

**Белорусский государственный университет**



Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям  
\_\_\_\_\_ О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12475/уч.

**КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

**1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)**

Направление специальности

1-31 03 03-01 Прикладная математика

(научно-производственная деятельность)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021, типового учебного плана №G 31-1-026/пр.-тип. от 30.06.2021 и учебных планов БГУ №G 31-1-030/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-022/уч. ин. от 23.07.2021.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Н.М. Дмитрук**, заведующий кафедрой методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**В.В. Крахотко**, доцент кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**О.И. Костюкова**, главный научный сотрудник отдела математической теории систем Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

**И.К. Асмыкович**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 10 от 24.05.2023 г.)

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления  
Белорусского государственного университета,  
кандидат физико-математических наук, доцент

Н.М. Дмитрук

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Качественная теория оптимального управления» знакомит студентов с задачами и методами современной теории оптимальных процессов и их приложениями в механике, экономике, биологии, эпидемиологии, медицине и др. Основное внимание в учебной дисциплине уделяется одному из фундаментальных результатов теории оптимального управления – принципу максимума Л.С.Понтрягина. Последовательно рассматриваются задачи от простейшей задачи терминального управления непрерывной системой к задачам с различными ограничениями, задачам с нефиксированной продолжительностью процессов, задачам быстрогодействия и управлению дискретными системами.

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цели** учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. формирование у студентов знаний, умений и навыков в области качественной теории оптимального управления;
5. демонстрация того, как изученные математические методы могут применяться при решении прикладных задач.

**Задачи** учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления»:

1. формирование навыков математического моделирования динамических процессов из различных прикладных областей и формулировки для них экстремальных задач;
2. освоение базовых понятий, концепций, методов в области качественной теории управления;
3. формирование представлений об эффективных методах решения задач оптимального управления, учитывающего особенности предлагаемых задач.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Качественная теория оптимального управления» относится к **дисциплинам специализации** компонента учреждения высшего образования учебного плана специальности **1-31 03 03 Прикладная математика**

(по направлениям) направление специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность).

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Методы оптимизации», «Оптимизация статических систем». Сведения из дисциплины «Качественная теория оптимального управления» являются базовыми для изучения следующих дисциплин специализации: «Конструктивные методы оптимального управления и наблюдения», «Управление по прогнозирующей модели». Также служат базой для выполнения курсовых и дипломных работ.

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления» должно обеспечить формирование следующей **специальной компетенции**:

СК-8. Строить и анализировать математические модели для задач принятия оптимальных решений в прикладных областях экономики, обосновать методы их теоретического исследования, включающие аппарат математического программирования, теории игр, вариационного исчисления, оптимального управления и упорядочения.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

#### **знать:**

- основные задачи теории управления;
- понятия и задачи теории оптимального управления;
- основные результаты качественной теории оптимального управления, в частности, формулировки принципа максимума для различных задач оптимального управления;

#### **уметь:**

- исследовать управляемость и наблюдаемость линейных стационарных и нестационарных систем;
- моделировать практические задачи оптимального управления;
- применять методы решения задач оптимального управления и проводить анализ решения;

#### **владеть:**

- основными аналитическими инструментами, используемыми при построении математических моделей динамических процессов;
- методами программного и позиционного решения задач оптимального управления;
- навыками самостоятельной исследовательской работы для проведения математических исследований.

### **Структура учебной дисциплины**

Форма получения высшего образования – очная (дневная).

Дисциплина изучается в 6 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Качественная теория оптимального управления» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## **Введение**

Задачи качественной теории оптимального управления и их приложения. Примеры задач. Историческая справка. Цели и задачи учебной дисциплины.

## **Раздел 1. Линейные управляемые системы**

### **Тема 1.1. Управляемость обыкновенных линейных стационарных систем**

Линейные системы. Формула Коши. Множество достижимости. Понятие полной управляемости. Неявный критерий управляемости. Критерий управляемости Калмана. Канонические формы управляемых систем. Спектральный критерий управляемости Хаутуса. Условная и относительная управляемость. Управляемость дискретных систем.

### **Тема 1.2. Управляемость линейных стационарных систем с запаздыванием**

Системы с запаздыванием. Формула Коши. Неявный критерий относительной управляемости. Определяющее уравнение. Критерий относительной управляемости в терминах решений определяющего уравнения. Системы нейтрального типа.

