

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

 О.Г. Прохоренко

30 июня 2023 г.

Регистрационный № УД-718/6.



Дискретная математика и математическая логика

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

6-05-0533-10 Информатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-10-2023; примерного учебного плана, регистрационный № 6-05-05-021/пр. от 20.12.2022, учебных планов БГУ: № 6-5.3-58/01 от 15.05 2023 г., № 6-5.3-58/02 от 15.05 2023 г., № 6-5.3-58/03 от 15.05 2023 г., № 6-5.3-58/04 от 15.05 2023 г., № 6-5.3-58/05 от 15.05 2023 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Ю.Л. Орлович – доцент кафедры биомедицинской информатики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Я.А. Ловеров – старший преподаватель кафедры биомедицинской информатики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

М.Я. Ковалев – главный научный сотрудник отдела математической кибернетики государственного научного учреждения «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук, профессор;

В.И. Бенедиктович – ведущий научный сотрудник отдела комбинаторных моделей и алгоритмов Института математики Национальной академии наук Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дискретной математики и алгоритмики
(протокол № 16 от 05.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023).

Заведующий кафедрой



В.М.Котов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Дискретная математика и математическая логика» относится к государственному компоненту цикла специальных дисциплин. Она является фундаментом математической кибернетики и важным звеном математического образования для специалистов в области прикладной математики и информатики. Дисциплина «Дискретная математика и математическая логика» состоит из двух частей. Первая часть посвящена математической логике – разделу математики, в котором изучаются правильные способы рассуждений, позволяющие из верных посылок получать верные заключения. Математическая логика знакомит учащихся со стандартной математической нотацией, с основными методами построения математических доказательств, с некоторым эталоном математической строгости – с тем, что в совокупности составляет основу общей математической культуры, формирование которой у начинающих студентов является одной из важнейших задач университетского математического образования. Кроме этого, демонстрируется применение аппарата математической логики для решения широкого класса логических и игровых задач, а также задач синтеза релейно-контактных схем. Вторая часть, посвященная дискретной математике, призвана ввести студента в круг идей и понятий, связанных с дискретностью, дать студенту представление о базовых дискретных объектах, таких как множества, комбинаторные конфигурации, графы, булевы функции, и основных методах работы с подобными объектами. Указанные объекты определяют основу перечислительной комбинаторики, дискретной оптимизации, криптографии, теории алгоритмов и являются базовыми для многих прикладных областей. Изучение их в курсе «Дискретная математика и математическая логика» позволяет подготовить студента к их восприятию и использованию на более высоком уровне в других учебных дисциплинах («Теория вероятностей и математическая статистика», «Исследование операций», «Основы теоретической информатики» и «Алгоритмы и структуры данных»).

Цель учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» состоит в развитии у студентов навыков использования языка математической логики и теории множеств для построения формальных математических моделей прикладных задач и их решения; в обучении студентов методам решения задач, характерных для дискретной математики, в частности, логических, комбинаторных и графовых; в развитии у студентов навыков проведения логически верных рассуждений и построения математических доказательств. *Образовательная цель данной дисциплины* состоит в преодолении студентами разрыва между качеством и объемом знаний, получаемых в школе, и требованиями, которые предъявляются к первоначальным знаниям начинающих студентов для полного и успешного освоения ими учебных дисциплин государственного компонента и дисциплин специализации; в получении будущими специалистами базового

математического образования, необходимого им в дальнейшем для успешной работы. *Развивающая цель данной дисциплины:* формирование у студентов общей математической культуры; овладение ими навыками логического и алгоритмического мышления.

Задачи учебной дисциплины

1. Ознакомить с рядом фундаментальных математических понятий, таких как высказывание, предикат, множество, отображение, отношение, полнота, замкнутость, граф и др.

2. Обучить анализу и правильной записи математических утверждений и описанию математических объектов с помощью логических и теоретико-множественных конструкций.

3. Обучить применению методов математической логики и теории множеств для решения задач перечислительной комбинаторики и теории графов.

Место учебной дисциплины

В системе подготовки специалиста с высшим образованием для специальности 6-05-0533-10 «Информатика» учебная дисциплина **относится к модулю** «Дискретные структуры и алгоритмы» государственного компонента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам.

