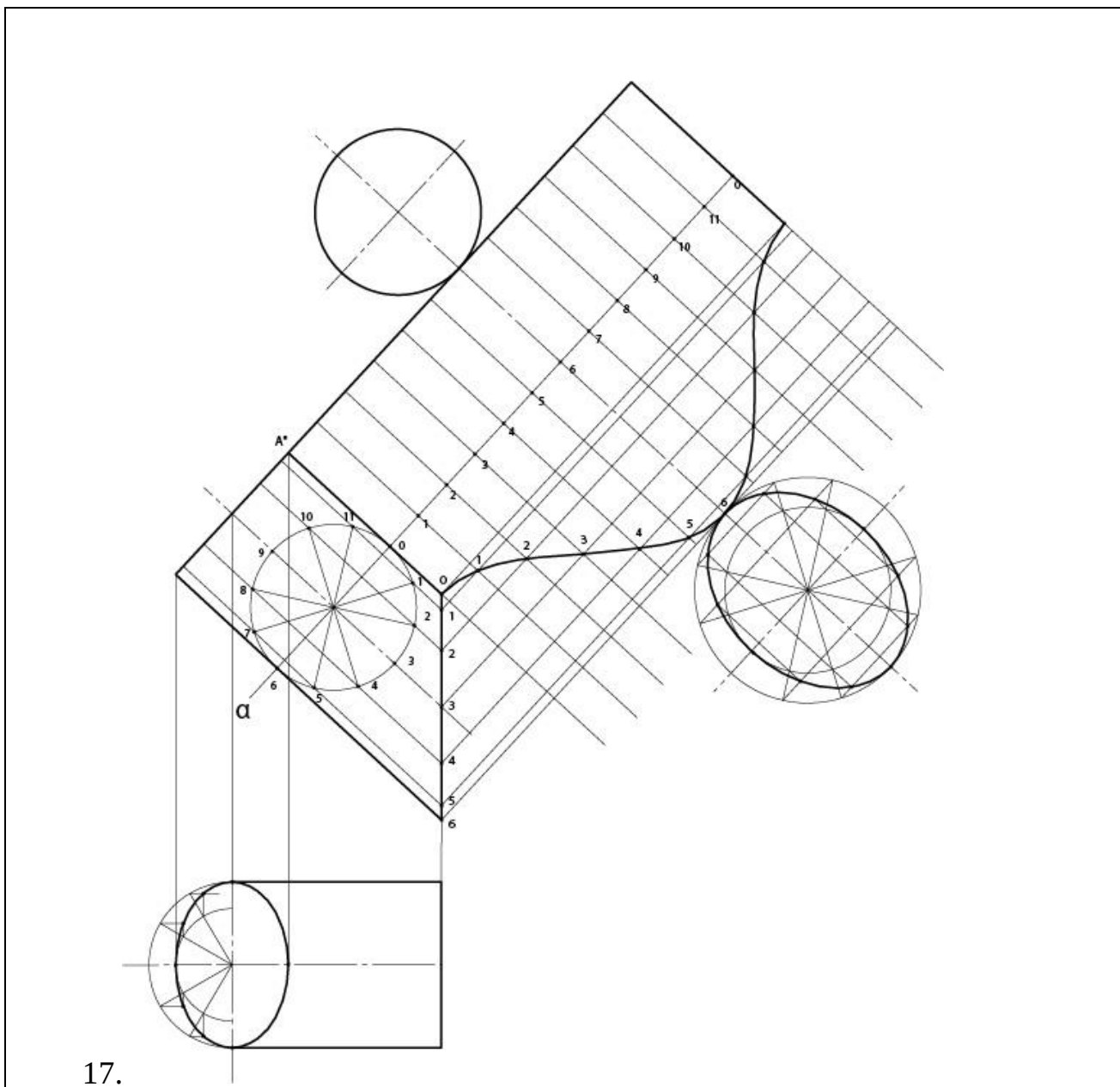
14.



15.



16.

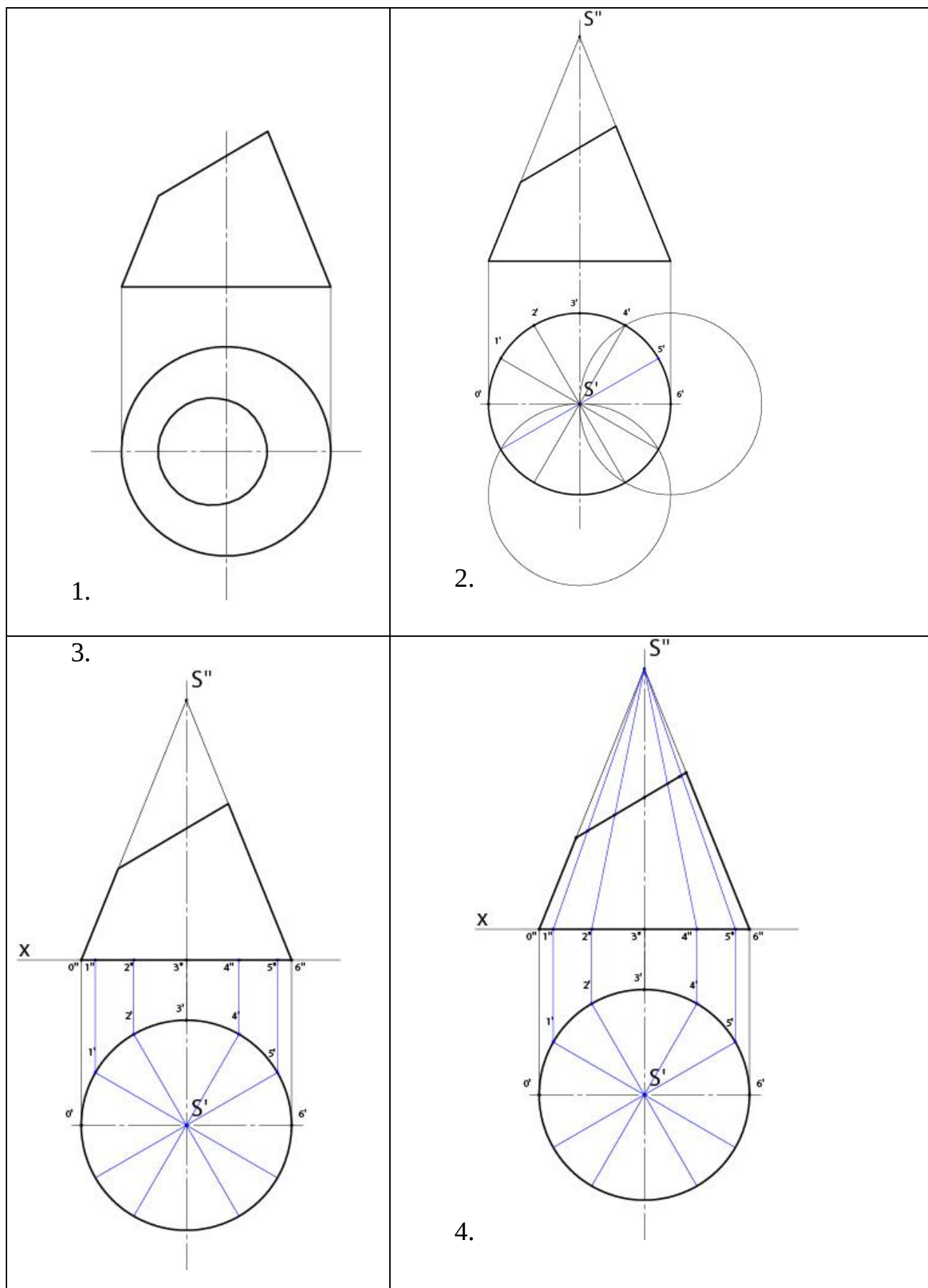


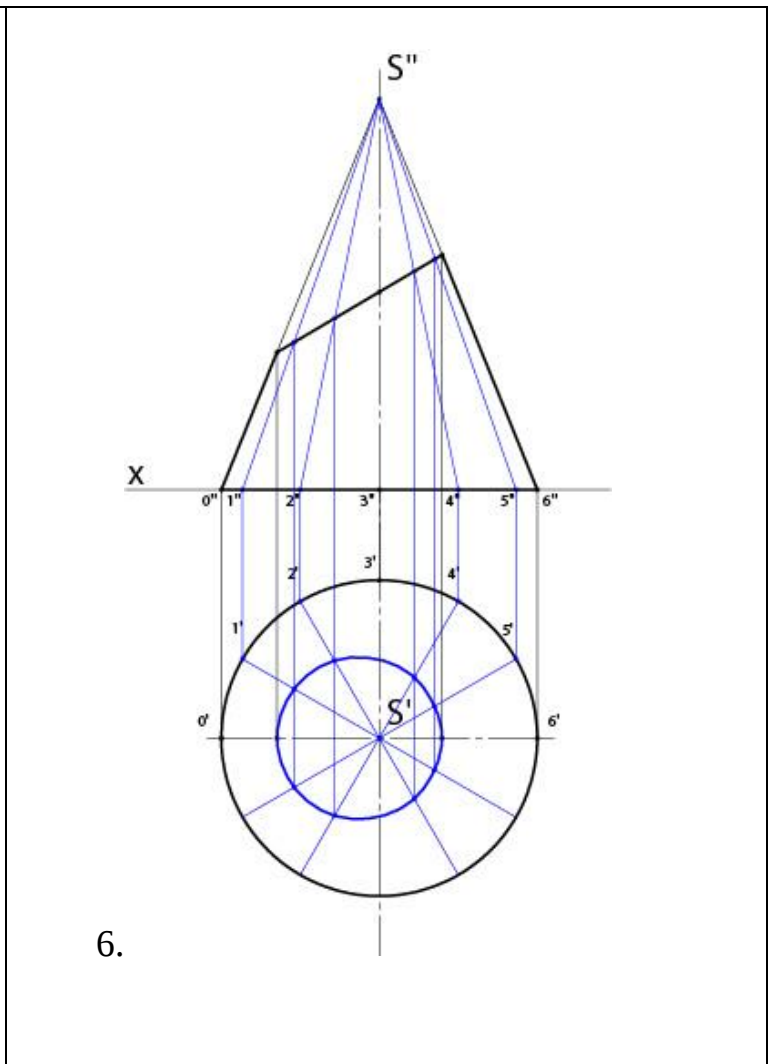
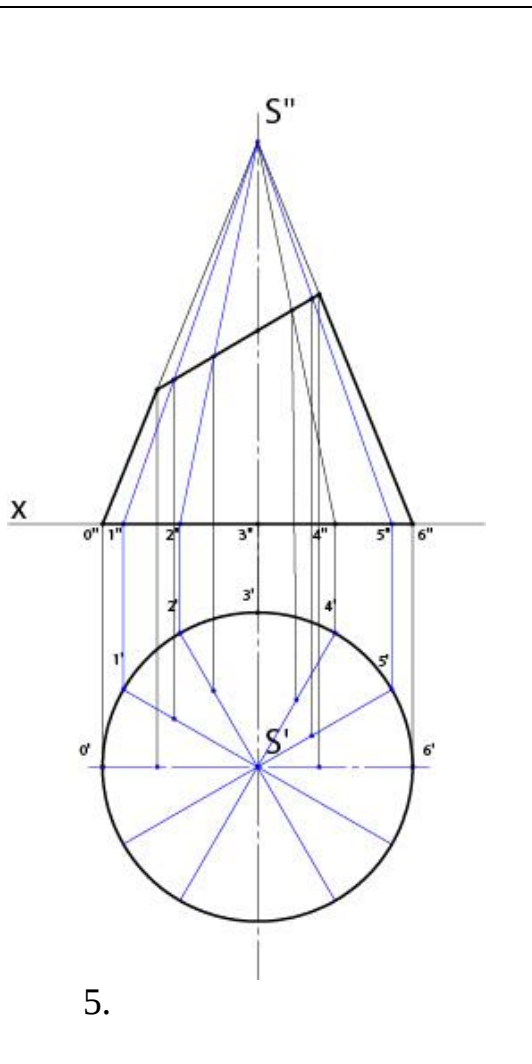
1.7.3.2. Развертка усеченного конуса

Разверткой поверхности прямого кругового конуса является сектор, радиус которого равен длине образующей конуса L , а угол сектора равен $\varphi = 360^\circ R/L$, где R – радиус основания конуса.

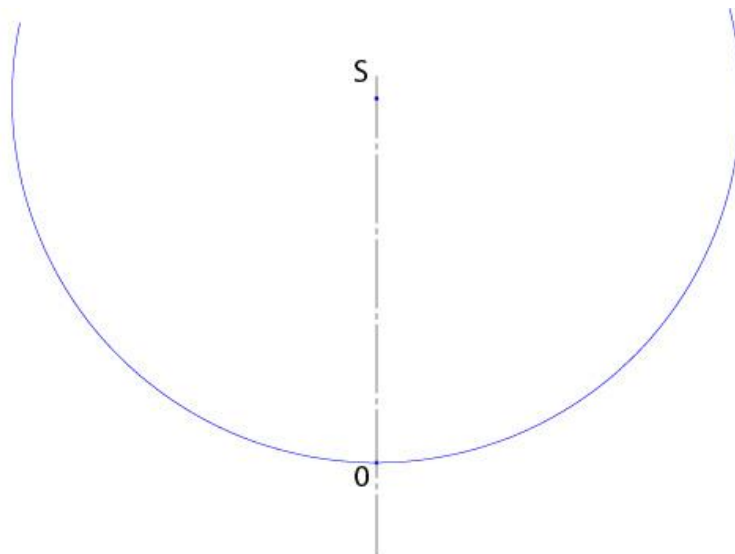
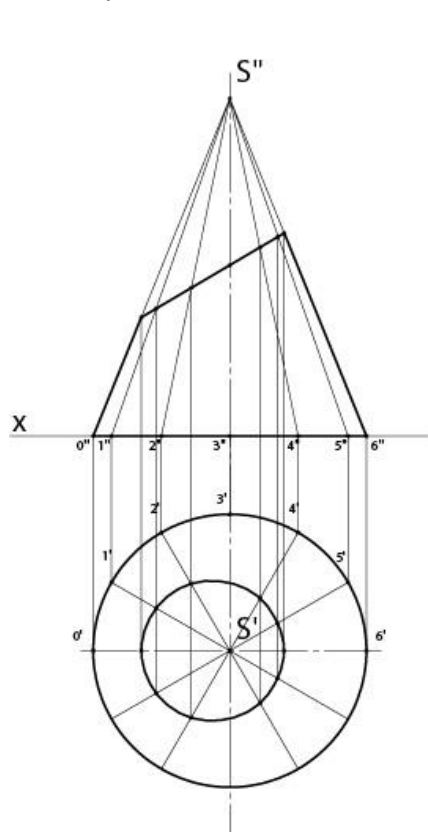
Построение развертки поверхности конуса выполняется по алгоритму построения развертки пирамиды с некоторыми дополнениями – необходимо аппроксимировать (заменить) конус 12-угольной пирамидой с ребрами-образующими.

