

Белорусский государственный университет



**ТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе  
и образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

1 декабря 2023 г.

Регистрационный № УД -12464/уч.

*Теория графов*

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 04 Информатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 04-2021, типового учебного плана №G 31-1-029/пр-тип от 30.06.2021, учебных планов №G 31-1-031/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-021/уч.ин. от 23.07.2021.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**В.И. Сарванов** – доцент кафедры дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

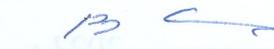
**В.И. Бенедиктович** – ведущий научный сотрудник отдела комбинаторных моделей и алгоритмов Института математики Национальной академии наук Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой дискретной математики и алгоритмики  
(протокол № 3 от 19 октября 2023);

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол №3 от 30 ноября 2023)

Заведующий кафедрой



В.М.Котов

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

Цель преподавания учебной дисциплины – ознакомление студентов с современным состоянием теории графов и последними достижениями в разработке теоретико-графовых алгоритмов, а также сложностными аспектами алгоритмических задач. В программу дисциплины включены разделы, отражающие современное состояние теории графов. Большое внимание уделяется последним достижениям в разработке теоретико-графовых алгоритмов, а также сложностным аспектам алгоритмических задач. Даются примеры сведения прикладных задач к задачам теории графов и использования аппарата этой теории. Приводятся связи теории графов с другими разделами дискретной математики, такими, например, как теория кодирования, комбинаторная оптимизация, комбинаторная геометрия.

### Задачи учебной дисциплины:

1. Ознакомление студентов с основными понятиями и фактами теории графов, и связями между ними.
2. Обучение методам нахождения ключевых структурных и численных характеристик графов.
3. Ознакомление со сложностным статусом модельных задач теории графов.

### Место учебной дисциплины

В системе подготовки специалиста с высшим образованием для специальности 1-31 03 04 «Информатика» учебная дисциплина **относится к циклу** дисциплин специализации.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам.

Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины государственного компонента «Дискретная математика и математическая логика», «Алгоритмы и структуры данных», «Модели и алгоритмы задач дискретной оптимизации» модуля «Дискретные структуры и алгоритмы». Знания, полученные в учебной дисциплине, используются при изучении дисциплины компонента учреждения образования «Исследование операций» модуля «Математические методы принятия решений».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория графов» должно обеспечить формирование следующей **универсальной компетенции**:

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные понятия и факты теории графов и связи между ними;
- ключевые структурные и численные характеристики графов;
- сложностной статус модельных задач теории графов;
- связи теории графов с другими разделами дискретной математики;

**уметь:**

- строить и анализировать теоретико-графовые модели прикладных задач;
- оценивать основные параметры графов;
- оценивать сложность алгоритмического решения теоретико-графовых задач;

**владеть:**

- базовыми алгоритмами анализа графов;
- навыками построения и анализа теоретико-графовых моделей прикладных задач.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 6-м семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория графов» отведено:

- в очной форме получения высшего образования: 106 часов, в том числе 64 аудиторных часа, из них: лекции – 32 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Базовые понятия и определения

### Тема 1.1. Операции над графами, подграфы и изоморфизм

Определение графа. Операции удаления элементов, стягивания и слияния. Остовные и порожденные подграфы. Матрицы графа. Изоморфизм графов и группа автоморфизмов. Проблемы вершинной и реберной реконструкции.

### Тема 1.2. Цепи, циклы, компоненты и некоторые классы графов

Маршруты, цепи, и компоненты связности. Метрические характеристики. Степени вершин графа и регулярные графы.  $k$ -дольные графы и критерий двудольности. Графы пересечений и реберные графы.

## Раздел 2. Связность

### Тема 2.1. Деревья, вершинная и реберная связности

Эквивалентные определения дерева. Матричная теорема Кирхгофа и теорема Кэли о числе остовных деревьев. Дерево Штейнера. Соотношение между числами вершинной и реберной связности.

### Тема 2.2. Двусвязные графы и подграфы

Эквивалентные определения двусвязного графа. Блоки, дерево блоков и точек сочленения. Поиск в глубину с выделением блоков и точек сочленения.

### Тема 2.3. $k$ -связные графы и $k$ -связные компоненты

Теорема о пересечении  $k$ -компоненты. Теоремы Уитни и Менгера о непересекающихся цепях. Реберная  $k$ -связность. Алгоритмические аспекты  $k$ -связности ( $k > 2$ ).

## Раздел 3. Независимость и покрытия

### Тема 3.1. Вершинные независимость и покрытие

Соотношение между числами независимости и покрытия. Оценки числа независимости в терминах степеней вершин и спектра матрицы смежности. Клики и доминирующие множества. Двухцветная теорема Рамсея. Приложения независимости, покрытий и доминирования.