Для специальности 6-05-0533-10 «Информатика» основой для изучения учебной дисциплины является дисциплина государственного компонента «Математический анализ» модуля «Математический анализ», дисциплина государственного компонента «Основы высшей алгебры» модуля «Геометрия и алгебра», дисциплина государственного компонента «Аналитическая геометрия» модуля «Геометрия и алгебра», дисциплина государственного компонента «Линейная алгебра» модуля «Геометрия и алгебра». Знания, полученные в учебной дисциплине, используются при изучении дисциплин «Основы теоретической информатики», «Алгоритмы и структуры данных», «Модели и алгоритмы задач дискретной оптимизации» модуля «Дискретные структуры и алгоритмы» государственного компонента, дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» модуля «Теория вероятностей и математическая статистика» компонента учреждения образования.

Требования к компетенциям

В соответствии с образовательным стандартом освоение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-6. Выполнять построение математических моделей и проводить их анализ в типовых задачах дискретной математики, интерпретировать получаемые результаты анализа математических моделей и осуществлять

выбор структур данных для разработки эффективных алгоритмов решения прикладных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные логические операции и равносильности;
- базовые понятия логики высказываний и логики предикатов;
- базовые понятия и методы теории множеств и комбинаторики;
- основы теории булевых функций;
- базовые понятия и результаты теории графов.

уметь:

- переводить предложения с естественного языка на формальный язык логики высказываний и логики предикатов,
- упрощать логические выражения и выполнять операции над множествами;
- решать базовые комбинаторные задачи;
- строить нормальные формы булевых функций, исследовать на полноту системы булевых функций;
- оценивать числовые характеристики графов, исследовать простейшие графы на изоморфизм, связность, двудольность, планарность, эйлеровость и принадлежность одному из базовых классов графов и классу деревьев.

владеть:

- основными методами решения задач математической логики;
- основными методами исследования булевых функций;
- методами решения задач комбинаторного анализа и задач на графах.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1-м и 2-м семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» отведено в очной форме получения высшего образования 216 часов, в том числе 136 аудиторных часов, из них:

- в 1-м семестре для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 64 аудиторных часа, из них: лекции – 30 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа;
- во 2-м семестре для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации: в 1-м семестре – зачет, во 2-м семестре – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Элементы математической логики и теории множеств

Тема 1.1 Логика высказываний

Высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы логики высказываний. равносильные формулы, тавтологии, противоречия. Основные равносильности. Теоремы о равносильных формулах. Логическое следование. Теорема о логическом следствии. Важнейшие правила следования. Приложения логики высказываний: упрощение систем высказываний, анализ рассуждений, релейно-контактные схемы).

Тема 1.2. Множества, отображения, бинарные отношения.

Множества и способы их задания. Подмножества и их свойства. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Основные теоретико-множественные тождества. Покрытия и разбиения множеств. Понятие отображения. Основные классы отображений. Композиция отображений. Обратное отображение. Принцип Дирихле. Мощность множества, счетные и несчетные множества. Теорема Кантора-Бернштейна. Бинарные отношения и их свойства. Операции над бинарными отношениями. Типы бинарных отношений. Отображение как функциональное отношение. Отношения эквивалентности и их связь с разбиениями множеств.

Тема 1.3. Логика предикатов

Недостаточность логики высказываний для анализа рассуждений. Понятие предиката. Классификация предикатов. Множество истинности предиката. Логические операции над предикатами. Кванторные операции над предикатами. Формулы логики предикатов. Интерпретации и классификация формул логики предикатов. Общезначимые формулы (тавтологии) логики предикатов. Распознавательные задачи общезначимости и выполнимости формул логики предикатов (основные понятия). равносильные формулы логики предикатов. Приведенная и нормальная формы для формул логики предикатов. Применение логики предикатов для описания математических понятий.

Раздел 2. Комбинаторный анализ

Тема 2.1. Классические комбинаторные объекты

Основные правила комбинаторики (правила суммы, произведения и деления, биективное правило). Выборки. Типы выборок. Размещения без повторений и с повторениями. Перестановки. Сочетания без повторений и с повторениями. Биномиальная теорема. Бином Ньютона. Биномиальные тождества. Полиномиальный коэффициент. Мультимножества. Перестановки мультимножеств. Полиномиальная теорема. Разбиения множеств и чисел. Числа Стирлинга второго рода и числа Белла.

Тема 2.2. Методы перечисления

Формула включений и исключений. Применения формулы включений и исключений («беспорядки», число сюръективных отображений, формула Эйлера). Рекуррентные соотношения. Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные однородные рекуррентные соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами (теорема о структуре их общего решения).

Раздел 3. Булевы функции

Тема 3.1. Начальные понятия теории булевых функций

Булевы функции. Табличное задание булевых функций. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций. Разложение Шеннона булевых функций. Двойственность. Принцип двойственности.