Таблица 7.5 – Пошаговое построение развертки поверхности прямого кругового конуса со срезом фронтально-проецирующей плоскостью

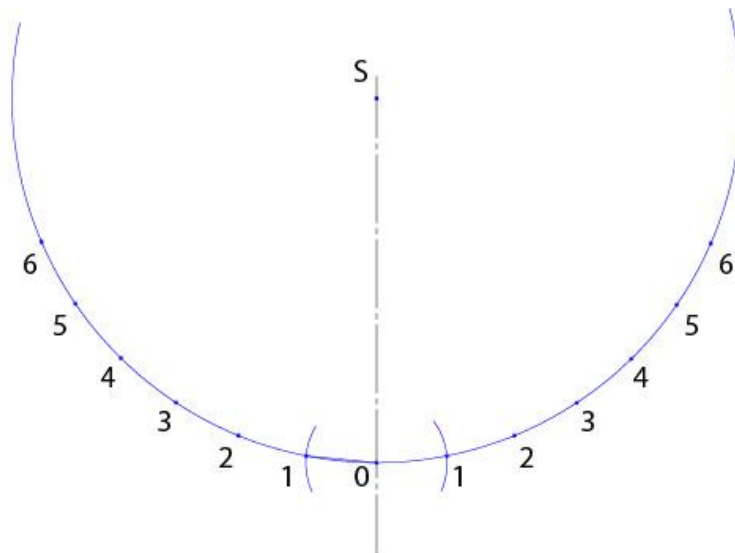
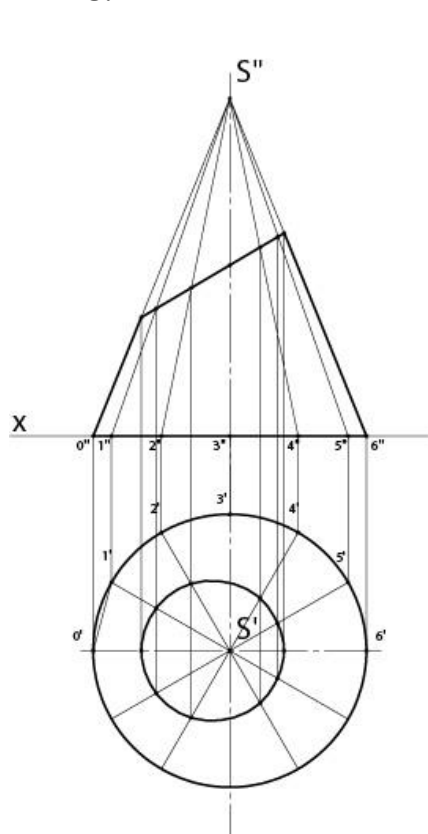




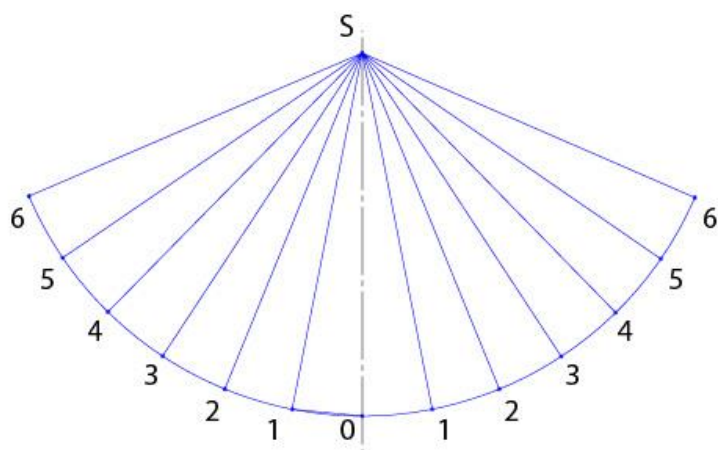
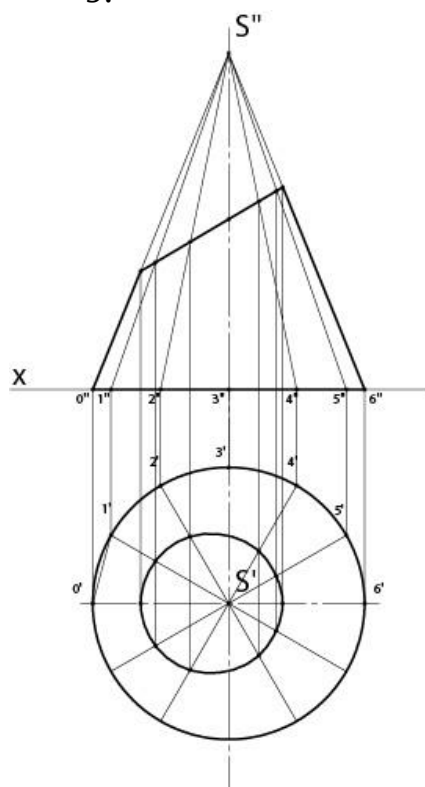
7.



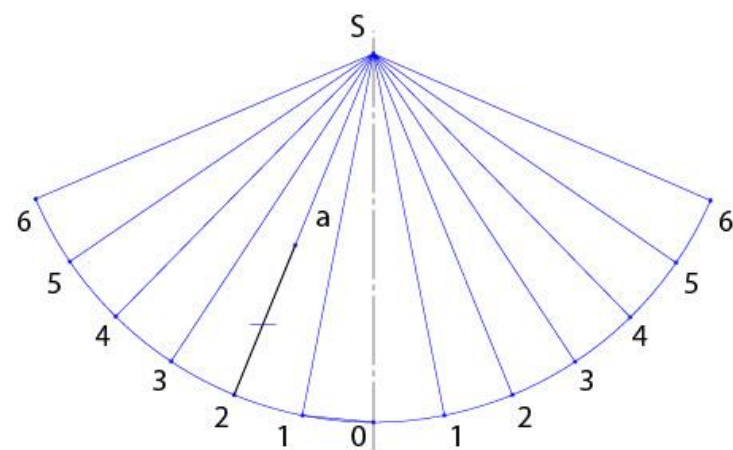
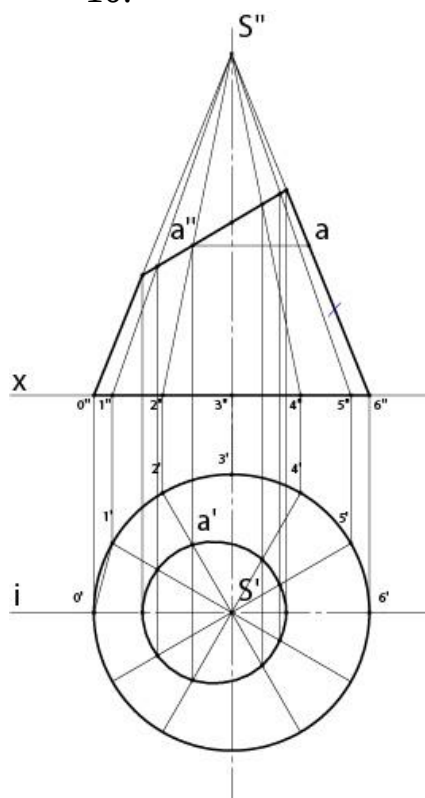
8.



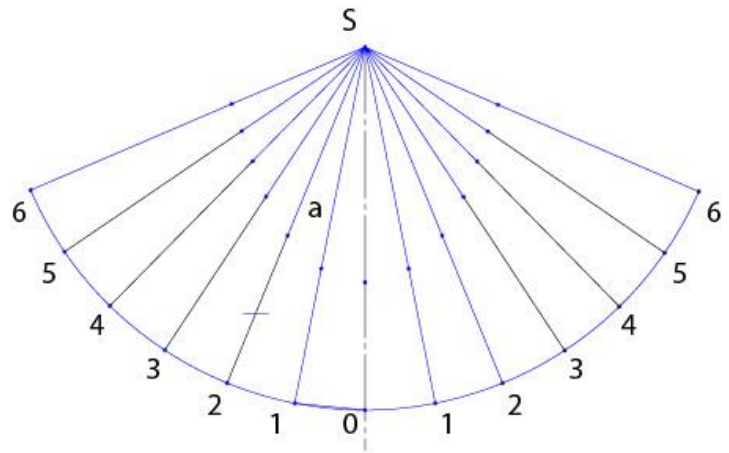
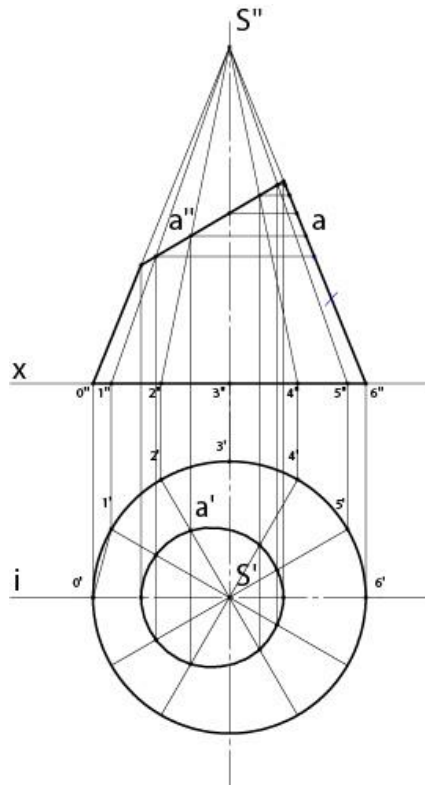
9.



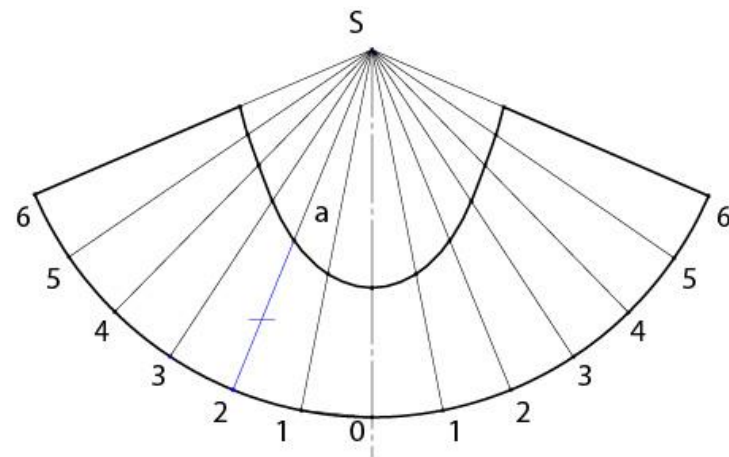
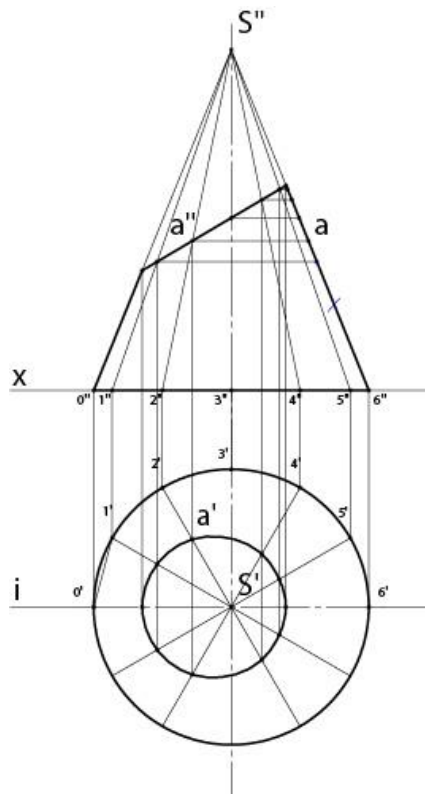
10.



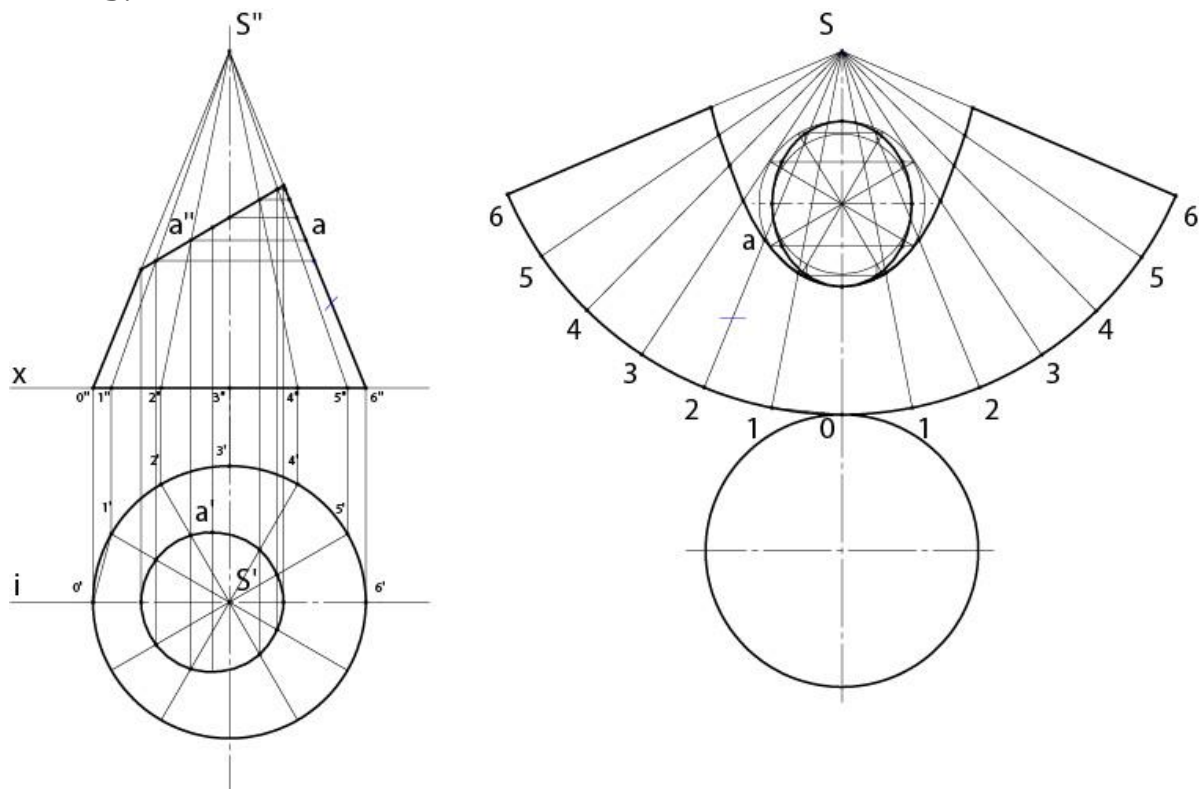
11.



12.



13.



