

# Белорусский государственный университет



## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
первой ступени высшего образования:

1-31 03 07-01      Прикладная информатика (программное  
обеспечение компьютерных систем)

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 03 07-2021, учебного плана УВО G31-1-030/пр.-тип., от 01.07.2021.

**Составители:**

**С.А.Мазаник**, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**Б.В.Задворный**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**Рецензенты:**

Бровка Н.В., зав. кафедрой теории функций ММФ БГУ доктор педагогических наук, профессор.

Вабищевич С.В., зав. кафедрой информатики и методики преподавания информатики Белорусского государственного педагогического университета им. М.Танка кандидат педагогических наук, доцент

**Рекомендована к утверждению:**

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

**Кафедрой высшей математики** Белорусского государственного университета (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.);

**Научно-методическим Советом** Белорусского государственного университета (протокол № 6 от 29 июня 2022 г.).

Заведующий кафедрой высшей математики  
доктор физико-математических наук,  
профессор



М.М.Васьковский

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» разработана в соответствии с типовыми учебными планами и образовательными стандартами первой ступени высшего образования по специальности 1-31 03 07 Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем).

Учебная дисциплина «Дифференциальные уравнения» знакомит студентов с основными методами интегрирования и исследования дифференциальных уравнений, а также с методами построения дифференциальных моделей детерминированных процессов.

Основой для изучения учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» являются учебные дисциплины «Математический анализ», «Аналитическая геометрия» «Алгебра и теория чисел». В свою очередь учебная дисциплина «Дифференциальные уравнения» является базовой для изучения предметов аналитического цикла, предусмотренных учебным планом специальности. Материал, излагаемый в учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения», используется при изучении учебных дисциплин «Теория вероятностей и математическая статистика». «Методы вычислений».

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» включена в модуль «Высшая математика» государственного компонента.

### **Цель преподавания учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения»:**

– создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики, используемых при изучении перечисленных выше учебных дисциплин.

При изложении материала учебной дисциплины важно показать возможности использования аппарата дифференциальных уравнений при решении прикладных задач, возникающих в различных областях науки, техники, экономики. Целесообразно выделить моменты построения математических моделей естественных процессов с целью их последующего изучения, а также обратить внимание на алгоритмические аспекты получаемых результатов.

### **Основные задачи, решаемые при изучении учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения»:**

- научить строить и исследовать решения дифференциальных уравнений;
- научить строить математические модели эволюционных процессов

В результате изучения дисциплины студент должен

#### **знать:**

– методы интегрирования элементарных дифференциальных уравнений, линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами;

– условия существования и единственности решений дифференциальных уравнений, основные понятия теории устойчивости;

- понятие первого интеграла;
- принципы построения дифференциальных моделей;

**уметь:**

- находить общее решение и решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами методами Лагранжа и Эйлера;
- интегрировать элементарные дифференциальные уравнения;
- строить дифференциальные модели простейших процессов и физических явлений.

**владеть:**

- аппаратом дифференциальных уравнений ;
- навыками исследования моделей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Освоение учебной программы должно обеспечить формирование следующих групп компетенций:

- *универсальных компетенций* – углубленных научно-теоретических, методологических знаний и исследовательских умений, обеспечивающих работку научно-исследовательской, инновационной деятельности, непрерывного самообразования, в соответствии с которыми специалист должен:
- УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;
- УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий;
- УК-4. Работать в команде, толерантно воспринимать социальные, этнические, конфессиональные, культурные и иные различия;
- УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности;
- УК-6. Проявлять инициативу и адаптироваться к изменениям в профессиональной деятельности.
- *базовых профессиональных компетенций*, в соответствии с которыми специалист должен:
- БПК-1. Применять аппарат дифференциального и интегрального исчисления, методы аналитической геометрии и линейной алгебры для построения математических моделей и решения прикладных задач;

Программа рассчитана на 108 учебных часов, из них 68 часов аудиторных занятий, в том числе 34 лекционных часов, 34 часа практических занятий. Дисциплина изучается в 3-м семестре. Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы. Рекомендуемая форма промежуточной аттестации – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### 1. Введение

Математические модели детерминированных процессов и явлений в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и принципы их построения. Основные понятия и задачи теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

### Раздел I. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

#### 2. Однородные линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

Структура множества решений и фундаментальная система решений (базис) однородного уравнения. Вронскиан. Общее решение. Алгоритм интегрирования однородных уравнений.

#### 3. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Уравнения с правой частью в виде квазиполинома. Метод Эйлера интегрирования неоднородных уравнений. Построение линейных дифференциальных моделей физических процессов.

#### 4. Исследование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Устойчивость и асимптотическая устойчивость решений по Ляпунову. Критерий Рауса-Гурвица.

### Раздел II. Линейные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами

#### 5. Однородные линейные векторные уравнения размерности $n$ (однородные линейные системы)

Фундаментальная (базисная) матрица решений. Общее решение. Метод Эйлера разрешения однородных систем.