Тема 3.2. Специальные представления булевых функций

Представление булевых функций посредством формул. Равносильные формулы. Основные равносильности. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ и СДНФ). Алгоритмы построения СДНФ. Единственность СДНФ. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ и СКНФ). Алгоритмы построения СКНФ. Единственность СКНФ. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Существование и единственность полинома Жегалкина. Алгоритмы построения полинома Жегалкина.

Тема 3.3. Замкнутость и полнота систем булевых функций

Понятие замыкания. Замкнутые классы булевых функций. Понятие полной системы. Примеры полных систем. Основные замкнутые классы и их свойства (классы T_0 , T_1 , L , S , M). Теорема Поста (критерий функциональной полноты) и ее доказательство. Понятие базиса. Теорема о максимальном числе функций в базисе.

Тема 3.4. Минимизация булевых функций

Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Типы ДНФ, связанных с задачей минимизации булевых функций (сокращенная, тупиковая и минимальная ДНФ). Метод Квайна минимизации булевых функций в классе ДНФ.

Раздел 4. Графы

Тема 4.1. Начальные понятия теории графов

Определение графа. Некоторые специальные графы. Абстрактные (непомеченные) и помеченные графы. Число помеченных графов. Изоморфизм графов. Способы задания графов. Подграфы. Операции над графами. Степенная последовательность графа. Критерий Гавела-Хакими графичности последовательности. Маршруты, связность, метрические

инварианты, поиск в ширину. Связь между числами вершин, ребер и компонент связности графа.

Тема 4.2. Двудольные графы и деревья

Двудольные графы. Критерий Кёнига двудольности графа. Деревья. Эквивалентные определения дерева. Код Прюфера дерева. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев.

Тема 4.3. Плоские и планарные графы

Плоские и планарные графы. Грани плоского графа. Формула Эйлера. Свойства планарных графов. Гомеоморфизм графов. Критерий Понтрягина — Куратовского планарности графа. Миноры графов. Критерий Вагнера планарности графа.

Тема 4.4. Обходы графов

Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Алгоритмы построения эйлерова цикла в эйлеровом графе. Гамильтоновы циклы и цепи. Необходимые условия гамильтоновости графов. Достаточные условия гамильтоновости графов (теоремы Оре и Дирака).

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Элементы математической логики и теории множеств	24	22				4	Коллоквиум №1.
1.1	Логика высказываний	10	8				2	Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой. Контрольная работа №1.
1.2	Множества, отображения, бинарные отношения	8	8					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с

								его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой. Контрольная работа №2.
1.3	Логика предикатов	6	6				2	Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой. Контрольная работа №3.
2	Комбинаторный анализ	14	14					Контрольная работа №4.
2.1	Классические комбинаторные объекты	8	8					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
2.2	Методы перечисления	6	6					Устный опрос. Собеседование.

								Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
3	Булевы функции	12	12				2	Контрольная работа №5. Коллоквиум №2.
3.1	Начальные понятия теории булевых функций	2					2	Собеседование. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
3.2	Специальные представления булевых функций	4	4					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
3.3	Замкнутость и полнота систем булевых функций	4	4					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним

								упражнениям с его устной защитой.
3.4	Минимизация булевых функций	2	4					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой.
4	Графы	14	12				2	Контрольная работа №6.
4.1	Начальные понятия теории графов	6	4				2	Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
4.2	Двудольные графы и деревья	2	2					Устный опрос. Собеседование. Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой. Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.
4.3	Плоские и планарные графы	2	4					Устный опрос.

								<p>Собеседование.</p> <p>Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой.</p> <p>Отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.</p>
4.4	Обходы графов	4	2					<p>Устный опрос.</p> <p>Собеседование.</p> <p>Отчет по аудиторным практическим упражнениям с его устной защитой.</p>

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я. М. Ерусалимский. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2018. – 472 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/212897>.
2. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. – 112 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/247400>.
3. Игошин, В. И. Математическая логика: учебное пособие / В. И. Игошин. — Москва: ИНФРА-М, 2024. – 399 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс]. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2137011>.
4. Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. – 383 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Алексеев, В.Б. Лекции по дискретной математике: учебное пособие / В. Б. Алексеев. – М.: Инфра-М, 2013. – 90 с.
2. Верещагин, Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях) / Н. К. Верещагин, А. Х. Шень. – М.: МЦНМО, 2012.
3. Гаврилов, Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.
4. Гладкий, А. В. Введение в современную логику. Учебное пособие / А. В. Гладкий. – М.: Либроком, 2016. – 238 с.
5. Глухов, М.М. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов / М.М. Глухов, А.Б. Шишков. – Спб.: Лань, 2012. – 416 с.
6. Журавлев, Ю.И. Дискретный анализ: учебное пособие в двух частях / Ю.И. Журавлев, Ю.А. Флеров, М.Н. Вялый. – М.: Юрайт, 2018.
7. Зуев, Ю.А. По океану дискретной математики: учебное пособие в двух частях / Ю.А. Зуев. – М.: Ленанд, 2017.
8. Игошин, В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие / В. И. Игошин. – Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2019. – 392 с. – Текст : электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/986940>.
9. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учебное пособие / Под редакцией К.А. Рыбникова. – М.: Наука, 1982. – 368 с.