1.7.4. Условное развертывание поверхностей вращения

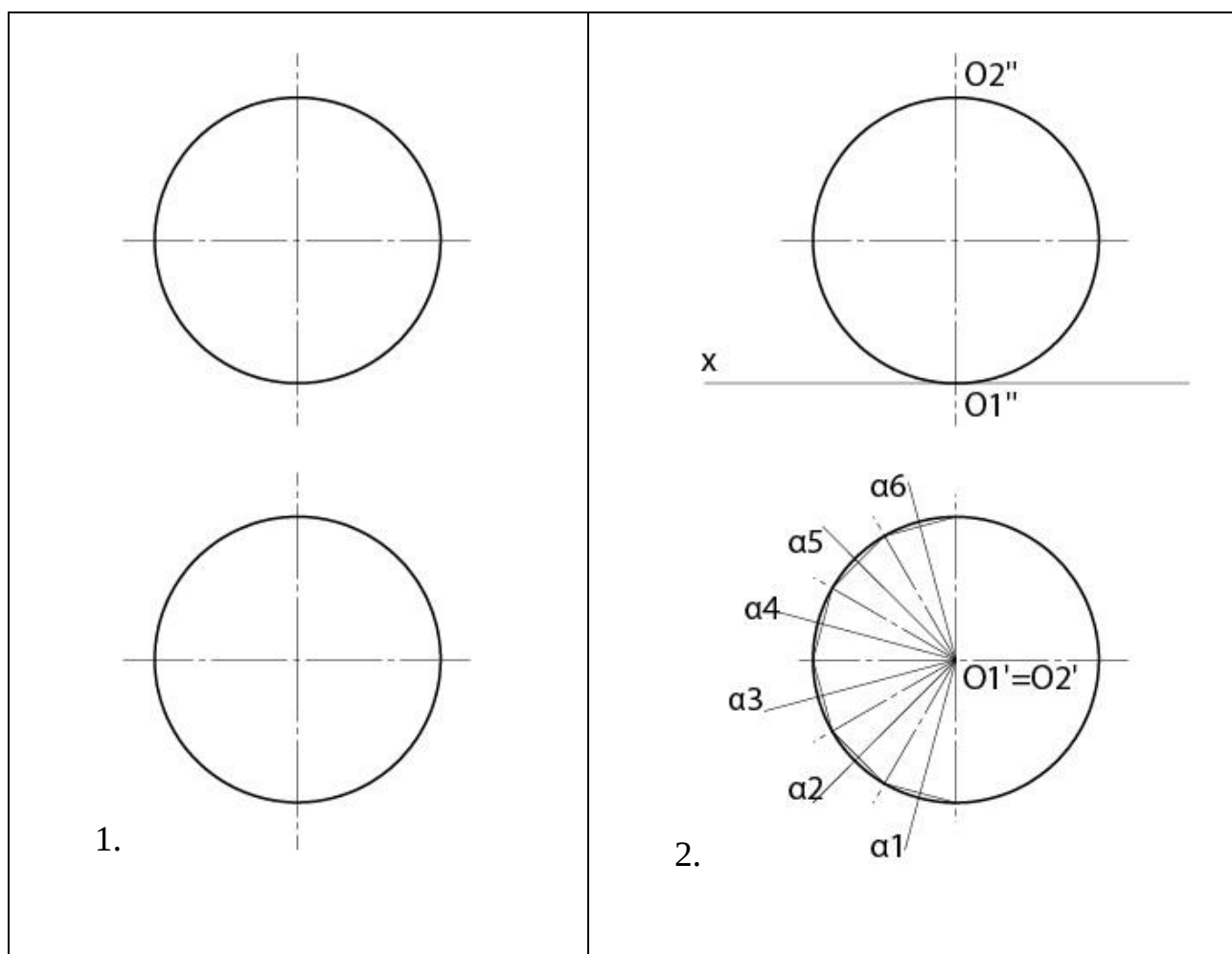
Развертки неразвертываемых поверхностей называют *условными* (строго говоря, у таких поверхностей разверток не может быть). Для построения условных разверток поверхностей вращения применяют:

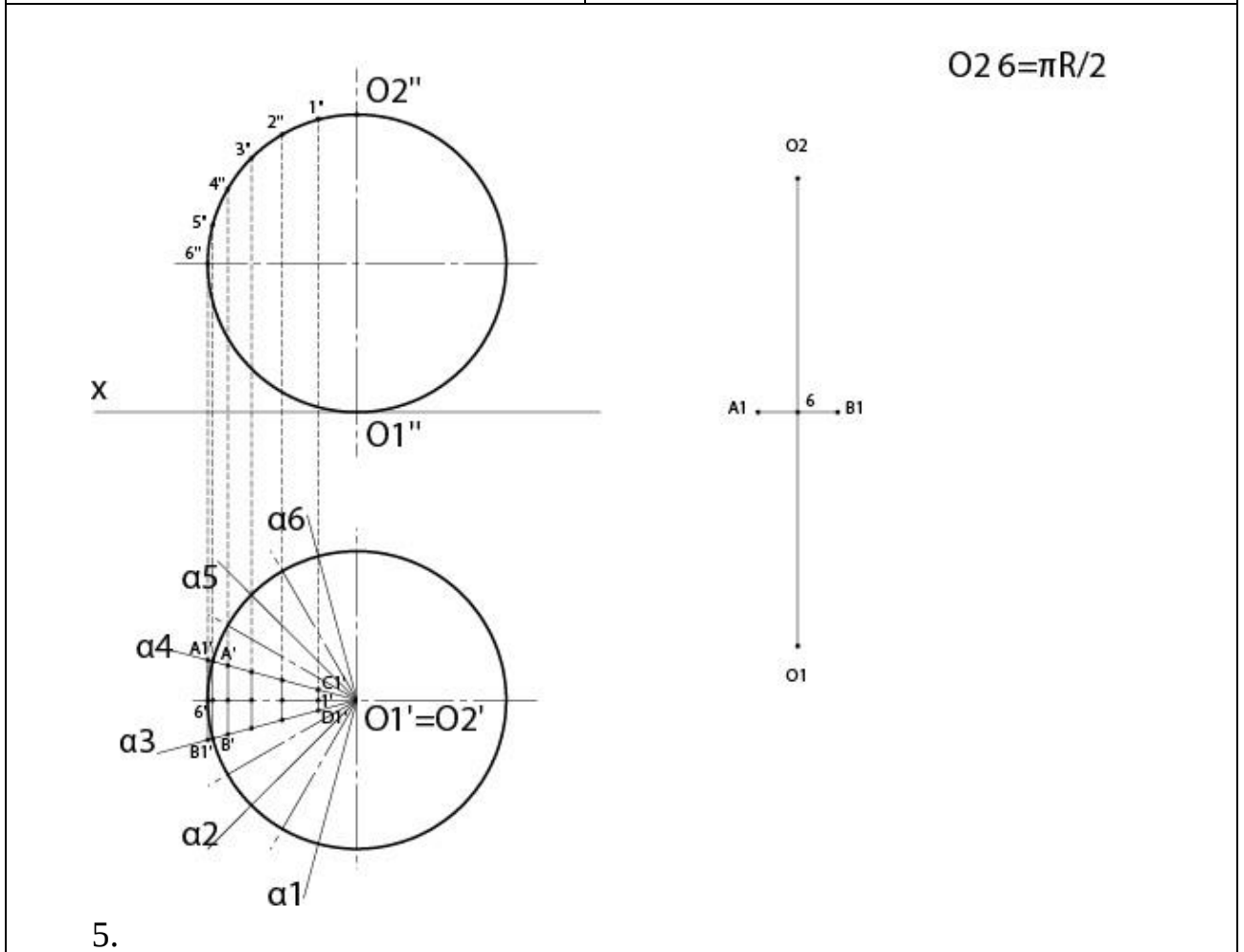
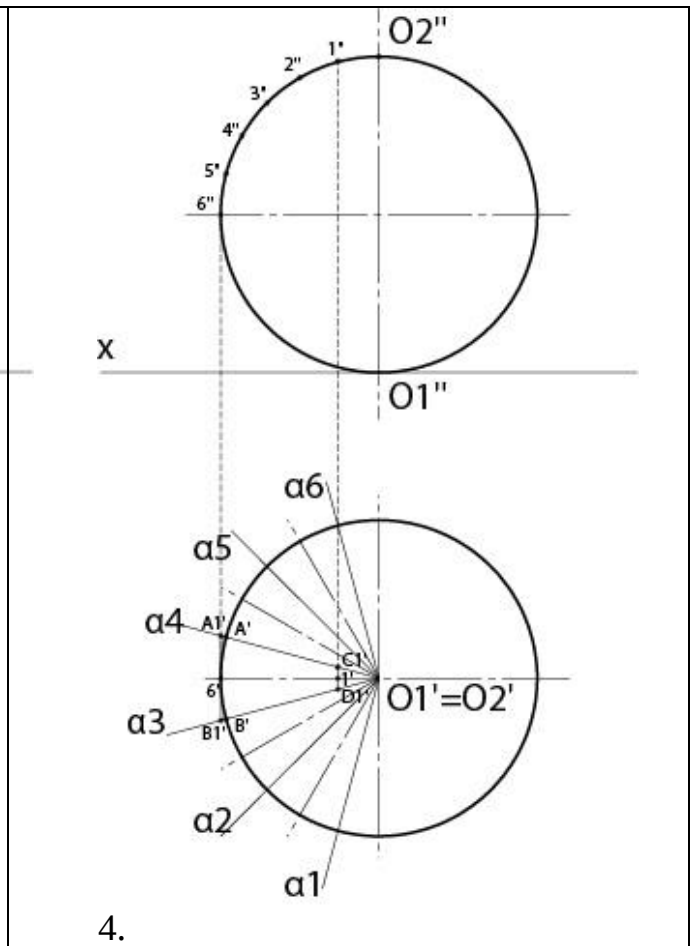
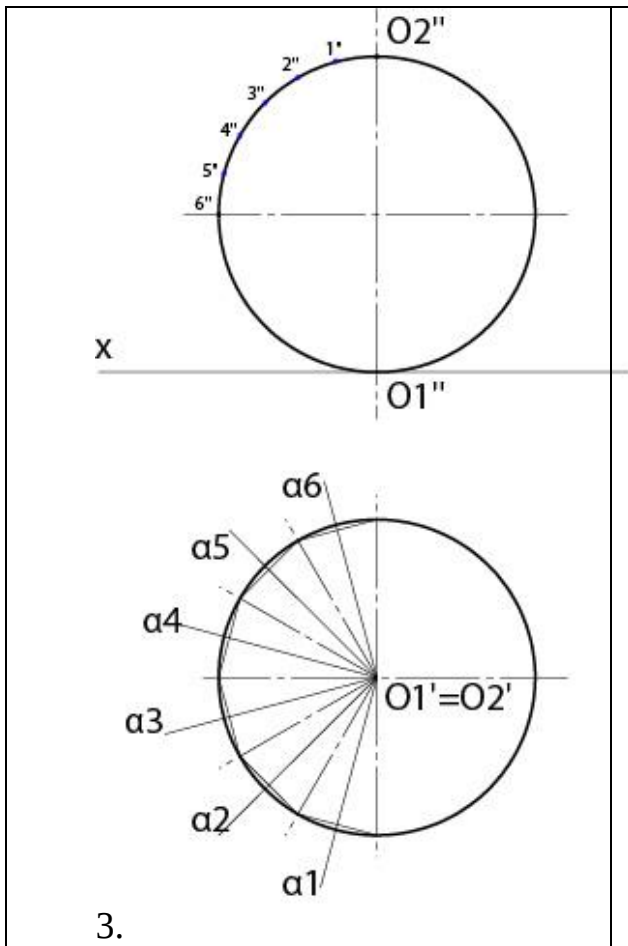
- способ вспомогательных цилиндров;
- способ вспомогательных конусов.

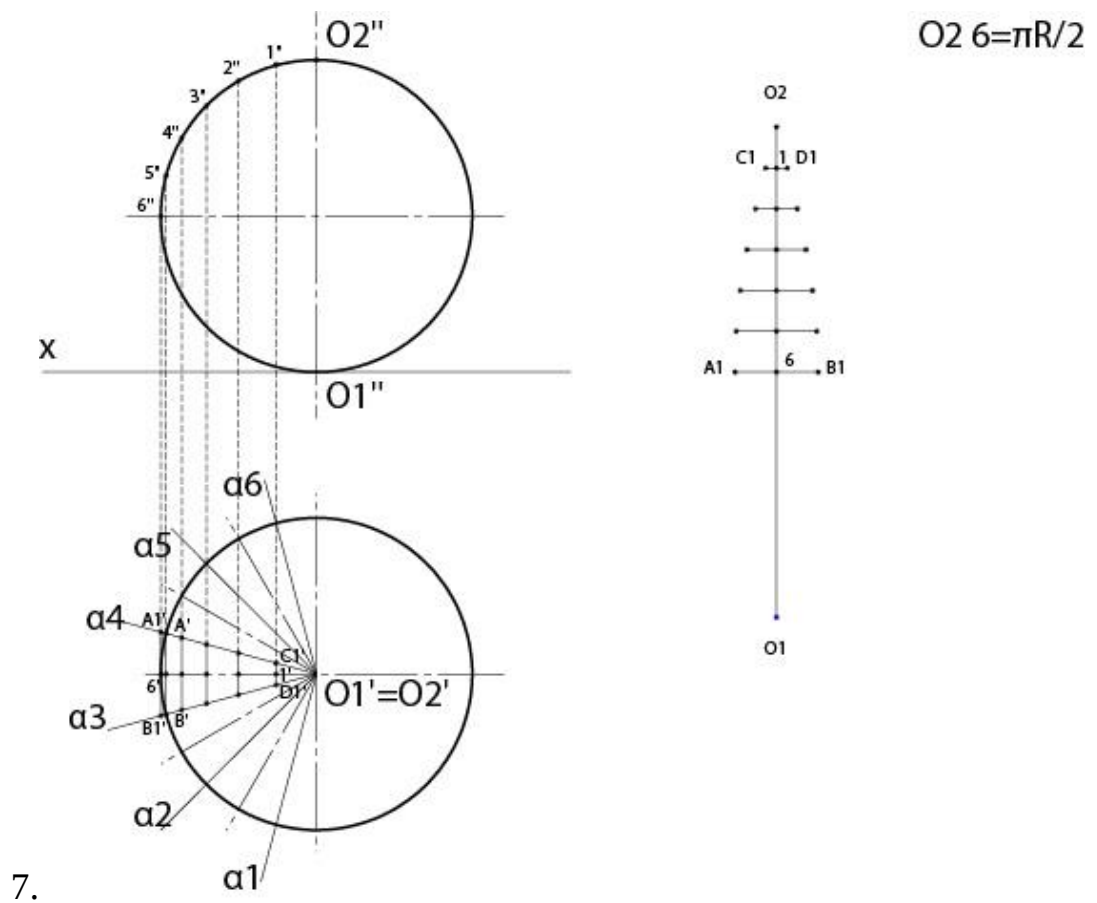
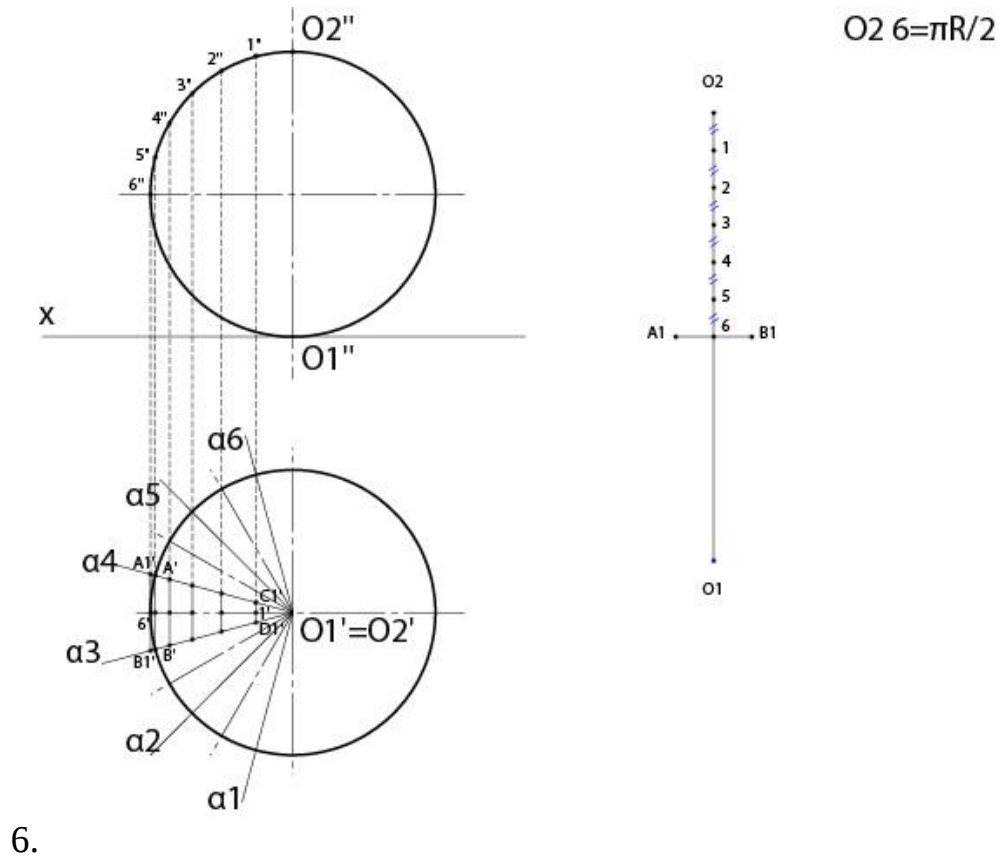
На условных развертках всегда присутствуют разрывы, что, по большому счету, является нарушением одного из основных свойств развертки (такие разрывы можно наблюдать на развертках всех неразвертываемых поверхностей). Но другими способами совместить неразвертываемые поверхности с плоскостью на чертеже невозможно.