**6. Неоднородные линейные векторные уравнения размерности  $n$**   
Общее решение. Метод сведения линейной системы к одному линейному уравнению. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Рассмотрение явлений, описываемых линейными векторными уравнениями.

**7. Исследование линейных векторных уравнений размерности  $n$**   
Устойчивость и асимптотическая устойчивость решений по Ляпунову.

### Раздел III. Элементарные дифференциальные уравнения

#### 1. Основные типы элементарных уравнений

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли.

### Раздел IV. Общая теория дифференциальных уравнений

**9. Существование и единственность решения задачи Коши**  
Задача Коши. Существование и единственность решения задачи Коши

для линейных дифференциальных уравнений порядка  $p$  и линейных дифференциальных систем размерности  $n$  с постоянными коэффициентами. Теорема Пикара. Построение и исследование математических моделей естественнонаучных процессов.

### **10. Первые интегралы**

Интегрируемые комбинации. Базис первых интегралов. Системы в симметрической форме.

### **Раздел V. Уравнения с частными производными первого порядка**

#### **11. Интегрирование уравнений с частными производными**

Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Постановка задачи Коши.

## Учебно-методическая карта учебной дисциплины

Номер раздела, таблиц	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<b>Введение</b>	2	0					Отчеты по практическим упражнениям
2	<b>Раздел I. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.</b> Однородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Исследование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	10	10					Отчеты по практическим упражнениям
3	<b>Раздел II. Линейные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами.</b> Однородные линейные векторные уравнения размерности n (однородные линейные системы). Неоднородные линейные векторные уравнения размерности n.	10	10					Отчеты по практическим упражнениям Контрольная работа Коллоквиум

	Исследование линейных векторных уравнений размерности $n$ .							
4	<b>Раздел III. Элементарные дифференциальные уравнения.</b> Основные типы элементарных уравнений.	4	4					Отчеты по практическим упражнениям Контрольная работа
5	<b>Раздел IV. Общая теория дифференциальных уравнений.</b> Существование и единственность решения задачи Коши. Первые интегралы.	5	4					Отчеты по практическим упражнениям Коллоквиум
6	<b>Раздел V. Уравнения с частными производными первого порядка.</b> Интегрирование уравнений с частными производными.	3	6					Отчеты по практическим упражнениям



## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### *Рекомендуемая литература*

#### *Основная*

1. Бибииков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / Ю. Н. Бибииков. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2023. - 303 с. - URL: <https://reader.lanbook.com/book/210617>
2. Прохорова, Р. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. УВО по математическим спец. / Р. А. Прохорова; БГУ. - Минск: БГУ, 2017. - 335 с. - URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/205697>
3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: учебник для физических и физико-математических факультетов университетов / Л. Э. Эльсгольц. - изд. 9-е., стереотип. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2023. - 309 с.
4. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: [учебное издание для вузов] / В. И. Арнольд. - Изд. 2-е, стер. - Москва: МЦНМО, 2018. - 343 с.
5. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: [более 1400 задач с ответами] / А. Ф. Филиппов. - Изд. 9-е. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2022. - 239 с.

#### *Дополнительная*

1. Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. Мн.: БГУ, 2000г. – 311 с.
2. Дифференциальные уравнения. Практикум: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат., физическим и экон. спец. / [Л. А. Альсевич и др.]. - Минск: Высшая школа, 2012. - 382 с.
3. Богданов Ю. С. Курс дифференциальных уравнений. - Мн.: Універсітэцкае, 1996. – 287 с.
4. Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения. Мн.: Вышэйшая школа, 1983г. – 239 с.
5. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Мн.: Вышэйшая шк., 1977г. – 240 с.
6. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Мн.: БГУ, 2006г. – 319 с.
7. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебник для механико-математических фак. ун-тов / И.Г.Петровский. - 6-е изд., стер. - М.: УРСС, 2003. – 272 с.
8. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения: учебник для студ. физических спец. и спец. "Прикладная математика" / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. - Изд. 4-е, стер. - Москва: Физматлит, 2002. - 254 с.

9. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособие для студ. высш. технических учеб. заведений / М. В. Федорюк. - Изд. стер. - Москва: URSS: Либроком, 2017. - 447 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.:Наука, 1976г. – 576 с.
11. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Мн.: 1974г. – 766 с.
12. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Мн.: Вышэйшая шк., 1974г.
13. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Мн.: Вышэйшая шк., 1973г. – 560 с.
14. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: М.:Наука, 1982г. – 332 с.

### **Описание инновационных подходов к преподаванию дисциплины**

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» возможно использование элементов эвристического обучения: проблемное изложение некоторых аспектов, использование частично-поискового метода.

На практических занятиях по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» рекомендуется использовать индивидуальный, творческий подход. Студенты получают от преподавателя задания, разрабатывают методы решения задач.