### **Тема 1.3. Наблюдаемость линейных стационарных систем**

Операция восстановления состояния по наблюдаемому выходу. Связь проблемы наблюдаемости с проблемой управляемости, дуальность. Критерии наблюдаемости линейных стационарных систем.

### **Тема 1.4. Линейные дискретные системы**

Линейные дискретные системы управления, управляемость и наблюдаемость. Примеры.

## **Раздел 2. Задачи оптимального управления**

### **Тема 2.1. Постановка и классификация задач оптимального управления**

Примеры задач из экономики и механики. Математическая модель управляемого объекта. Классы доступных управлений. Ограничения на траекторию: задачи со свободными, закрепленными, подвижными концами траекторий, фазовые и смешанные ограничения. Допустимые управления. Типы критериев качества, эквивалентность критериев. Оптимальное управление. Существование оптимальных управлений.

### **Тема 2.2. Принцип максимума для простейшей задачи терминального управления**

Простейшая задача терминального управления. Игольчатая вариация. Вариация траектории. Формула приращения критерия качества. Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина в задаче терминального управления.

### **Тема 2.3. Обсуждение принципа максимума**

Экстремали Понтрягина и их свойства. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности. Связь принципа максимума с правилом множителей Лагранжа. Задачи оптимального управления с критериями качества типа Больца и Лагранжа. Экономическая интерпретация принципа максимума. Построение оптимальных программных управлений с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума. Примеры.

### **Тема 2.4. Задачи с подвижным правым концом траектории**

Обобщенная игольчатая вариация. Вариации функционалов и траектории. Отделимость выпуклых конусов. Принцип максимума для задач с терминальными ограничениями-неравенствами. Условия трансверсальности. Терминальные ограничения-равенства. Задачи с подвижным левым концом траектории. Примеры.

### **Тема 2.5. Задачи с нефиксированной продолжительностью процесса**

Принцип максимума для простейшей задачи с нефиксированной продолжительностью процесса. Оптимальный момент окончания процесса. Общая задача оптимального управления.

## **Раздел 3. Синтез оптимальных систем**

### **Тема 3.1. Оптимальные по быстродействию системы**

Задачи линейного быстродействия. Теоремы о числе переключений. Теоремы единственности и существования оптимальных управлений. Формулировка принципа максимума в задаче быстродействия.

### **Тема 3.2. Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума**

Синтез оптимальных по быстродействию систем. Успокоение материальной точки. Успокоение простого маятника. Множество управляемости, обратный маятник. Синтез на плоскости для систем второго порядка с различными типами особых точек.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСП	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
	<b>Введение</b>	2			
<b>1</b>	<b>Линейные управляемые системы</b>				
1.1	Управляемость обыкновенных линейных стационарных систем	4	2		Решение задач Расчетно-графическое задание №1
1.2	Управляемость линейных стационарных систем с запаздыванием	2	2		Решение задач
1.3	Наблюдаемость линейных стационарных систем	2	2		Решение задач
1.4	Линейные дискретные системы	2		2	Расчетно-графическое задание №2
<b>2</b>	<b>Задачи оптимального управления</b>				
2.1	Постановка и классификация задач оптимального управления	2	2		Устный опрос
2.2	Принцип максимума для простейшей задачи терминального управления	4	4		Решение задач Расчетно-графическое задание №3
2.3	Обсуждение принципа максимума	4	4	2	Решение задач Расчетно-графическое задание №4
2.4	Задачи с подвижным правым концом траектории	4	4		Решение задач Расчетно-графическое задание №5



2.5	Задачи с нефиксированной продолжительностью процесса	2	2		Контрольная работа №1
<b>3</b>	<b>Синтез оптимальных систем</b>				
3.1	Оптимальные по быстродействию системы	4	2		Решение задач
3.2	Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума	4	6	2	Решение задач Расчетно-графическое задание №6 Контрольная работа №2
	<b>Итого</b>	<b>34</b>	<b>30</b>	<b>6</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актуарная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 202–203.
2. Васильев Ф. Методы оптимизации / Ф. Васильев – М.: Litres, 2022.
3. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова – URSS, 2018.– 256 с.
4. Гамкрелидзе, Р.В. Основы оптимального управления / Р.В. Гамкрелидзе.– URSS, 2019. – 200 с.