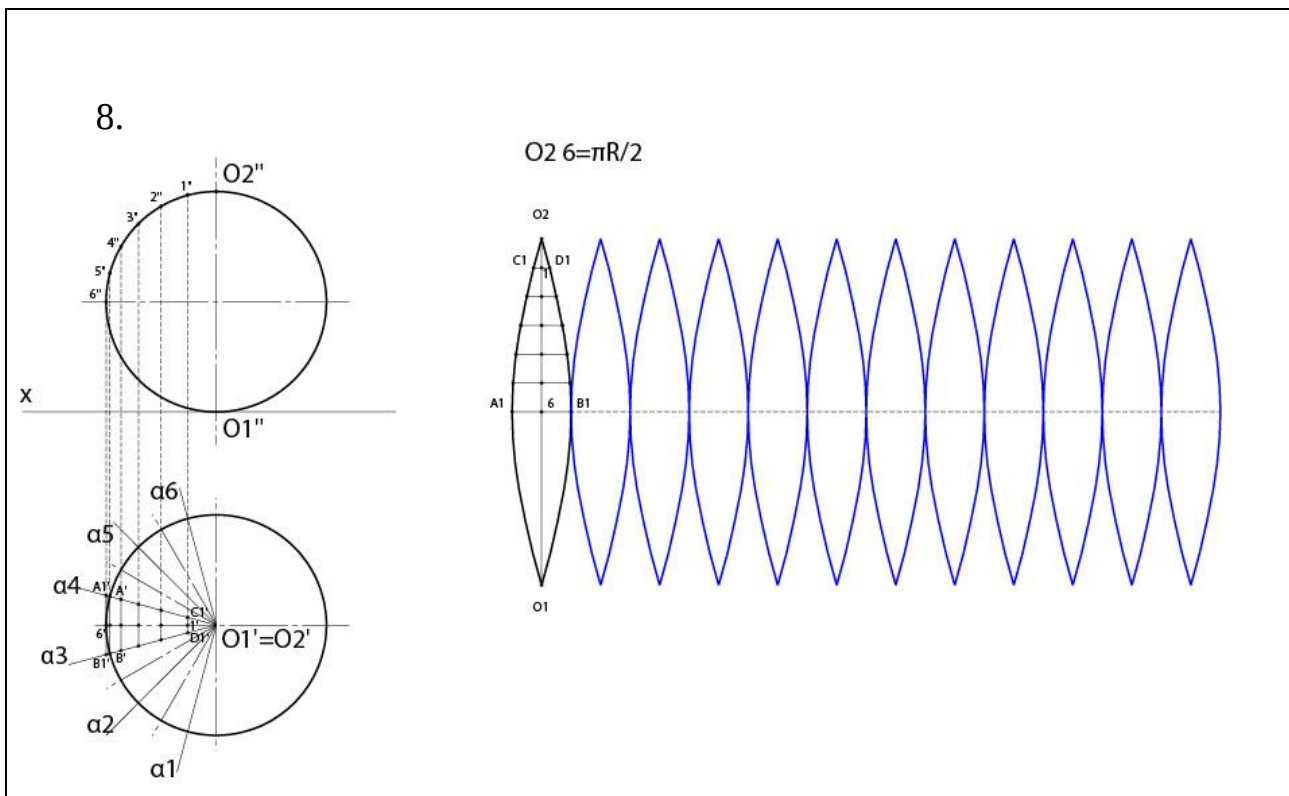
Способ вспомогательных цилиндров заключается в следующем. Заданную поверхность вращения разбивают на сравнительно узкие, равные между собой части, и каждую часть заменяют цилиндрической поверхностью, касательной к заданной поверхности вращения.

Таблица 7.6 – Пошаговое построение условной развертки сферы









1.8. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

1.8.1. Определение и свойства аксонометрических проекций

Прямоугольные проекции предмета на взаимно перпендикулярные плоскости проекций по методу Г. Монжа позволяют точно передать на чертеже форму предмета и его размеры, они просты в построении, но не обладают наглядностью.

Для наглядного изображения предмета существуют проекции, которые называют аксонометрическими, или аксонометриями (в переводе с древнегреческого – осеизмерение).

Аксонометрическая проекция – это параллельная проекция предмета вместе с системой прямоугольных координат, к которым этот предмет отнесен в пространстве, на некоторую плоскость аксонометрических проекций.

Чтобы обеспечить наглядность предмета оп одному изображению на одной аксонометрической плоскости, направление проецирования (направление проецирующих лучей) не должно быть параллельным координатным плоскостям проекций, относительно которых выполняются проекции предмета на чертеже.

Аксонометрические проекции, как проекции параллельные, имеют некоторые их свойства:

- аксонометрическая проекция отрезка прямой также является прямой;
- если отрезки прямых параллельны на предмете, они также параллельны на его аксонометрической проекции;
- аксонометрической проекцией окружности на аксонометрии в общем случае является эллипс.

1.8.2. Классификация аксонометрических проекций

Для определения степени искажения размеров предмета на аксонометрических проекциях введено понятие *коэффициентов искажения* по аксонометрическим осям.

Если на осях x , y и z системы натуральных прямоугольных координат отложить от точки O (начало координат) равные масштабные отрезки $e_x = e_y = e_z$, то в системе аксонометрических координатных осей получают искаженные проекции этих отрезков e_{xa} , e_{ya} и e_{za} .

Отношения аксонометрических проекций масштабных отрезков к натуральным величинам масштабных отрезков и называются коэффициентами искажения по аксонометрическим осям:

$$K_x = e_{xa} / e_x \quad K_y = e_{ya} / e_y \quad K_z = e_{za} / e_z$$

Расчетные коэффициенты искажения имеют дробные значения, неудобные для выполнения аксонометрических построений (0,82; 0,47 и т.д.).

Для построения на чертежах аксонометрических проекций пользуются так называемыми *приведенными* коэффициентами искажения, округленными до 1 или 0,5.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения аксонометрические проекции разделяются:

1. на *изометрические*, у которых все коэффициенты искажения равны, т.е. $K_x = K_y = K_z$ (i_{zos} – равный);
2. *диметрические*, у которых два коэффициента равны, т.е. $K_x = K_z$, а K_y им не равен (di – двойной);
3. *триметрические*, у которых все коэффициенты разные ($treis$ – три).

В зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости аксонометрий (угла проецирования) аксонометрические проекции разделяются:

1. на *прямоугольные* – проецирующие лучи перпендикулярны аксонометрической плоскости проекций (угол проецирования равен 90°);
2. *косоугольные* – проецирующие лучи не перпендикулярны аксонометрической плоскости проекций (угол проецирования не равен 90°).

1.8.3. Теорема К. Польке – Г. Шварца

Аксонометрических проекций можно получить бесконечное множество, как может быть бесконечное количество аксонометрических плоскостей проекций и направлений проецирования к ним.

Основная теорема аксонометрических проекций была сформулирована немецким геометром К. Польке: «Любые три отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, могут быть приняты за параллельные проекции (то есть аксонометрические проекции) трех равных и взаимно перпендикулярных отрезков (аксонометрических осей) в пространстве».

Г. Шварц, немецкий математик, обобщил теорему К. Польке, доказав, что «любой полный четырехугольник на плоскости всегда является параллельной проекцией некоторого масштабного тетраэдра (пирамиды), имеющего равные и

взаимно перпендикулярные ребра» (диагонали четырехугольника можно рассматривать как аксонометрические оси). Эту обобщенную теорему и называют теоремой К. Польке – Г. Шварца.

1.8.4. Основные виды стандартной аксонометрии

Основные виды стандартной аксонометрии зафиксированы в разделе ГОСТ 2.317-69 «Аксонометрические проекции».

В стандарте даны пять видов аксонометрических проекций:

1. прямоугольная изометрия;
2. прямоугольная диметрия;
3. косоугольная фронтальная диметрия;
4. косоугольная фронтальная изометрия;
5. косоугольная горизонтальная изометрия.

Для прямоугольных аксонометрий получена расчетная формула по коэффициентам искажения: $K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2$, т.е. сумма квадратов коэффициентов искажения равна двум.

В *прямоугольной изометрии* коэффициенты искажения равны, и, в соответствии с формулой, получается, что $K_x = K_y = K_z = 0,82$. Для построения прямоугольной изометрии пользуются приведенными коэффициентами искажения, округленными до единицы, то есть $K_x = K_y = K_z = 1$.

Аксонометрическая плоскость прямоугольной изометрии равно наклонена ко всем трем плоскостям проекций и пересекает эти плоскости проекций по равностороннему треугольнику, который называют треугольником следов. Следовательно, аксонометрические оси прямоугольной изометрии являются высотами, биссектрисами и медианами этого треугольника, а точка O_a их пересечения является точкой начала аксонометрических координат. Как известно из геометрии, углы между высотами равностороннего треугольника равны 120° , следовательно, и углы между аксонометрическими осями также равны 120° (рисунок 8.1).

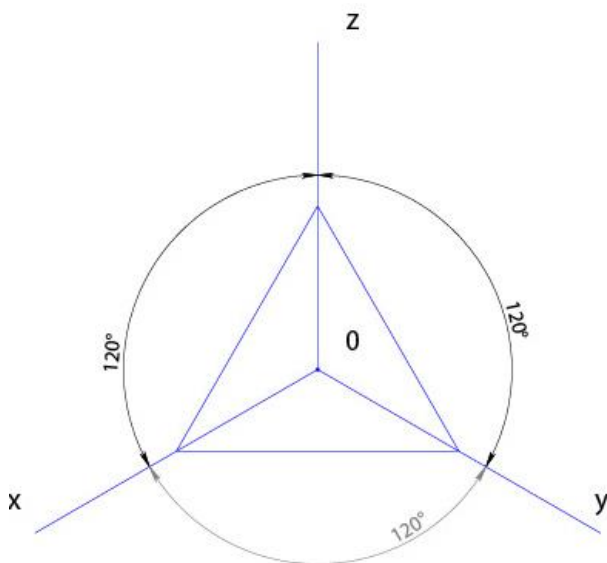


Рисунок 8.1 – Расположение осей прямоугольной изометрии

В *прямоугольной диметрии* коэффициенты искажения по аксонометрическим осям **x** и **z** равны между собой, а коэффициент искажения по оси **y** принят равным их половине.

Аксонометрические оси по математическим расчетам располагаются относительно горизонтальной линии следующим образом: ось **z** расположена вертикально, ось **x** – под углом $7^{\circ}10'$, ось **y** – под углом $41^{\circ}25'$ (рисунок 8.2).

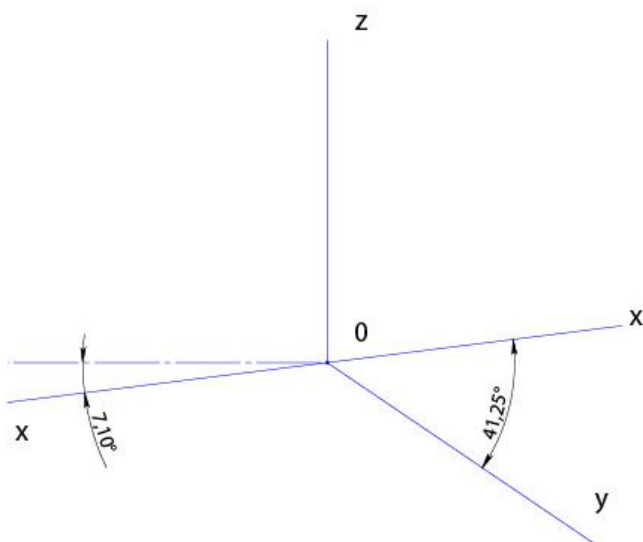


Рисунок 8.2 – Расположение осей прямоугольной диметрии

При построении *косоугольной (фронтальной) диметрии* за основу берется плоскость проекций, параллельная фронтальной плоскости проекций. Поэтому на аксонометрии сохраняется угол 90° между аксонометрическими осями **x** и **z**, а ось **y** располагают под углом 45° к горизонтальной прямой (рисунок 8.3).