10. Кононов, С.Г. Введение в математику: учебное пособие в трех частях для студентов механико-математического факультета специальности G 31 001 «Математика» / С.Г. Кононов, Р.И. Тышкевич, В.И. Янчевский. – Мн.: БГУ, 2003.
11. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2004. – 256 с.
12. Ландо, С.К. Введение в дискретную математику / С.К. Ландо. – М.: МЦНМО, 2012. – 265 с.
13. Леонтьев, В.К. Избранные задачи комбинаторного анализа / В.К. Леонтьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 184 с.
14. Марченков, С.С. Основы теории булевых функций / С.С. Марченков. – М.: Физматлит, 2014. – 136 с.
15. Пережогин, А.Л. Дискретная математика. Сборник задач / А.Л. Пережогин. – Новосибирск: НГУ, 2017. – 96 с.
16. Рыбников, К.А. Введение в комбинаторный анализ / К.А. Рыбников. – М.: Ленанд, 2018. – 312 с.
17. Селезнева, С.Н. Основы дискретной математики / С.Н. Селезнева. – М.: Макс-Пресс, 2010. – 60 с.
18. Таранников, Ю.В. Дискретная математика. Задачник. Учебное пособие / Ю.В. Таранников. – М.: Юрайт, 2016. – 386 с.
19. Теория графов в задачах и упражнениях / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, Р.И. Тышкевич, В.И. Сарванов. – М.: Либроком, 2016. – 416 с.
20. Элементы дискретной математики в задачах / А.А. Глибичук и др. – М.: МЦНМО, 2016. – 176 с.
21. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

- устные опросы;
- собеседования;
- проведение коллоквиума;
- письменные контрольные работы по отдельным темам курса;
- отчеты по аудиторным практическим упражнениям с их устной защитой;
- отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» учебным планом предусмотрены **зачет и экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- работа на практических занятиях – 30 %;
- контрольные работы – 60 %;
- коллоквиум – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40% и экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень тем для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема № 1.1. Логика высказываний (2 ч)

Приложения логики высказываний.

Форма контроля – собеседование, отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.

Тема № 1.3. Логика предикатов (2 ч)

Построение приведенной и нормальной форм формул логики предикатов.

Форма контроля – собеседование, отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.

Тема № 3.1. Начальные понятия теории булевых функций (2 ч)

Булевы функции. Табличное задание булевых функций. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций.

Форма контроля – собеседование, отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.

Тема № 4.1. Начальные понятия теории графов (2 ч)

Степенные последовательности графов. Алгоритм проверки последовательности на графичность.

Форма контроля – собеседование, отчет по домашним упражнениям с его устной защитой.

Примерная тематика практических занятий

1-й семестр

Элементы математической логики и теории множеств

Занятие 1. Высказывания и операции над ними. Таблицы истинности формул логики высказываний.

Занятие 2. Равносильные формулы. Основные равносильности. Тавтологии. Противоречия.

Занятие 3. Логическое следование. Теорема о логическом следствии.

Занятие 4. Контрольная работа №1.

Занятие 5. Множества. Операции над множествами. Теоретико-множественные тождества.

Занятие 6. Понятие отображения. Основные классы отображений. Композиция отображений. Обратное отображение.

Занятие 7. Бинарные отношения и их свойства. Типы бинарных отношений. Отношения эквивалентности.

Занятие 8. Контрольная работа №2.

Занятие 9. Предикаты и операции над ними. Перевод предложений с естественного языка на язык логики предикатов. Применение языка логики предикатов для описания математических понятий.

Занятие 10. Формулы логики предикатов (ФЛП). Понятие Интерпретации. Виды формул логики предикатов (общезначимые, выполнимые, опровержимые, невыполнимые). Равносильные ФЛП.

Занятие 11. Контрольная работа №3.

Комбинаторный анализ

Занятие 12. Основные правила комбинаторики (правила суммы, произведения и деления, биективное правило).

Занятия 13-14. Выборки. Типы выборок. Размещения без повторений и с повторениями. Перестановки. Сочетания без повторений и с повторениями. Бином Ньютона.