### Перечень дополнительной литературы

5. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с
6. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления/ Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Книжный дом" ЛИБРОКОМ", 2018.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. – М.: Наука, 1983.
8. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова.–Мн.: Изд-во БГУ, 1973.

## **Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Текущая аттестация проводится в соответствии с Постановлением Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29 мая 2012 г. «Об утверждении Правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования»; Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (приказ ректора БГУ №189-ОД от 31.03.2020); Критериями оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

*Устная форма:*

– устный опрос;

*Письменная форма:*

– контрольная работа;

– расчетно-графические задания.

*Устно-письменная форма:*

– решение задач;

– экзамен по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Качественная теория оптимального управления» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Качественная теория оптимального управления» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

– устный опрос, решение задач – 10 %;

– расчетно-графические задания – 30 %;

– контрольные работы – 60 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов.

Вес отметки текущей успеваемости составляет 40 %, вес экзаменационной отметки составляет 60 %.

### **Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 1.4. Линейные дискретные системы (2 ч)**

Задание 1. Для линейной дискретной системы управления получить аналог формулы Коши.

Задание 2. Для линейной непрерывной системы исследуемой в классе дискретных управлений построить соответствующую дискретную систему.

Задание 3. Получить условия управляемости для линейной стационарной дискретной системы.

Форма контроля – расчетно-графическое задание №2.

#### **Тема 2.3. «Обсуждение принципа максимума». (2 ч)**

Задание 1. Построить математическую модель системы управления (технический или экономический пример) и сформулировать для нее задачу оптимального управления (по вариантам групповых заданий).

Задание 2. Определить оптимальное управление с помощью принципа максимума Понтрягина и провести анализ решения.

Форма контроля – расчетно-графическое задание №4.

#### **Тема 3.2. «Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума». (2 ч)**

Задание 1. Решить задачу быстродействия для линейного объекта второго порядка (по вариантам индивидуальных заданий).

Задание 2. Решить задачу синтеза на плоскости.

Форма контроля – расчетно-графическое задание №6.

### **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении лабораторных заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации.

### **Примерный перечень вопросов к экзамену**

1. Системы управления: понятие управляемого объекта, типы систем управления, принципы управления, понятия программного и позиционного управления.
2. Линейные системы управления. Формула Коши. Множество достижимости системы линейной по управлению.
3. Канонические формы линейных управляемых систем.
4. Понятие управляемости линейных стационарных систем. Критерий управляемости Калмана.
5. Понятие управляемости линейных стационарных систем. Спектральный критерий управляемости.
6. Управляемость линейных нестационарных систем.
7. Связь проблемы наблюдаемости с проблемой управляемости, дуальность.
8. Критерии наблюдаемости линейных стационарных систем.
9. Наблюдаемость линейных нестационарных систем.
10. Постановка и классификация задач оптимального управления.
11. Принцип максимума Понтрягина в простейшей задаче терминального управления.
12. Экстремали Понтрягина и их свойства.
13. Принцип максимума как достаточное условие оптимальности.
14. Задачи оптимального управления с критериями качества типа Больца и Лагранжа.

15. Экономическая интерпретация принципа максимума.
16. Построение оптимальных программных управлений с помощью принципа максимума. Краевая задача принципа максимума.
17. Задачи с подвижным правым концом траектории, условия трансверсальности.
18. Принцип максимума для простейшей задачи с нефиксированной продолжительностью процесса.
19. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления.
20. Оптимальные по быстродействию системы
21. Понятие синтеза оптимальных систем
22. Синтез оптимальных систем с помощью принципа максимума
23. Успокоение материальной точки
24. Успокоение маятника
25. Множество управляемости. Примеры

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>1</sup>
Конструктивные методы оптимального управления и наблюдения	Кафедра методов оптимального управления	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)
Управление по прогнозирующей модели	Кафедра высшей математики	нет	Изменения не требуются (протокол № 10 от 24.05.2023 г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО  
на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
методов оптимального управления (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой

доцент \_\_\_\_\_

(ученая степень, звание)

(подпись)

Н.М. Дмитрук

(И.О. Фамилия)

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан факультета

доцент \_\_\_\_\_

(ученая степень, звание)

(подпись)

Ю.Л. Орлович

(И.О.Фамилия)