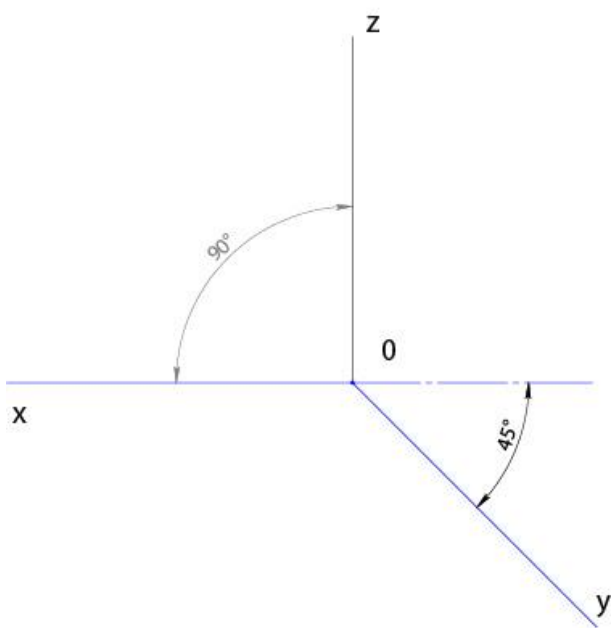


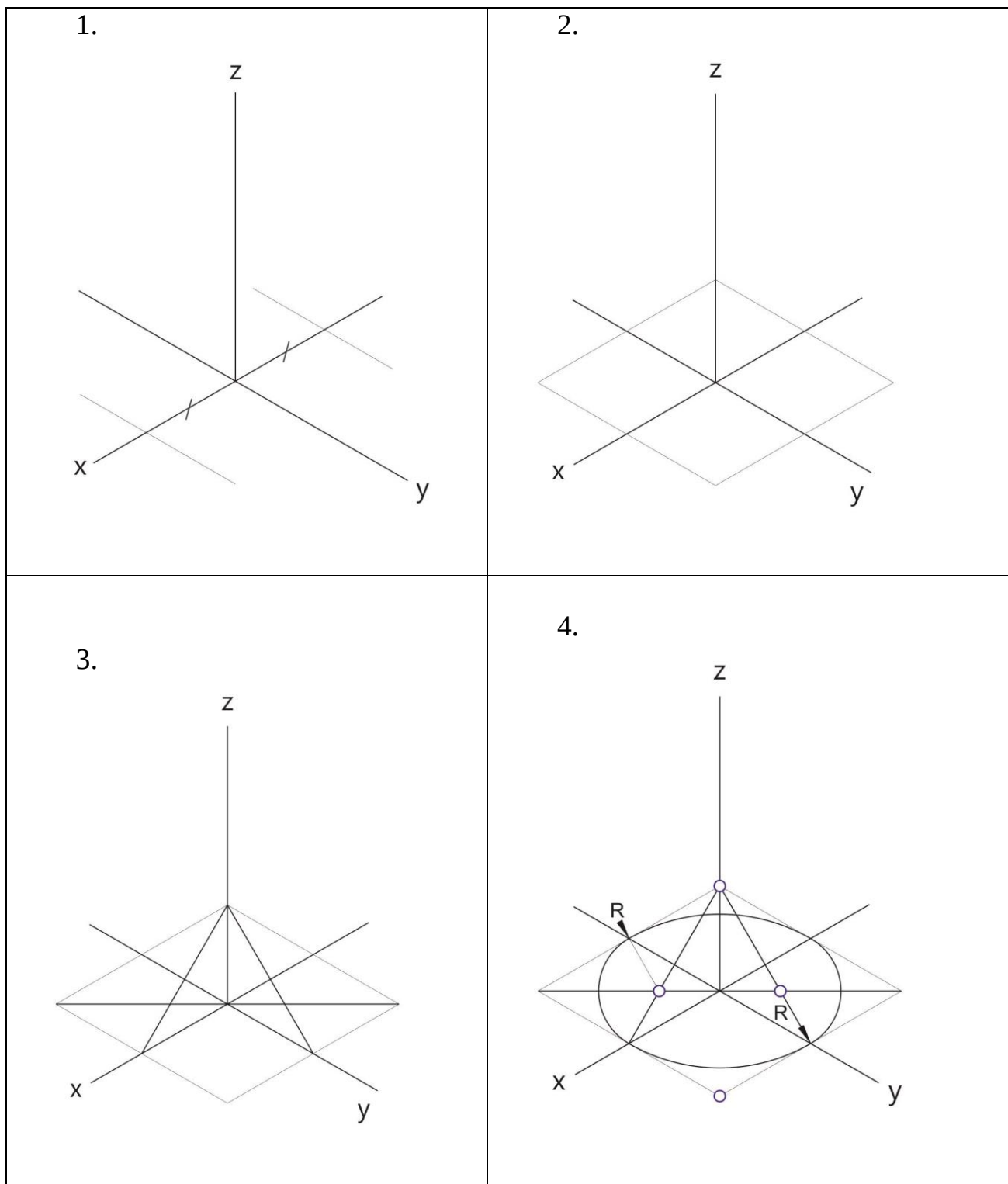
Рисунок 8.3 – Расположение осей косоугольной (фронтальной) диметрии

1.8.5. Примеры построения аксонометрических проекций

Окружности на проекциях проецируются на аксонометрическое изображение предмета в виде эллипсов, для построения которых в общем случае используют точки, принадлежащие окружности.

Для построения проекции эллипса в системе прямоугольной изометрии существует специальный графический прием. При использовании графического приема необходимо соотносить построение с радиусом окружности, заданным на ортогональных проекциях (таблица 8.1).

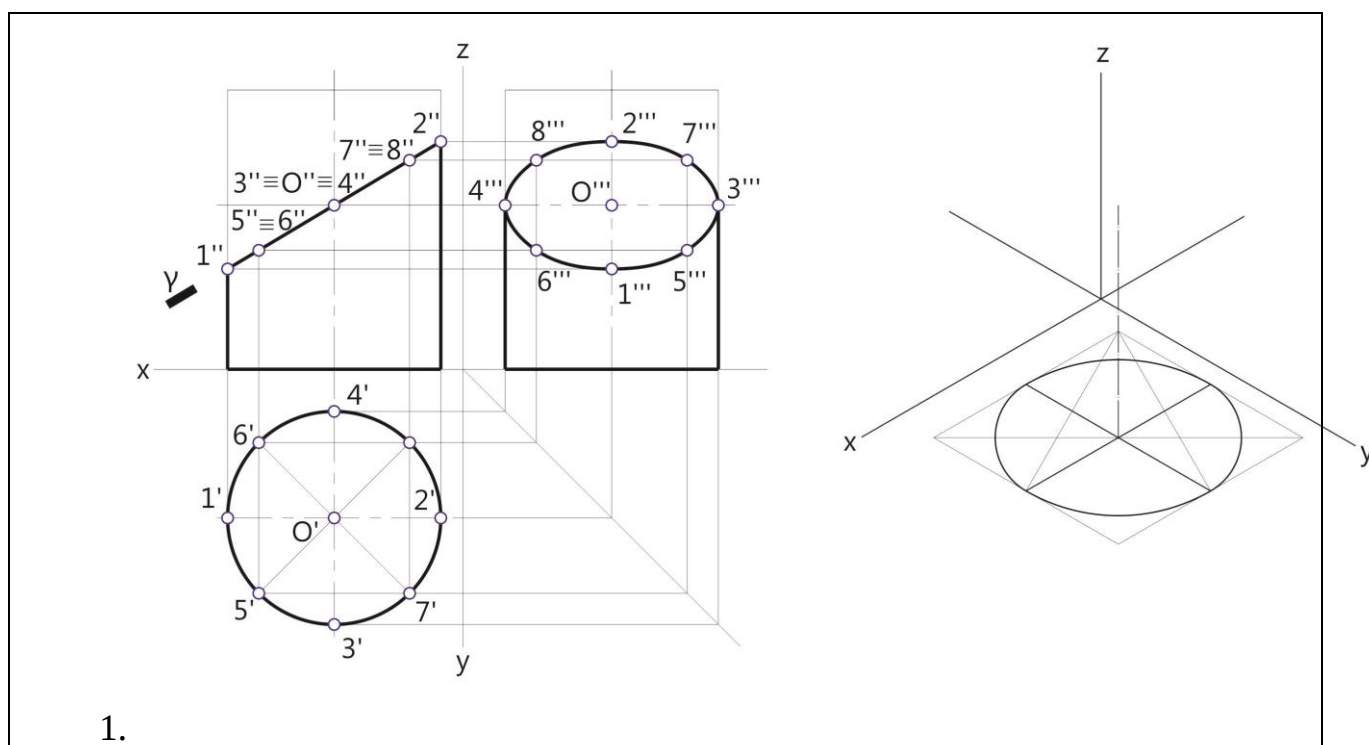
Таблица 8.1 – Построение эллипса в системе прямоугольной изометрии

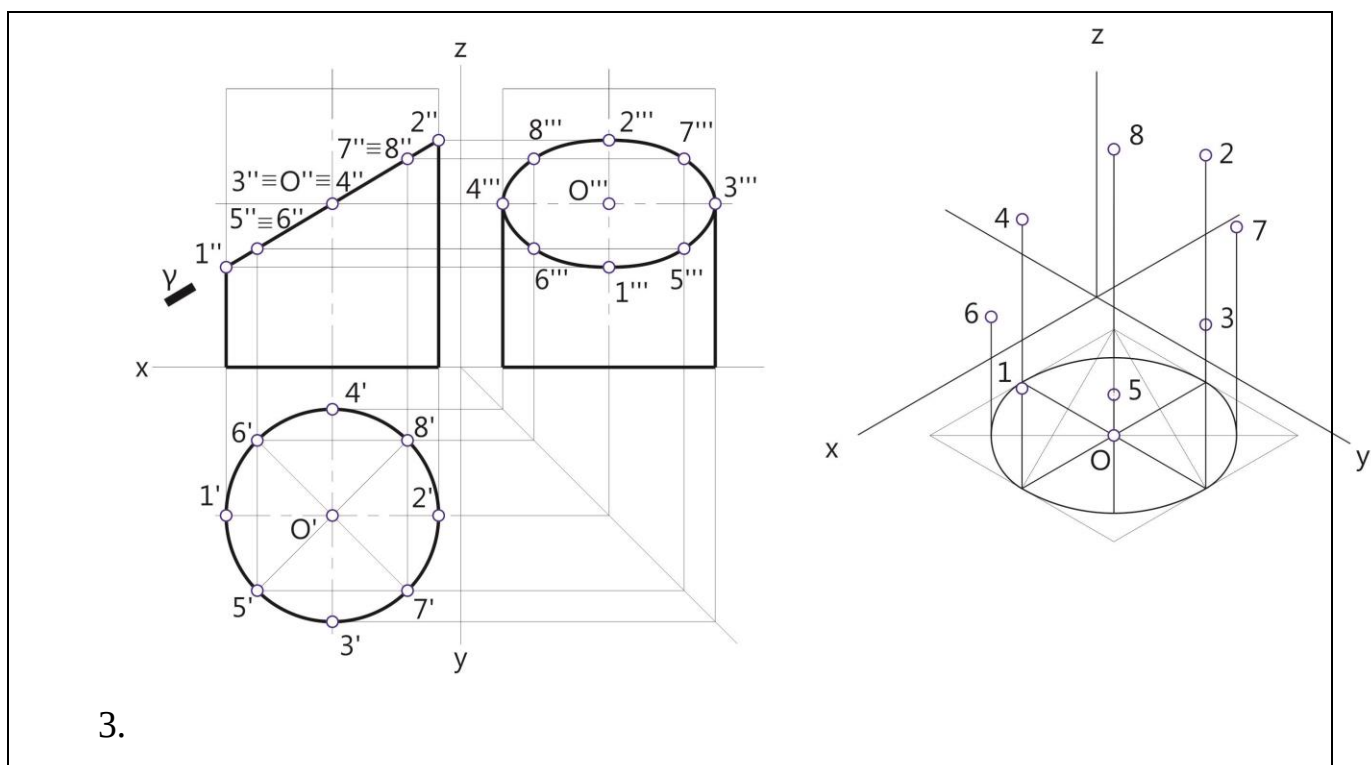
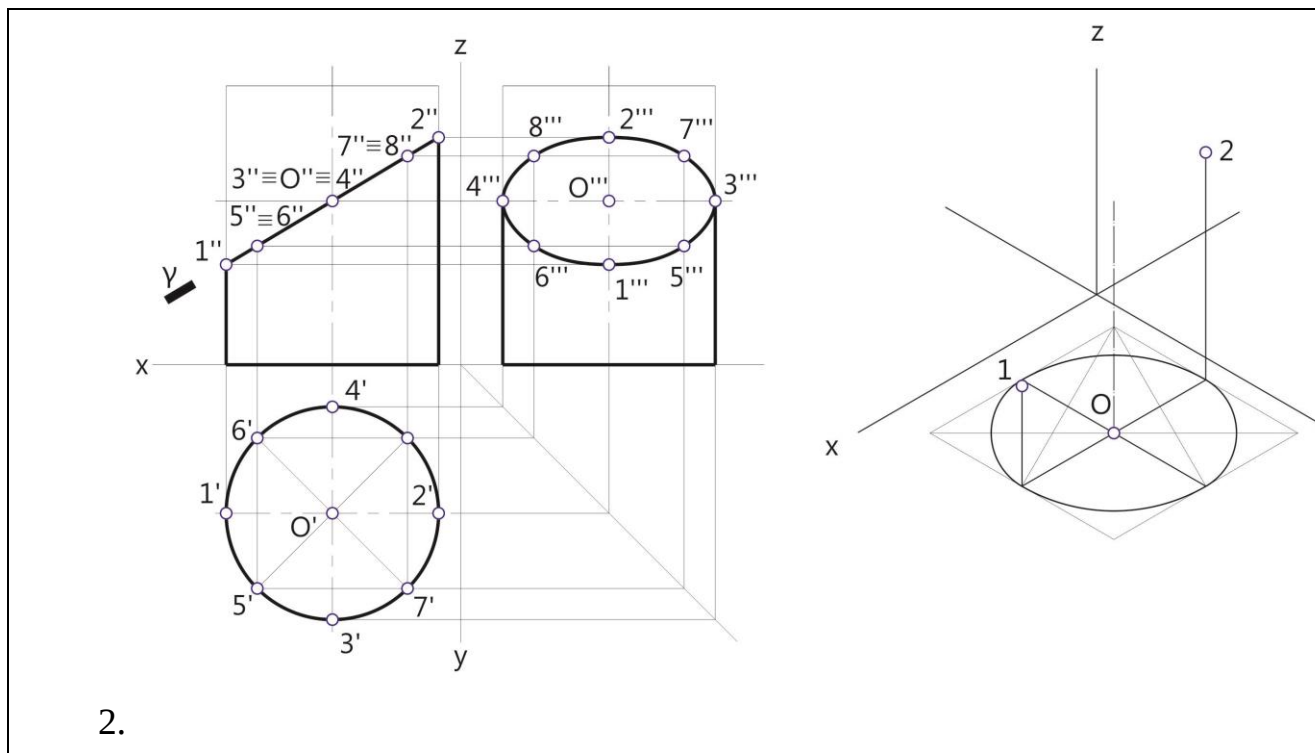


Построение аксонометрической проекции цилиндра со срезом фронтально-проецирующей плоскостью в системе прямоугольной изометрии соответствует следующему алгоритму:

1. Отнести цилиндр к системе прямоугольных координат x , y и z , оси которой параллельны осям натуральной системы координат, но проходят через высоту конуса (ось z) и его основание (оси x и y).
2. На свободном поле чертежа отметить точку O начала аксонометрических координат и провести оси прямоугольной изометрии под углами 120° с вертикальной осью z .
3. Построить аксонометрическую проекцию основания цилиндра.
4. Определить координаты x , y и z для точек 1 – 8 на поверхности цилиндра для построения сечения на его аксонометрии.
5. Соединить построенные точки среза соответствующей кривой.
6. Оформить чертеж аксонометрии цилиндра, выполнив толстыми линиями его видимый контур, тонкой штриховой линией – невидимый участок основания.