Занятие 15. Полиномиальный коэффициент. Мультимножества. Перестановки мультимножеств. Полиномиальная теорема.

2-й семестр

Комбинаторный анализ

Занятие 1. Формула включений и исключений.

Занятие 2. Рекуррентные соотношения. Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Занятие 3. Контрольная работа №4.

Булевы функции

Занятие 4. ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ булевых функций и методы их построения.

Занятие 5. Полином Жегалкина булевой функции и методы его построения.

Занятие 6. Замыкание. Основные замкнутые классы булевых функций.

Занятие 7. Полные системы булевых функций. Теорема Поста (критерий функциональной полноты).

Занятие 8. Метод Квайна минимизации булевых функций в классе ДНФ.

Занятие 9. Контрольная работа №5.

Графы

Занятие 10. Начальные понятия теории графов. Помеченные и непомеченные графы. Изоморфизм. Подграфы. Операции над графами.

Занятие 11. Маршруты, цепи и циклы графа. Связность графа.

Занятие 12. Двудольные графы. Деревья.

Занятие 13. Плоские и планарные графы. Критерии планарности.

Занятие 14. Контрольная работа №6.

Занятие 15. Эйлеровы и гамильтоновы графы.

Рекомендуемая тематика контрольных работ и коллоквиума:

1-й семестр

1. Контрольная работа № 1 «Логика высказываний и ее приложения».

2. Контрольная работа № 2 «Множества. Отображения. Отношения».

3. Контрольная работа №3. «Предикаты. Формулы логики предикатов».

4. Коллоквиум «Элементы математической логики и теории множеств».

2-й семестр

1. Контрольная работа № 4 «Комбинаторный анализ».

2. Контрольная работа № 5 «Булевы функции».

3. Контрольная работа № 6 «Графы».

4. Коллоквиум «Булевы функции».

Примерные варианты контрольных работ:

Контрольная работа № 1.

«Логика высказываний и ее приложения»

1. Постройте таблицу истинности для следующей формулы логики высказываний: $\overline{(A \rightarrow B)} \vee (A \sim \overline{B} \cdot C)$.

2. На основе определения выясните, является ли формула $(A \rightarrow C) \cdot B$ логическим следствием формул $(A \vee \overline{B}) \rightarrow C$ и $A \Leftrightarrow B$. Ответ обоснуйте, указав достаточное число необходимых для обоснования наборов.

3. Выбрав и обозначив подходящие элементарные высказывания, запишите следующее высказывание в символьном виде: «Для того, чтобы Моррис считал себя счастливым, необходимо, чтобы у него был домик на берегу моря или с винным погребом и много денег на счету».

- Постройте и запишите в символьном виде и словами его отрицание.
- Используя равносильные преобразования, приведите следующую формулу логики высказываний $((A \rightarrow B) \vee (A \vee \bar{B})) \sim A \cdot B$ к виду «дизъюнкция конъюнкций».
 - Докажите, что $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, \neg E \Rightarrow \neg D, A \vee C \models B \vee E$:
 - использовав теорему о логическом следствии и равносильные преобразования;–
 - методом от противного;
 - правилами логического следования.
 - Докажите, что $\models A \wedge B$ тогда и только тогда, когда $\models A$ и $\models B$.
 - По обвинению в ограблении перед судом предстали А, В, С и D. Установлено следующее:
 - если А не виновен или В виновен, то С виновен;
 - если А не виновен, то С виновен;
 - неверно, что если С не виновен, то D виновен.
 Построив модель этой задачи в терминах логики высказываний, установите виновность каждого из четырех участников.

Контрольная работа № 2.

«Множества. Отображения. Отношения»

- Используя основные теоретико-множественные тождества, докажите, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- Докажите следующее теоретико-множественное тождество

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$
- Выясните, является ли отображение $f: Z \rightarrow Z$, заданное правилом $f(n) = n + 2$ для $n < 2$ и правилом $f(n) = 2n$ для $n \geq 2$, инъекцией, сюръекцией или биекцией. Ответы обоснуйте.
- В течение семестра 28 студентов написали три контрольные работы, каждая из которых была оценена в 7, 8 или 9 баллов. Верно ли, что найдутся два студента, которые получили одинаковые оценки на всех контрольных работах? Ответ обоснуйте.
- Для указанного отношения R на множестве A установите его свойства и тип, если тот есть. Если R является отношением эквивалентности, найдите классы эквивалентности по R .

$$A = 2^{\{a,b,c,d\}}, R = \{(X, Y) : |X| = |Y|\}.$$
- Докажите, что для любых отношений $R \subseteq X \times Y$ и $S \subseteq Y \times Z$ выполнено $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- Докажите, что если R и S — антисимметричные бинарные отношения, определенные на одной и той же паре множеств, то $R \cap S$ — антисимметричное отношение. Сохраняется ли свойство антисимметричности при объединении отношений? Ответ обоснуйте.