### Тема 3.2. Паросочетания и реберные покрытия

Теорема Галлаи о числах реберной независимости и реберного покрытия. Теоремы Холла и Тата о паросочетаниях. 1-факторизация регулярного двудольного графа. Соотношение между числами независимости, покрытия и паросочетания в двудольном графе. Двудольные графы и семейства подмножеств.

### **Тема 3.3 Алгоритмические аспекты независимости и покрытий**

Увеличивающие цепи и построение наибольшего паросочетания в двудольном графе. Полиномиальная разрешимость задачи о наибольшем независимом множестве вершин в классе двудольных графов. Алгоритмические аспекты независимости в графах отличных от двудольных.

## **Раздел 4. Планарность**

### **Тема 4.1. Плоские и планарные графы**

Укладки графа. Формула Эйлера и ее следствия. Двусвязные плоские графы. Плоские триангуляции. Двойственность и планарность. Проблемы построения экстремальных триангуляций.

### **Тема 4.2. Критерии планарности и характеристики непланарных графов, связанные с планарностью**

Три критерия планарности (Понтрягин-Куратовский, Вагнер, Уитни). Род графа и число скрещиваний. Толщина и искаженность графа. Алгоритмические аспекты.

## **Раздел 5. Обходы в графах**

### **Тема 5.1. Эйлеровы графы**

Критерий эйлеровости. Покрытие графа цепями. Теорема Коцига о подциклах. Алгоритмические аспекты эйлеровости. Эйлеровы графы в приложениях.

### **Тема 5.2. Гамильтоновы циклы и цепи**

Достаточные условия гамильтоновости. Необходимое условие гамильтоновости плоских графов. Алгоритмические аспекты гамильтоновости и задача о коммивояжере.

## **Раздел 6. Введение в теорию NP-полноты**

### **Тема 6.1. Классы P, NP и NP-полные задачи**

Недетерминированные вычисления и полиномиальные сводимости. Теорема Кука. Список базовых NP-полных задач. Сильная NP-полнота.

### **Тема 6.2. Другие классы сложности**

Классы co-NP,  $NP \cap co-NP$ , KP и P-SPACE. Понятие о неконструктивной полиномиальной разрешимости.

## **Раздел 7. Степенные последовательности**

### **Тема 7.1. Графическая последовательность и критерии графичности**

Теорема о переключениях. Два критерия графичности (Гавел-Хаками, Эрдеш-Галлаи).

## **Тема 7.2. Специальные реализации графической последовательности**

Реализации деревом и связным графом. Гамильтонова реализация.

### **Раздел 8. Раскраски**

#### **Тема 8.1. Вершинная раскраска и оценки хроматического числа**

Теорема Брукса. Хроматический полином. Раскраски плоских графов и проблема четырех красок. Гипотеза Хадвигера. Теорема Рингеля-Янгса о хроматическом числе поверхности.

#### **Тема 8.2. Совершенные графы и реберная раскраска**

Определение и примеры совершенных графов. Критерий совершенности графа. Теорема Визинга о хроматическом индексе. Алгоритмические аспекты раскрашивания.

### **Раздел 9. Оргграфы и гиперграфы**

#### **Тема 9.1. Оргграфы**

Эйлеровы и гамильтоновы оргграфы. Раскраски, независимость и пути в оргграфах. Теоремы Галлаи и Дилворта. База и ядро.

#### **Тема 9.2. Гиперграфы**

Кенигово представление гиперграфа. Паросочетания, независимость и раскраски гиперграфов. Бихроматические гиперграфы. Реализации гиперграфов. Приложения в проектировании сверхбольших интегральных схем.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	<b>Базовые понятия и определения</b>	<b>2</b>			<b>2</b>			
1.1	Операции над графами, подграфы и изоморфизм	1						Устный опрос.
1.2	Цепи, циклы, компоненты и некоторые классы графов	1			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
2	<b>Связность</b>	<b>6</b>			<b>6</b>			
2.1	Деревья, вершинная и реберная связности	2			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
2.2	Двусвязные графы и подграфы	2			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.