Условия для самостоятельной работы студентов, в частности, для развития навыков самоконтроля, способствующих интенсификации учебного процесса, обеспечиваются:

- наличием и использованием в учебном процессе систем автоматического тестирования которые доступны пользователям через Интернет;
- наличием и полным доступом обучающегося к библиотечным фондам, электронным средствам обучения, доступностью электронных (и бумажных) вариантов лекций, учебно-методических пособий и сборников задач по основным разделам учебной дисциплины, указаниями к решению типовых задач.

### ***Перечни используемых средств диагностики результатов учебной деятельности***

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным и конечным требованиям образовательной программы создаются фонды оценочных средств, включающие

*Устные формы:*

- собеседования;
- индивидуальные задания с их устной защитой.

*Письменные формы:*

- коллоквиумы;
- контрольные работы;
- письменные отчеты по домашним практическим заданиям.

*Устно-письменные формы:*

- отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой;
- отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой;
- зачеты;
- экзамены по учебной дисциплине.

*Технические формы:*

- электронные тесты.

Оценочными средствами предусматривается оценка усвоения обучающимися учебного материала дисциплины, их готовность к использованию знания основ математического анализа при изучении других учебных дисциплин.

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении домашних заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия и методические разработки кафедры, которые размещены в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать разработанные кафедрой тесты.

### **Методика формирования итоговой оценки**

Итоговая оценка формируется на основе:

1. Правил проведения аттестации студентов (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29 мая 2012 г.);
2. Положения о рейтинговой системе оценки знаний по дисциплине в БГУ (Приказ ректора БГУ от 18.08.2015г. № 382-ОД);
3. Критериев оценки знаний студентов (письмо Министерства образования от 22.12.2003 г.)

### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Основные понятия теории ОДУ. Основные типы уравнений (СтЛОД, СтЛВ, элементарные уравнения, ЛОД, уравнения в нормальной форме и в общей форме, в дифференциалах и в производных).
2. Квазиполиномы. Свойства. Критерий совпадения квазиполиномов. Действительные квазиполиномы.
3. Простейшие дифференциальные уравнения. Решение задачи Коши. Теорема об однозначной разрешимости.
4. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами первого порядка (СтЛОД-1). Линейное уравнение с постоянными коэффициентами первого порядка с квазиполиномом.
5. Общие свойства решений линейных дифференциальных уравнений. Факторизация линейного стационарного оператора.
6. Общее решение однородного СтЛОД- $n$  (стационарного линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка).
7. Пространство решений однородного СтЛОД- $n$ . Базисы пространства решений. Лемма о сдвиге.
8. Метод Коши разрешения неоднородного линейного уравнения. Общее решение и решение начальной задачи (с примером).
9. Метод Лагранжа разрешения неоднородного линейного уравнения.
10. Метод Эйлера разрешения неоднородного линейного уравнения (с примером).
11. Линейные уравнения и системы. Построение решений методом последовательного исключения искоемых функций. Однозначность в случае стационарных систем.
12. Операторный метод интегрирования линейных векторных уравнений (применение и примеры).
13. Неоднородные линейные векторные уравнения. Метод Коши
14. Неоднородные линейные векторные уравнения. Метод Лагранжа.
15. Уравнение в нормальной дифференциальной форме первого порядка и его решения.
16. Классификация фазовых точек. Примеры.
17. Уравнение в полных дифференциалах.
18. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными. Понятие и общие сведения об интегрирующем множителе. Исследование на наличие потерянных решений.
19. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка и его решения (ЛОД-1, т.е. с переменными коэффициентами).
20. Уравнение Бернулли.

21. Однородные уравнения.
22. Уравнение Риккати. Разные случаи интегрирования уравнения Риккати.
23. Уравнения в производных в общей форме. Алгебраические уравнения. Примеры.
24. Уравнения в производных в общей форме. Построение параметрических решений. Уравнение Клеро.
25. Уравнения в производных в общей форме. Построение параметрических решений. Уравнение Лагранжа.
26. Уравнения в производных в общей форме. Построение параметрических решений. Неполные уравнения. Примеры.
27. Элементарные уравнения высших порядков. Случаи понижения порядка.
28. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с непрерывными (непостоянными) коэффициентами. Понижение порядка уравнения при наличии частного решения.
29. Уравнения Эйлера.
30. Первые интегралы систем. Теорема о первом интеграле. Базис первых интегралов. Редукция систем. Построение первых интегралов. Теорема об интегрируемой комбинации. Примеры.
31. Задача Коши для системы уравнений в частных производных первого порядка.

### ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу
Методы оптимизации	МОУ		
Функциональный анализ и интегральные уравнения, Уравнения математической физики	КТиС		
Вычислительные методы алгебры, Методы численного анализа	ВычМ		
Теория вероятностей и математическая статистика	ТВиМС		

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№№ Пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики (протокол № 10 от 24 мая 2022 г.);

Заведующий кафедрой  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор

\_\_\_\_\_  
(ученая степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

М.М.Васьковский

(И.О. Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент

\_\_\_\_\_  
(ученая степень, звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Ю.Л.Орлович

(И.О.Фамилия)