Контрольная работа № 3.

«Предикаты. Формулы логики предикатов»

1. На языке логики предикатов запишите определение предела последовательности: число a называется пределом числовой последовательности (a_n) , если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n_ε такое, что для любого натурального числа $n > n_\varepsilon$ имеет место неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Постройте и запишите (в «символьном виде» и словами) его отрицание.

2. Придайте формуле логики предикатов

$$\forall x \forall y (P(x) \cdot P(y) \cdot R(x, y) \rightarrow (x = y))$$

интерпретацию $P(x) = \langle x - \text{составное число} \rangle$, $R(x, y) = \langle x \text{ делится на } y \rangle$, x и y – натуральные числа; определите истинностное значение получившегося в результате высказывания.

3. Равносильными преобразованиями приведите формулу логики предикатов

$$(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow ((\exists x P(x)) \rightarrow (\exists y Q(y)))$$

к нормальной форме.

4. Докажите равносильность логики предикатов

$$\overline{\exists x \forall y P(x, y)} \equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)}$$

5. Докажите, что формула логики предикатов

$$\overline{(\forall x (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}))} \rightarrow \overline{((\forall x P(x)) \cdot (\exists x Q(x)))}$$

является тавтологией логики предикатов.

Контрольная работа № 4.

«Комбинаторный анализ»

1. Чему равен коэффициент при $a^4 b^8 c^{15} d^{16}$ в разложении $(7a + 13b - 23c + 42d - 73)^{108}$?
2. Сколько «слов» можно составить из пяти букв А и не более чем трех букв Б?
3. Сколькими способами можно собрать бригаду из трех маляров и четырех штукатуров, если имеется шесть маляров и восемь штукатуров?
4. Сколькими способами можно разложить n предметов по k коробкам, если:
- а) предметы одинаковы;
 - б) предметы различны, но в каждой коробке может лежать не более одного предмета?
5. Сколько различных решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 256$ при следующих ограничениях: $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 8$, $x_3 \geq 15$, $x_4 \geq 16$, $x_5 \geq 23$, $x_6 \geq 42$?

6. Сколькими способами можно вытащить из стандартной колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы среди них были карты каждой масти?
7. Найдите y_n , если $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$ и $y_0 = 0, y_1 = 1$.
8. 24 человека сдают каждый свою уникальную шляпу в гардероб. Сколькими способами они могут забрать шляпы назад так, чтобы никому не досталась своя?
9. Сколько различных n -полосных вымпелов можно составить, имея в распоряжении полосы трех цветов, если никакие две соседние полосы, а также первая с последней, не могут быть одного цвета?
10. Докажите, что

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Контрольная работа № 5.

«Булевы функции»

1. Постройте таблицу значений булевой функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus \neg x_2) \downarrow x_1) \vee (x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \neg x_3).$$
2. Не строя таблиц значений, построьте СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина для следующих булевых функций:
 - a) $f(x_1, x_2, x_3) = (01100011)$;
 - б) $f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_1 \vee x_3) \cdot x_2 \vee x_1 \vee \neg x_2$.
3. Для каждой из функций задания 2 определите, является ли та линейной, монотонной, самодвойственной. Ответы обоснуйте.
4. Является ли система булевых функций $\{0, 1, x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ полной? Ответ обоснуйте.
5. Найдите все тупиковые, кратчайшую и минимальную дизъюнктивные нормальные формы булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01100011)$.
6. Найдите число булевых функций от n переменных, принадлежащих множеству $T_0 \setminus (L \cap S)$.
7. Докажите, что для любой булевой функции f от натурального числа n переменных имеет место представление:

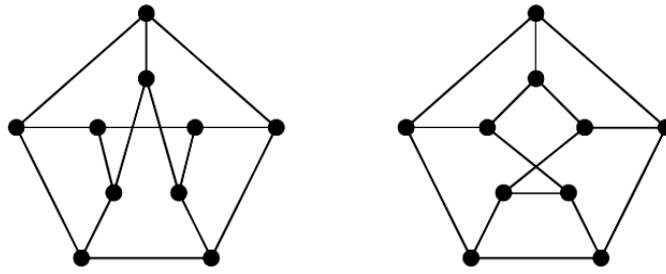
$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \oplus \neg x_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$
8. Можно ли из булевых функций $x_1 x_2 x_3$ $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ операциями суперпозиции функций и замены переменной получить булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3) = (00110001)$? Ответ обоснуйте.