Таблица 8.2 – Построение аксонометрической проекции усеченного цилиндра





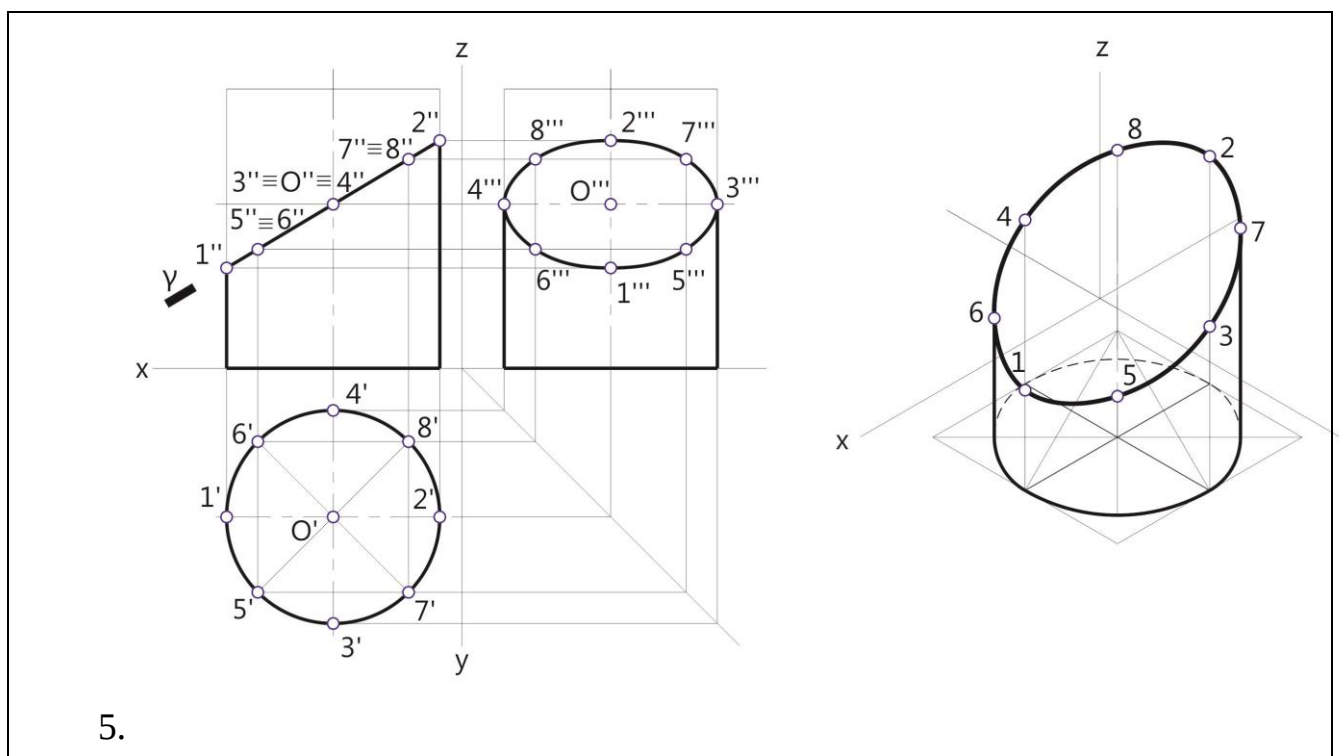
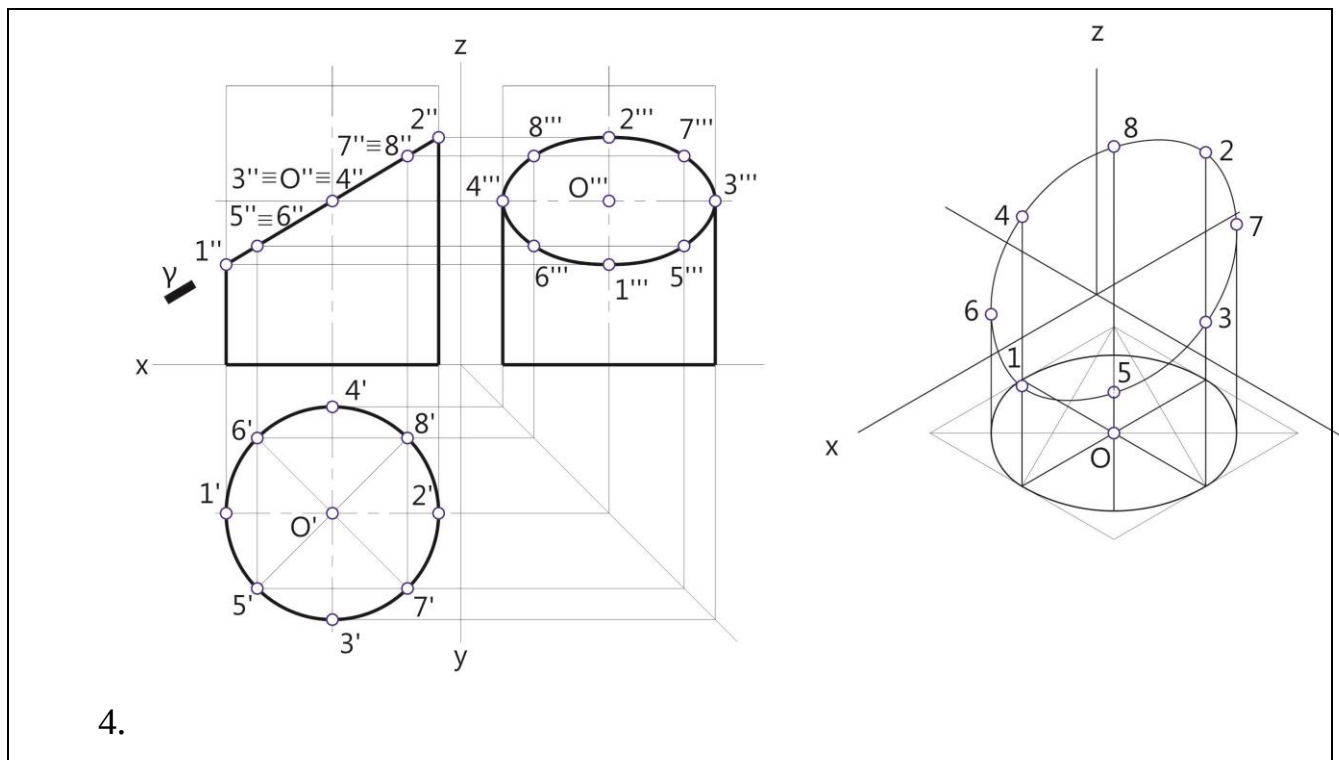
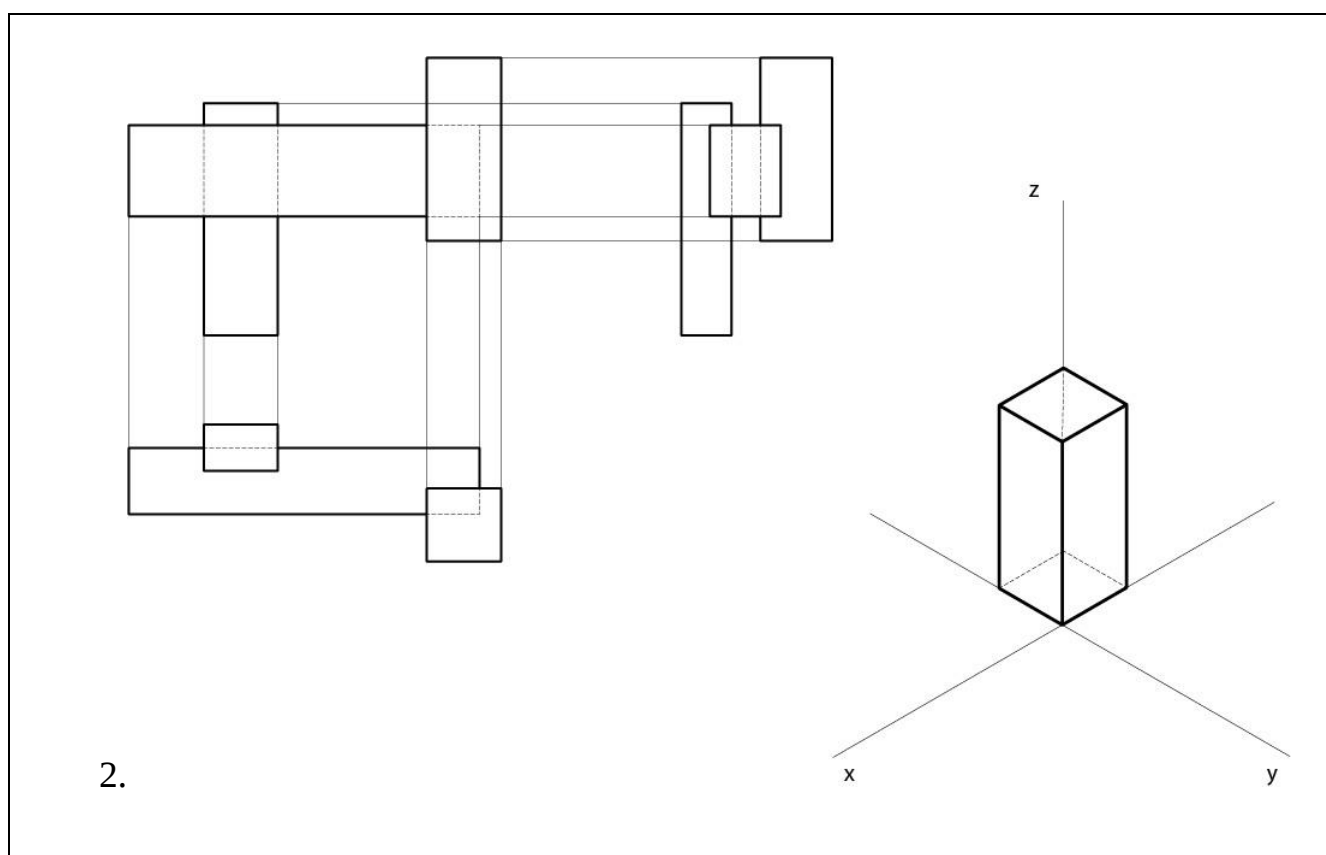
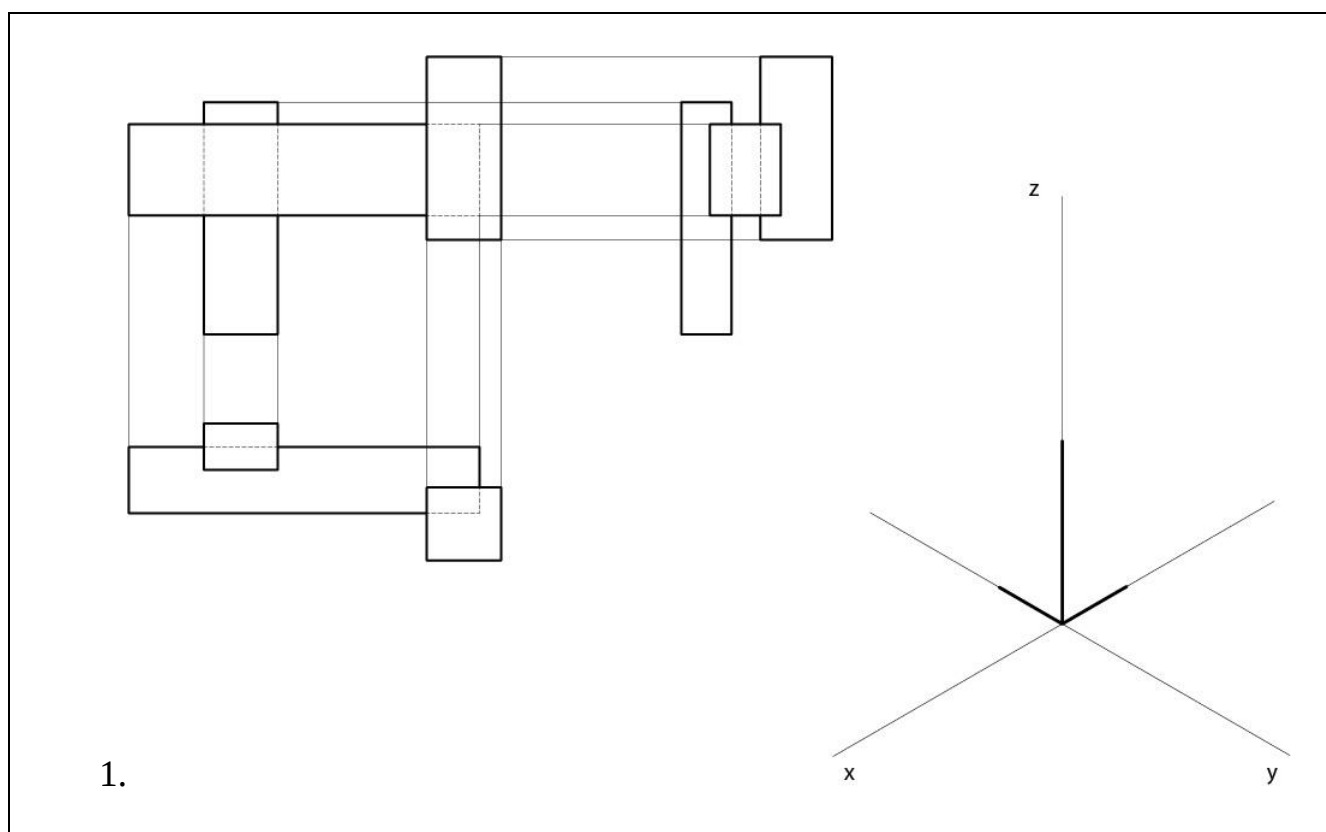
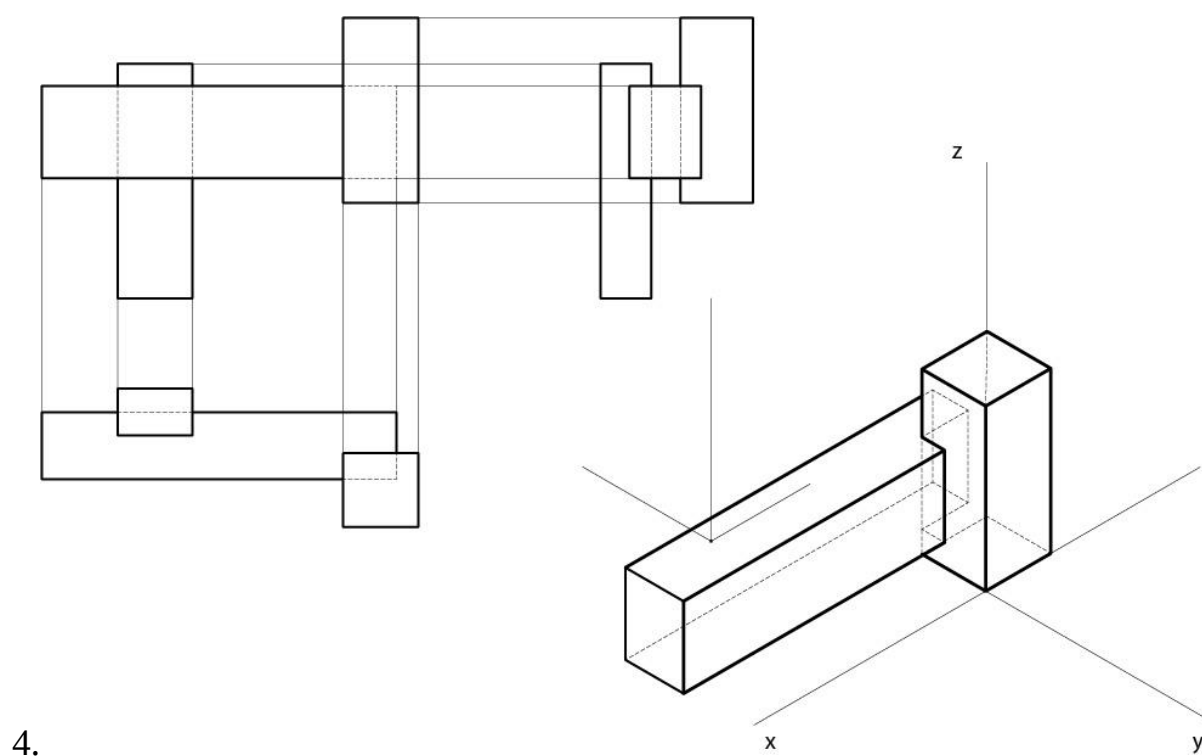
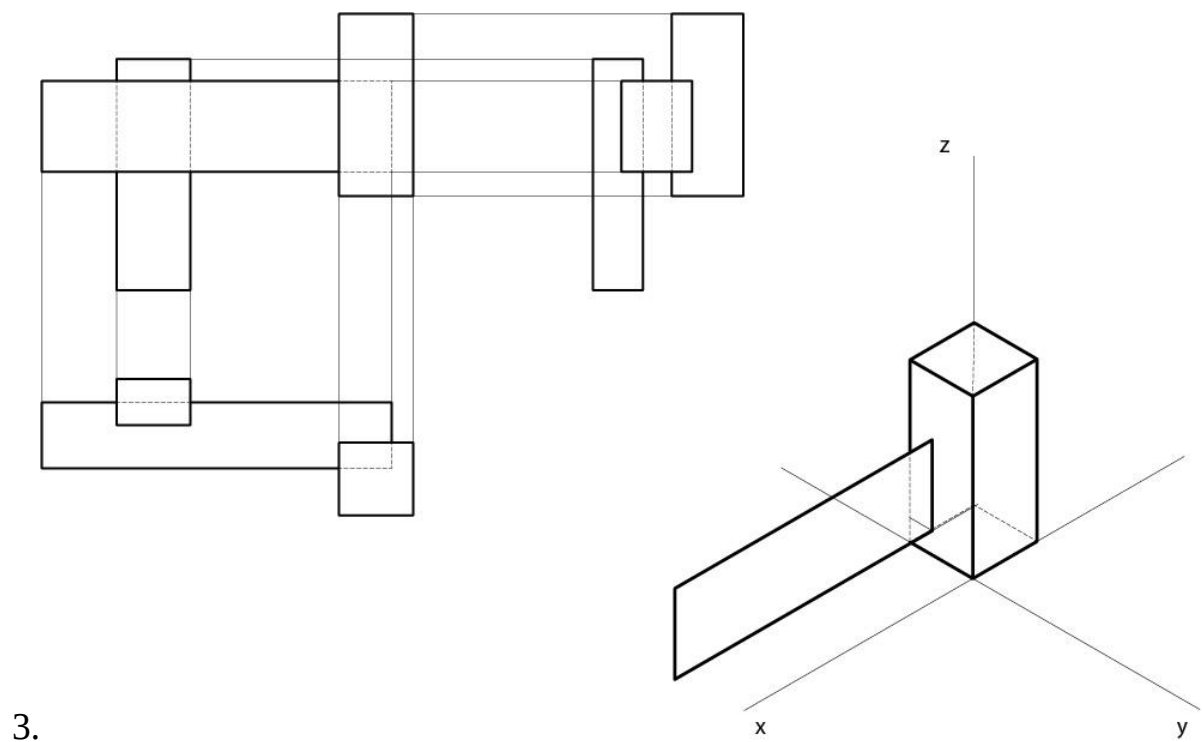
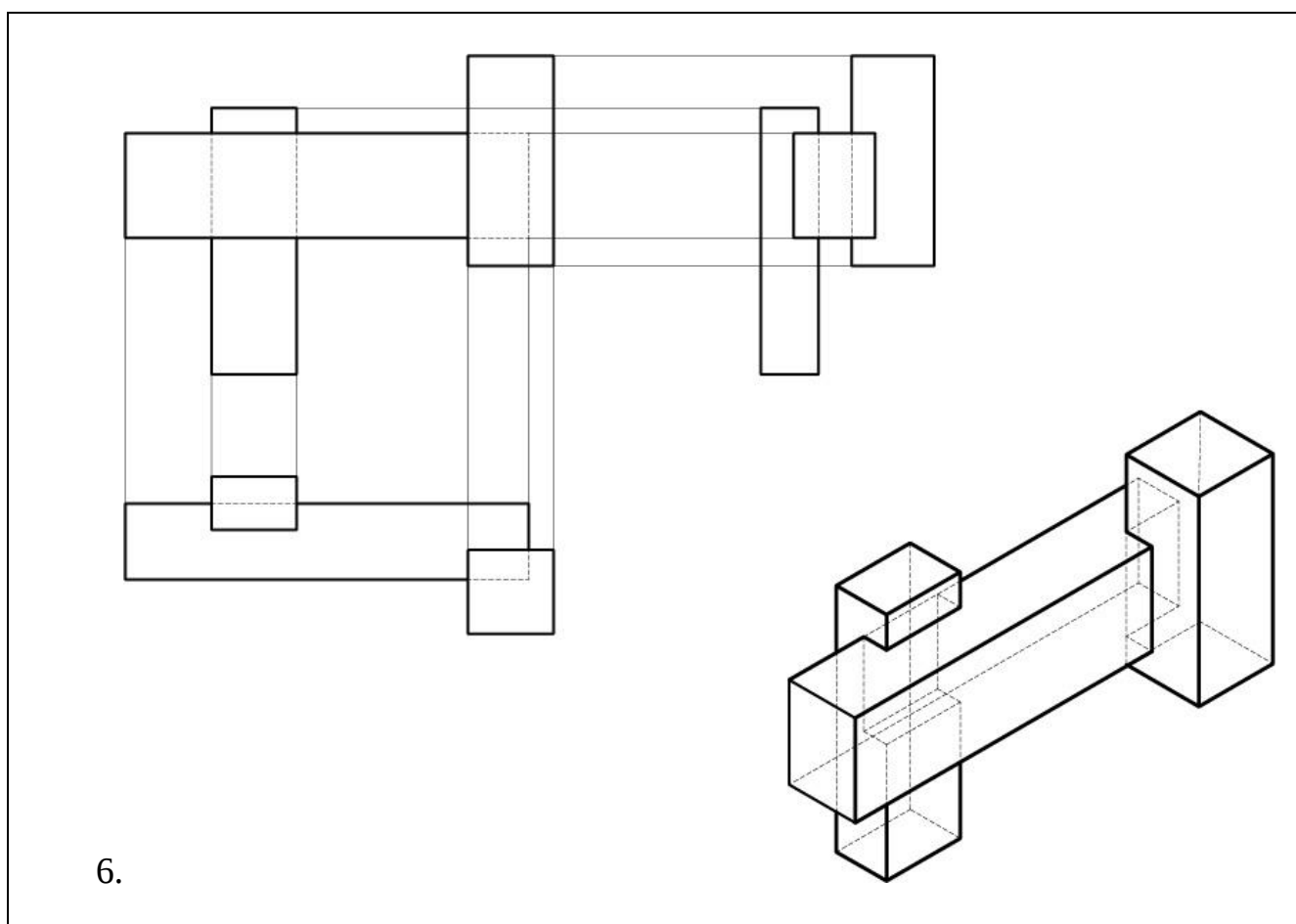
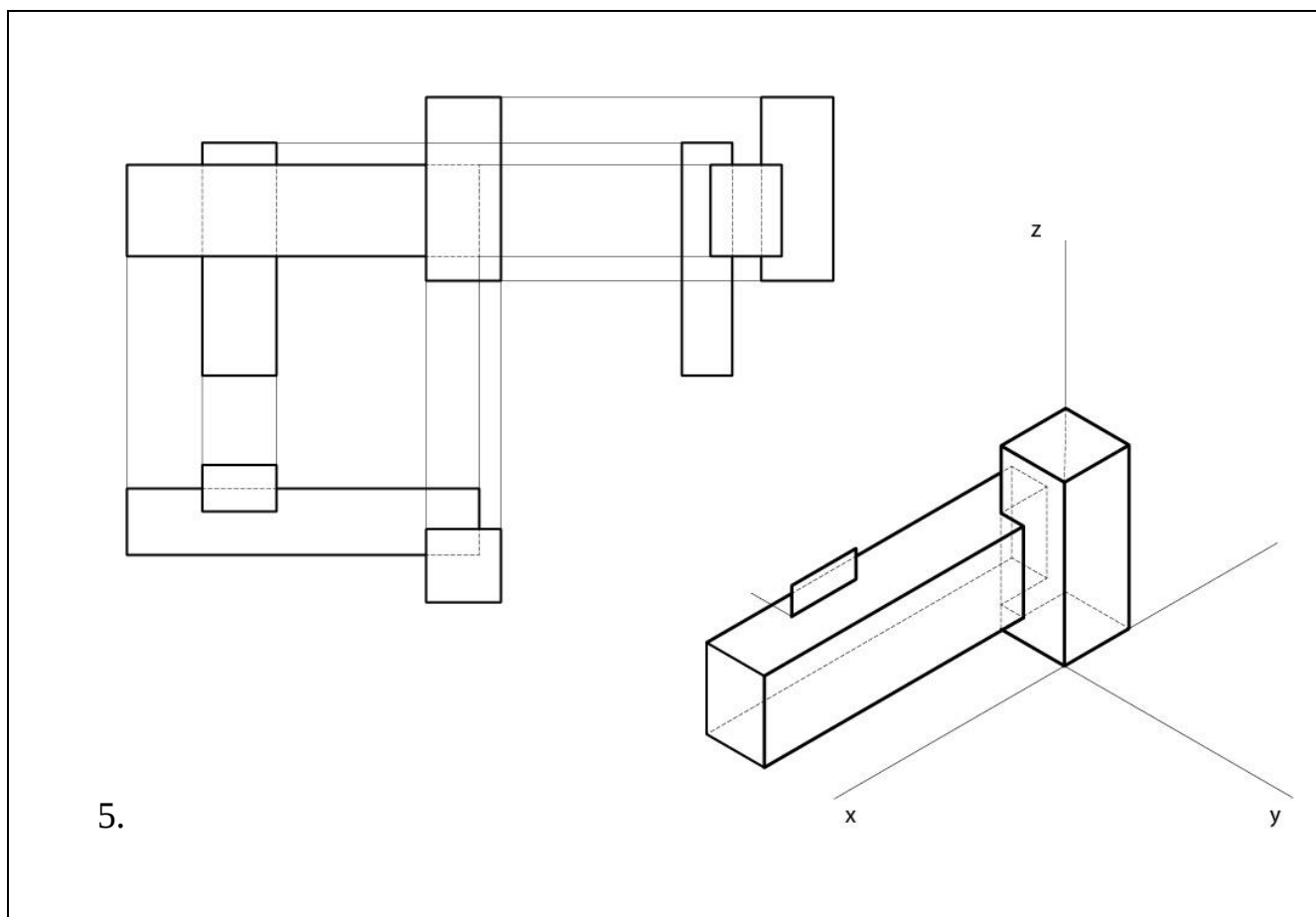


Таблица 8.3 – Построение аксонометрической проекции комбинированного тела







2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Основные элементы геометрического пространства. Точка. Прямая. Плоскость

Графический лист № 1. Комплексный чертеж точки, прямой, плоскости

Задания:

1. Построить в трех проекциях комплексный чертеж точки общего положения.

2. Построить в трех проекциях комплексный чертеж прямой общего положения, прямых частного положения (3 прямых уровня, 3 проецирующих прямых). Дать определения чертежам.

3. Построить в трех проекциях комплексный чертеж плоскости общего положения, плоскостей частного положения (3 проецирующих плоскости, 3 плоскости уровня). Дать определения чертежам.

Графический лист № 2. Главные линии плоскости

Задание:

Определить и построить в трех проекциях главные линии плоскости общего положения.

Графический лист № 3. Проекции прямой. Метрические задачи

Задания:

1. Определить натуральную величину и угол наклона прямой общего положения к плоскостям проекций.

2. Разделить прямую частного положения в заданном отношении (2:3).

3. Провести прямую, перпендикулярную прямой общего положения.

4. Провести прямую, перпендикулярную плоскости общего положения.

5. Построить прямую, параллельную заданной плоскости.

Все чертежи графического листа № 3 выполняются в двух проекциях.

2.2. Взаимное пересечение элементов геометрического пространства

Графический лист № 4. Взаимное пересечение прямой и плоскости

Задания:

1. Найти точку пересечения прямой общего положения и плоскости уровня. Определить видимость.