2.3	$k$ -связные графы и $k$ -связные компоненты	2			2			Собеседование. Контрольная работа №1
3	<b>Независимость и покрытия</b>	<b>6</b>			<b>6</b>			
3.1	Вершинные независимость и покрытие	2			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
3.2	Паросочетания и реберные покрытия	2			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
3.3	Алгоритмические аспекты независимости и покрытий	2			2			Собеседование. Контрольная работа №2.
4	<b>Планарность</b>	<b>4</b>			<b>4</b>			
4.1	Плоские и планарные графы	2			2			Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
4.2	Критерии планарности и характеристики непланарных графов, связанные с планарностью	2			2			Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
5	<b>Обходы в графах</b>	<b>4</b>			<b>2</b>		<b>2</b>	
5.1	Эйлеровы графы	2			1		1	Дискуссия. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
5.2	Гамильтоновы циклы и цепи	2			1		1	Дискуссия. Отчеты по

							домашним упражнениям с их устной защитой.
6	<b>Введение в теорию NP-полноты</b>	2			2		
6.1	Классы P, NP и NP-полные задачи	1					Устный опрос.
6.2	Другие классы сложности	1			2		Коллоквиум.
7	<b>Степенные последовательности</b>	2			2		
7.1	Графическая последовательность и критерии графичности	1					Устный опрос.
7.2	Специальные реализации графической последовательности	1			2		Собеседование. Контрольная работа №3.
8	<b>Раскраски</b>	4			4		
8.1	Вершинная раскраска и оценки хроматического числа	2			2		Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
8.2.	Совершенные графы и реберная раскраска	2			2		Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
9	<b>Орграфы и гиперграфы</b>	2			2		
9.1	Орграфы	1					Устный опрос.
9.2	Гиперграфы	1			2		Устный опрос. Отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. – 383 с.

2. Держинский, Р. И. Теория графов : учебное пособие / Р. И. Держинский, Б. А. Крынецкий. — Москва : РТУ МИРЭА, 2022. — 104 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/311000> (дата обращения: 09.03.2024).

3. Игнатъев, А. В. Теория графов. Лабораторные работы: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Информационные системы и технологии» / А. В. Игнатъев. — 1-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022 — 64 с. — URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/354021>.

4. Котов, В. М. Сборник задач по теории алгоритмов. Организация перебора и приближенные алгоритмы [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 04 «Информатика» / В. М. Котов, Е. П. Соболевская, Г. П. Волчкова ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. дискретной математики и алгоритмики. – Минск : БГУ, 2021. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/272717>.

5. Котов, В. М. Теория алгоритмов. Организация перебора и приближенные алгоритмы : учеб.-метод. пособие / В. М. Котов, Е. П. Соболевская, Г. П. Волчкова. – Минск: БГУ, 2022. – 151 с.

### Перечень дополнительной литературы

6. Алексеев, В. Е. Теория графов : учебное пособие / В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова. — Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2017. — 119 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153421> (дата обращения: 09.03.2024).

7. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. М.: Мир, 1982. 416 с.

8. Дистель, Р. Теория графов / Р. Дистель. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 336 с.

9. Емеличев, В.А. Теория графов в задачах и упражнениях / В.А. Емеличев, И.Э. Зверович, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. М.: УРСС, 2013. 416 с.

10. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. М.: Наука, 1987. 384 с.

11. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. М.: Мир, 1978. 432 с.

12. Ore, O. Теория графов / О. Оре. М.: Наука, 1980. 336 с.
13. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. М.: Мир, 1973. 300 с.
14. Bondy, J.A. Graph theory / J.A. Bondy, U.S.R. Murty. Berlin: Springer, 2008. 651 p.
15. Chartrand, G. Applied and algorithmic graph theory / G. Chartrand, O.R. Oellermann. McGraw-Hill, 1993. 395 p.
16. West, D.B. Introduction to graph theory / D.B. West. NJ: Prentice Hall, 1996. 512 p.

### **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: коллоквиум, собеседование, дискуссия.
2. Письменная форма: контрольные работы.
3. Устно-письменная форма: отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.

В качестве рекомендуемых технических средств диагностики используется Образовательная платформа Moodle (<https://edufpmi.bsu.by>).

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Теория графов» учебными планами предусмотрен зачет.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- отчет по домашним упражнениям с их устной защитой – 80 %;
- контрольные работы – 10 %;
- коллоквиум – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 60% и отметки на зачете – 40%.

## **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

Управляемая самостоятельная работа предлагается в виде заданий научно-исследовательского характера.

### **Тема 5.1. Эйлеровы графы (1ч.).**

Алгоритмические аспекты эйлеровости. Анализ вычислительной сложности алгоритмов построения эйлера цикла.

**Форма контроля** – дискуссия.

### **Тема 5.2. Гамильтоновы циклы и цепи. (1 ч.).**

Алгоритмические аспекты гамильтоновости и задача о коммивояжере. Анализ вычислительной сложности алгоритмов построения гамильтонова цикла.

**Форма контроля** – дискуссия.

## **Примерная тематика лабораторных занятий**

Занятие 1. Базовые понятия и определения теории графов.

Занятие 2. Вершинная и реберная связности.