Контрольная работа № 6.

«Графы»

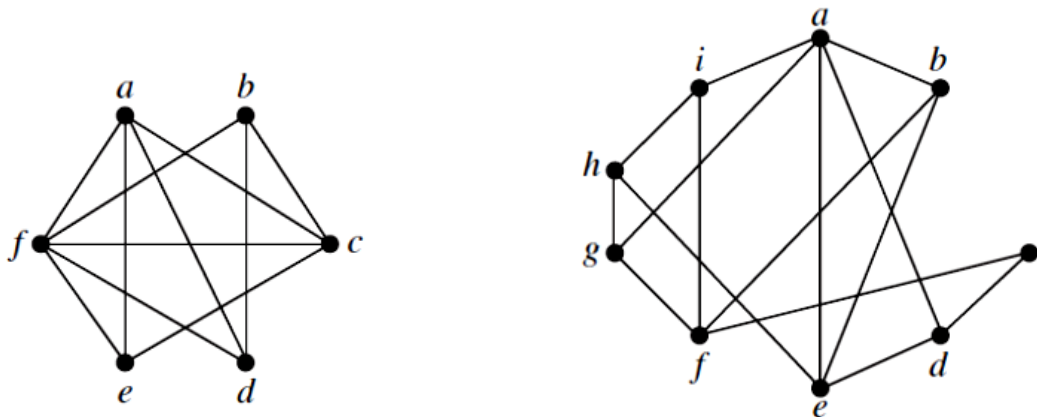
1. Используя алгоритм, основанный на критерии Гавела-Хакими, выясните, является ли последовательность $d = (5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$ графической. В случае утвердительного ответа в соответствии с тем же алгоритмом восстановите ее реализацию.

2. Изоморфны ли следующие два графа? Ответ обоснуйте.



3. Восстановите граф по его коду Прюфера: (2, 1, 2, 1, 3, 2, 7).

4. Определите, являются ли планарными следующие графы. Ответ обоснуйте.



5. Верно ли следующее утверждение: если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то существует цепь, соединяющая их? Ответ обоснуйте.

6. Верно ли, что любой (9, 29)-граф является связным? Ответ обоснуйте.

7. Докажите, что в любом графе G есть двудольный подграф H , для которого выполнено $|E(H)| \geq \frac{1}{2} \cdot |E(G)|$.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие методы:

- **метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

- **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

В качестве технических средств для организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательную платформу Insight Runner (www.acm.bsu.by), Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструменты с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к практическим занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, тесты, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень требований к зачету

1. Знать таблицы истинности базовых логических операций. Уметь строить таблицы истинности несложных формул логики высказываний и применять их для решения различных задач, связанных с ними (определять тип формулы и проверять формулы на логическое следование и логическую эквивалентность).

2. Уметь разбивать составное высказывание на элементарные и описывать его структуру формулой.

3. Знать основные равносильности логики высказываний и уметь их применять для упрощения формул.

4. Знать и понимать определение логического следствия и формулировку теоремы о логическом следствии и следствий из нее и уметь применять их для решения задач.

5. Знать и уметь применять важнейшие правила следования.

6. Знать основные приложения логики высказываний и уметь решать связанные с ними задачи.

7. Знать понятие предиката, уметь определять тип предиката.

8. Уметь переводить предложения естественного языка на язык логики предикатов, уметь использовать логику предикатов для описания математических понятий.

9. Знать понятие интерпретации, уметь придавать интерпретацию формуле логики высказываний, уметь читать высказывание, полученное в ее результате, и уметь определять его истинность.

10. Уметь определять тип несложной формулы логики предикатов.

11. Уметь строить приведенную и нормальную форму логики предикатов.

12. Знать понятие множества и операции над множествами, знать и уметь применять основные теоретико-множественные тождества для упрощений записи множеств, выраженных операциями над другими множествами.

13. Знать и уметь использовать структуру доказательства равенства множеств.

14. Знать основные типы отображений, уметь относить заданное несложное отображение к одному из основных типов отображений.

15. Знать принцип Дирихле и уметь его использовать при решении базовых задач.

16. Уметь определять свойства и тип несложных бинарных отношений.

17. Знать и уметь применять основные правила комбинаторики для решения базовых комбинаторных задач.

18. Знать и уметь использовать классические комбинаторные объекты для решения классических комбинаторных задач.

19. Знать биномиальную и полиномиальную теоремы.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями.