2. Найти точку пересечения проецирующей прямой и плоскости общего положения. Определить видимость.

3. Найти точку пересечения прямой общего положения и плоскости общего положения. Определить видимость.

Чертежи графического листа № 4 выполняются в двух проекциях.

Графический лист № 5. Взаимное пересечение плоскостей

Задания:

1. Найти линию пересечения двух плоскостей общего положения. Плоскости задать треугольниками, визуально накладываемыми друг на друга (пересекающимися). Определить видимость.

2. Найти линию пересечения двух плоскостей общего положения. Плоскости задать треугольниками, визуально не пересекающимися на плоскостях проекций. Определить видимость.

3. Найти линию пересечения двух плоскостей общего положения. Использовать различные способы задания плоскостей. Плоскости визуально пересекаются на плоскостях проекций. Определить видимость.

4. Найти линию пересечения двух плоскостей общего положения. Использовать различные способы задания плоскостей. Плоскости визуально не пересекаются на плоскостях проекций. Определить видимость.

2.3. Способы преобразования чертежа

Графический лист № 6. Замена плоскостей проекций

Задания:

1. Преобразовать чертеж способом замены плоскостей проекций так, чтобы прямая общего положения оказалась прямой уровня.

2. Преобразовать чертеж способом замены плоскостей проекций так, чтобы прямая уровня заняла положение проецирующей прямой.

3. Преобразовать чертеж способом замены плоскостей проекций так, чтобы плоскость общего положения оказалась проецирующей.

4. Преобразовать чертеж способом замены плоскостей проекций так, чтобы проецирующая плоскость заняла положение уровня.

Графический лист № 7. Преобразования способом вращения

Задания:

1. Повернуть прямую общего положения вокруг проецирующей прямой так, чтобы она оказалась прямой уровня.

2. Повернуть прямую уровня вокруг проецирующей прямой так, чтобы она заняла положение проецирующей прямой.

3. Повернуть плоскость общего положения вокруг проецирующей прямой так, чтобы она оказалась проецирующей.

4. Повернуть проецирующую плоскость вокруг проецирующей прямой так, чтобы она заняла положение уровня.

2.4. Развертки поверхностей

Графический лист № 8. Развертка поверхности призмы способом нормального сечения

Задание:

Построить развертку поверхности призмы способом нормального сечения. Призма должна занимать общее положение. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам призмы штрихпунктирными линиями с двумя штрихами.

Графический лист № 9. Развертка поверхности пирамиды

Задание:

Построить развертку поверхности пирамиды. Ребра пирамиды должны быть наклонены к плоскостям проекций, основание пирамиды – лежать в

плоскости уровня. Оформить чертеж развертки, выполнив линии сгиба по ребрам пирамиды штрихпунктирными линиями с двумя штрихами.

Графический лист № 10. Развертка боковой поверхности усеченного цилиндра

Задание:

Построить развертку боковой поверхности усеченного цилиндра. Условие: прямой круговой цилиндр, наклоненный относительно горизонтальной плоскости проекций, усеченный профильной плоскостью уровня.

Графический лист № 11. Развертка боковой поверхности усеченного конуса

Задание:

Построить развертку боковой поверхности усеченного конуса. Условие: прямой круговой конус со срезом фронтально-проецирующей плоскостью.

2.5. Аксонометрические проекции

Графический лист № 12. Аксонометрическая проекция конуса с двумя срезами

Задание:

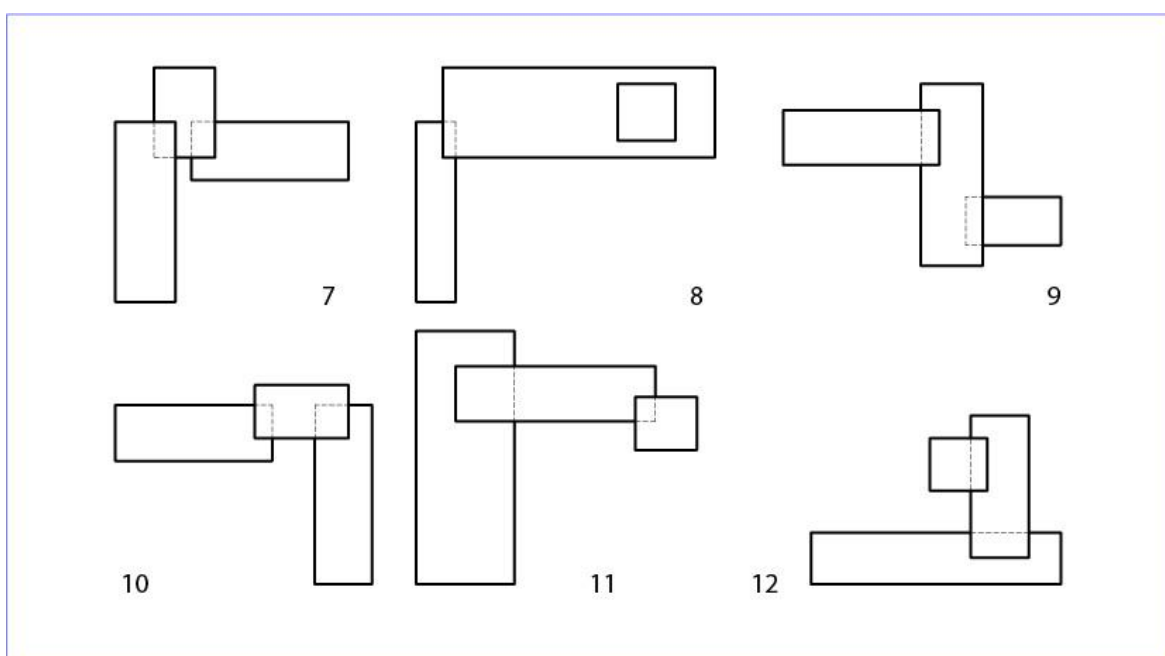
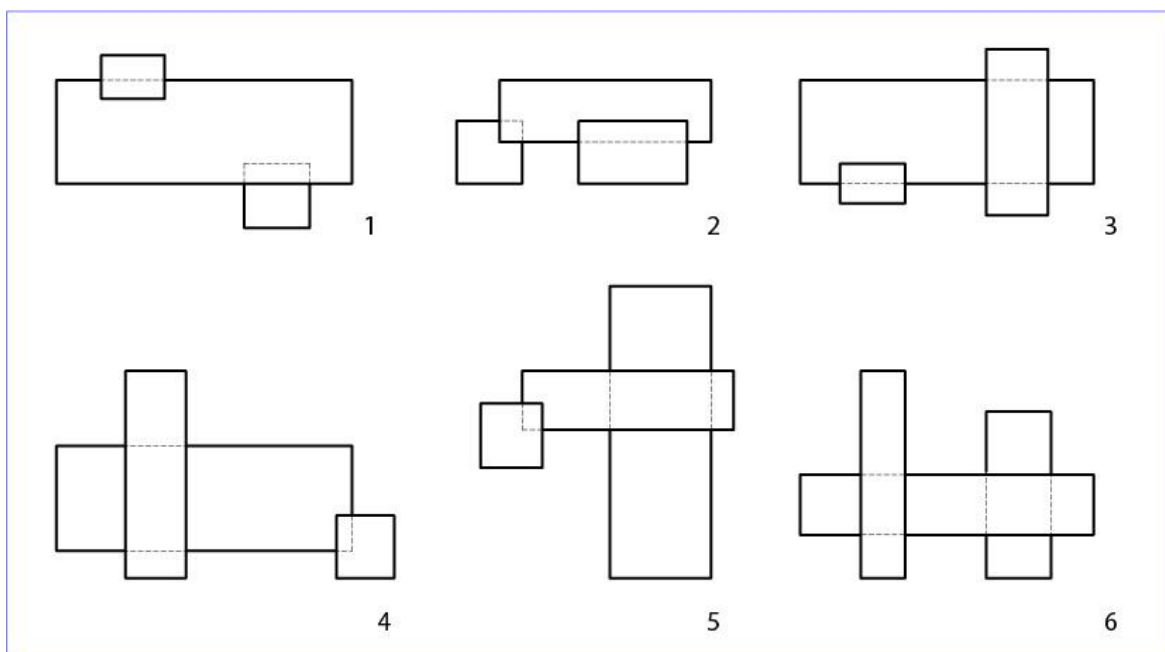
Построить фронтальную и горизонтальную проекции конуса со срезами двумя фронтально-проецирующими плоскостями и выполнить его аксонометрическую проекцию. Вид аксонометрической проекции – прямоугольная изометрия.

Графический лист № 13. Аксонометрическая проекция комбинированного тела

Задание:

По условию фронтальной проекции построить горизонтальную и профильную проекции комбинированного тела. Выполнить аксонометрическую проекцию. Показать линии невидимого контура.

Варианты условия:



3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Теоретические вопросы к экзамену

1. Определение начертательной геометрии
2. Проецирующий аппарат. Центральное и параллельное проецирование
3. Метод Монжа для системы двух плоскостей
4. Прямые общего и частного положения
5. Взаимное положение двух прямых в пространстве
6. Теорема о проецировании прямого угла в частном случае
7. Способы задания плоскости
8. Плоскости общего и частного положения
9. Главные линии плоскости
10. Алгоритм построения прямой в плоскости
11. Взаимное положение прямой и плоскости в пространстве
12. Алгоритм построения пересечения прямой и плоскости
13. Алгоритм построения прямой, перпендикулярной плоскости
14. Взаимное положение двух плоскостей в пространстве
15. Алгоритм построения пересечения двух плоскостей
16. Основные задачи преобразования проекций
17. Способы определения натуральной величины геометрических объектов
18. Метрические и позиционные задачи
19. Преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций
20. Преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующей прямой
21. Общие правила выполнения чертежей. Типы линий. Шрифты чертежные
22. Общие принципы построения развёрток поверхностей
23. Способы построения разверток многогранников
24. Построение развертки призмы способом нормального сечения
25. Способы построения разверток цилиндрических и конических поверхностей
26. Аксонометрические проекции. Определение и свойства аксонометрических проекций
27. Основные виды стандартной аксонометрии
28. Основные положения прямоугольной изометрии
29. Алгоритм построения эллипса в прямоугольной изометрии
30. Разрезы и сечения

Практические задания к экзамену

1. Построить прямую общего положения в трех проекциях
2. Построить проецирующую прямую. Дать определение
3. Построить прямую уровня. Дать определение
4. Построить прямую, перпендикулярную прямой общего положения

5. Построить плоскость общего положения (в трех проекциях)
6. Построить проецирующую плоскость. Дать определение
7. Построить плоскость уровня. Дать определение
8. Построить прямую, перпендикулярную плоскости общего положения
9. Построить горизонталь в плоскости общего положения
10. Построить фронталь в плоскости общего положения
11. Построить профильную линию в плоскости общего положения
12. Найти точку пересечения прямой и плоскости
13. Определить натуральную величину отрезка общего положения способом замены плоскостей проекций
14. Определить натуральную величину отрезка общего положения способом вращения вокруг проецирующей прямой
15. Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость способом замены плоскостей проекций
16. Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня способом замены плоскостей проекций
17. Преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость способом вращения
18. Преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня способом вращения вокруг проецирующей прямой
19. Построить изометрию горизонтальной окружности
20. Построить изометрию фронтальной окружности
21. Построить изометрию профильной окружности
22. Построить аксонометрическую проекцию цилиндра

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1 Рекомендуемая литература

1. Гервер, В.А. Основы инженерной графики : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности технического профиля / В.А. Гервер, А.А. Рывлина, А.М. Тенякшев ; под ред. А.А. Рывлиной. – М. : Кнорус, 2019. – 426 с.
2. Инженерная и компьютерная графика : учебник и практикум для прикладного бакалавриата, для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям / под общ. ред. Р.Р. Анамовой, С.А. Леоновой, Н.В. Пшеничной. – М. : Юрайт, 2019. – 246 с.
3. Конспект лекций по начертательной геометрии : для студ. Спец. 1-70 02 01 – промышленное и гражданское строительство / М-во образования РБ, УО «Брестский гос. Технический ун-т», Каф. Начертательной геометрии и инженерной графики ; [сост. Т.Н. Базенков, Н.В. Винник, В.А. Морозова]. – Брест : БрГТУ, 2019. – 67 с.
4. Найниш, Л.А. Начертательная геометрия : учебник для использования в образовательном процессе образовательных организаций, реализующих программы высшего образования на направлениях подготовки «Архитектура», «Дизайн», «Строительство» / Л.А. Найниш. – Старый Оскол : ТНТ, 2022. – 327 с.
5. Начертательная геометрия, инженерная и машинная графика : индивидуальные графические задания по разделу «Начертательная геометрия» для студентов технических специальностей заочной формы обучения / УО «БГТУ» ; [сост.: В.А. Бобрович и др.]. – Минск : БГТУ, 2022. – 61 с.

Дополнительные источники

1. Белякова, Е.И. Начертательная геометрия. Краткий курс по темам графических работ: учебное пособие / Е.И. Белякова, П.В. Зелёный; под ред. П.В. Зелёного. – Мн.: БНТУ, 2010. – 229 с.
2. Виноградов, В.Н. Начертательная геометрия: учебник / В.Н. Виноградов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Амалфея, 2001. – 368 с.
3. Герасимов, В.А. Начертательная геометрия: учебное пособие / В.А. Герасимов. – Брянск: БГТУ, 2008. – 128 с.
4. Жадан, М.И. Начертательная геометрия, инженерная и машинная графика: тексты лекций для студентов специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» / М.И. Жадан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 95 с.
5. Лазарев, С.И. Начертательная геометрия для первокурсника: учебное пособие / С.И. Лазарев, Э.Н. Очиев, О.А. Абоносимов. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 68 с.
6. Пересечение поверхностей: методические указания для студентов 1 курса направления 270800 «Строительство» / сост.: Т.А. Пантелеева. – Казань: КГАСУ, 2013. – 21 с.

7. Таталай, П.Г. Компьютерный курс начертательной геометрии на базе КОМПАС – 3D / П.К. Таталай. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 608 с.: ил.
8. Уласевич, З.Н. Начертательная геометрия: учебное пособие для студентов строительных специальностей вузов /З.Н. Уласевич, В.П. Уласевич, о.А. Якубовская. – Мн.: Беларус. Энцыкл. імя П. Броўкі, 2009. – 197 с.: ил.
9. Чекмарев, А.А. начертательная геометрия и черчение: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / А.А. Чекмарев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2002. – 472 с.: ил.
10. Шарикян, Ю.Э. Выполнение домашнего задания по начертательной геометрии: метод. указания / Ю.Э. Шарикян. – М.: изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 61, [3] с.: ил.

4.2. Электронные ресурсы

- 1 Начертательная геометрия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ngeo.fxuz.ru/>. – Дата доступа: 15.04.2024.
- 2 Начертательная геометрия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cadinstructor.org/ng/>. – Дата доступа: 15.04.2024.