2. Понятие формулы логики высказываний. Основные типы формул: тавтологии, противоречия, выполнимые и опровержимые формулы. Равносильность формул. Теорема $A \equiv B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

3. Логическое следование и эквивалентность. Теорема о логическом следствии. Важнейшие правила следования.

4. Применение языка логики высказываний. Недостаточность логики высказываний для анализа рассуждений.

5. Понятие предиката. Типы предикатов. Логические операции над предикатами. Кванторные операции над предикатами.

6. Формулы логики предикатов. Интерпретации.

7. Классификация формул логики предикатов. Тавтологии. Равносильные формулы.

8. Приведенная и нормальная формы формул логики предикатов. Проблемы выполнимости и общезначимости формул в логике предикатов.

9. Множества. Подмножества. Операции над множествами. Основные теоретико-множественные тождества.

10. Отображения. Основные классы отображений. Композиция отображений. Принцип Дирихле.

11. Равномощные множества. Счетные и несчетные множества. Примеры.

12. Бинарные отношения. Операции над бинарными отношениями. Отношения эквивалентности и разбиения множеств.

13. Основные правила комбинаторики. Примеры.

14. Упорядоченные выборки. Размещения без повторений и с повторениями. Перестановки.
15. Неупорядоченные выборки. Сочетания без повторений и с повторениями. Кратчайшие пути в решетках.
16. Биномиальная теорема. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.
17. Полиномиальные коэффициенты. Мультимножества. Перестановки мультимножеств. Полиномиальная теорема.
18. Разбиения множеств и чисел. Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла.
19. Формула включений и исключений. Применения формулы включений и исключений: беспорядки, формула Эйлера, число сюръективных отображений.
20. Рекуррентные соотношения. Линейные однородные (неоднородные) рекуррентные соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами.
21. Структура общего решения линейного однородного (неоднородного) рекуррентного соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами.
22. Применение рекуррентных соотношений в комбинаторных подсчетах.
23. Булевы функции. Табличное задание булевых функций. Элементарные булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций.
24. Представление булевых функций посредством формул. Основные равносильности.
25. Разложение Шеннона булевых функций.
26. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ и СДНФ). Конъюнктивные нормальные формы (КНФ и СКНФ). Алгоритмы построения.
27. Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина. Единственность полинома Жегалкина. Методы построения полинома Жегалкина.
28. Замкнутые и полные системы булевых функций.
29. Основные замкнутые классы и их свойства.
30. Критерий полноты системы булевых функций.
31. Минимальные и кратчайшие дизъюнктивные нормальные формы булевой функции.
32. Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Метод Квайна.
33. Граф. Смежные вершины и смежные ребра. Окружение и степень вершины. Простейшие графы специального вида.
34. Графические последовательности. Критерий Гавела – Хаками графичности последовательности. Алгоритм распознавания графических последовательностей.

35. Помеченные графы. Изоморфизм графов. Группа автоморфизмов графа.
36. Подграфы. Основные операции над графами. n -Мерный куб.
37. Маршруты, цепи, циклы. Основные утверждения. Связные графы.
38. Связные компоненты. Соотношения между числами вершин, ребер и компонент связности графа. Волновой алгоритм (поиск в ширину).
39. Метрические характеристики графов. Соотношения между радиусом и диаметром графа.
40. Двудольные графы. Теорема Кёнига. Алгоритм распознавания двудольности графа.
41. Деревья. Основные свойства деревьев.
42. Остовы. Цикломатическое число графа.
43. Кодирование деревьев. Код Прюфера. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев.
44. Плоские и планарные графы. Грани плоского графа. Формула Эйлера.
45. Максимальные планарные графы. Верхняя оценка числа ребер планарного графа.
46. Гомеоморфизм графов. Критерий Понтрягина – Куратовского.
47. Миноры графов. Критерий Вагнера.
48. Эйлеровы графы. Теорема Эйлера. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе.
49. Гамильтоновы графы. Необходимое условие гамильтоновости. Техника замыканий и достаточные условия гамильтоновости графов (теоремы Дирака и Оре).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Основы теоретической информатики	Биомедицинской информатики	нет	Изменений не требуется (протокол № 16 от 05.05.2023 г.)
2. Алгоритмы и структуры данных	Дискретной математики и алгоритмики	нет	Изменений не требуется (протокол № 16 от 05.05.2023 г.)
3. Модели и алгоритмы задач дискретной оптимизации	Дискретной математики и алгоритмики	нет	Изменений не требуется (протокол № 16 от 05.05.2023 г.)
4. Теория вероятностей и математическая статистика»	Теории вероятностей и математической статистики	нет	Изменений не требуется (протокол № 16 от 05.05.2023 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