Занятие 3. К-связные графы.

Занятие 4. Вершинные независимость и покрытие.

Занятие 5. Паросочетания и реберные покрытия.

Занятие 6. Наибольшее паросочетание и наибольшее независимое множество в двудольном графе.

Занятие 7. Формула Эйлера и ее следствия.

Занятие 8. Плоские триангуляции, двойственность и планарность.

Занятие 9. Эйлеровы графы.

Занятие 10. Гамильтоновы графы.

Занятие 11. Полиномиальные сводимости и NP-полные задачи.

Занятие 12. Реализации графической последовательности с заданными свойствами.

Занятие 13. Хроматическое число и хроматический индекс.

Занятие 14. Раскраски, независимости и пути в орграфах.

Занятие 15. Гиперграфы: раскраски, независимость и реализации.

*Рекомендуемая тематика контрольных работ и коллоквиума:*

- 1) Контрольная работа № 1. «Связность и  $k$ -связность».
- 2) Контрольная работа № 2. «Независимость и покрытия».
- 3) Контрольная работа № 3. «Обходы и планарность. Вершинные и реберные раскраски».
- 4) Коллоквиум «Алгоритмические и сложностные аспекты теории графов».

## Примерные варианты контрольных работ

### Связность

1. Для заданного графа найти 2- и 3- компоненты (выписать соответствующие списки вершин).
2. Построить граф с заданными параметрами  $\chi, \lambda, \delta, \Delta$ .
3. Являются ли указанные графы изоморфными?

### Планарность и обходы

1. Нарисовать плоский 3-связный граф, у которого 8 граней, из них:  
 $f_3 = 6, f_4 = 3, f_5 = 3, f_6 = 1$ .
2. Привести пример: граф  $G$  – кубический, 3-связный и не гамильтонов.
3. Является ли граф  $C_n^2$  – планарным?

### Примерные варианты вопросов к коллоквиуму

1. Недетерминированная машина Тьюринга.
2. Классы  $P$  и  $NP$ .
3. Класс  $NP \cap co-NP$ .
4. Трансформация и сводимость по Тьюрингу.
5.  $NP$ -полные и  $NP$ -трудные задачи.
6. Сильная  $NP$ -полнота.
7. Теорема Ладнера и её интерпретация.
8. Класс  $KP$  и задача «перманент  $(0,1)$ -матрицы».
9. Класс  $P-SPACE$ .
10. Сложностной статус задач «гамильтонов цикл» и «независимость» в различных классах графов.
11. Миноры в графах и неконструктивная полиномиальная разрешимость.

### Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие методы:

– **метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

– **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

В качестве технических средств для организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструмент с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

#### **Примерный перечень вопросов к зачету**

1. Изоморфизм, группа автоморфизмов графа и гипотеза Келли–Улама о реконструируемости.
2. Матрицы, связанные с графами.
3. Метрические характеристики графа.
4. Числа вершинной и рёберной связности графа.
5. Теорема, дающая эквивалентные определения дерева.
6. Теорема Кирхгофа о деревьях.
7. Задача построения дерева Штейнера.
8.  $k$ -связные компоненты графа.
9. Теорема, дающая эквивалентные определения 2-связного графа.
10. Свойства блоков графа, дерево блоков и точек сочленения.
11. Теорема Менгера и критерий  $k$ -связности графа.
12. Укладки графа на плоскости и в пространстве.
13. Теорема Эйлера о плоских графах и её следствия.
14. Критерий 2-связности плоского графа.
15. Плоские триангуляции.
16. Критерии планарности Понтрягина-Куратовского и Вагнера.
17. Геометрически двойственный граф.
18. Абстрактно двойственный граф и критерий планарности Вагнера.
19. Вложение графа в поверхность и род графа.
20. Число скрещиваний графа.
21. Искаженность и толщина графа.

22. Критерий эйлеровости графа и минимальное число рёберно-непересекающихся цепей, покрывающих граф.
23. Теорема Коцига об эйлеровых графах.
24. Достаточные условия Дирака, Оре и Хватала гамильтоновости графа.
25. Достаточное условие гамильтоновости планарного графа.
26. Гамильтоновы циклы в степенях графов.
27. Достаточное условие гамильтоновости графа в терминах запрещённых подграфов.
28. Необходимое условие гамильтоновости плоского графа.
29. Оценки числа  $\alpha_0(G)$  через степени вершин графа и спектр матрицы смежности.
30. Связь между числами независимости и покрытия произвольного графа.
31. Теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.
32. Следствия из теоремы Холла для случая регулярных двудольных графов.
33. Критерий существования в двудольном графе паросочетания заданной мощности.
34. Критерий существования совершенного паросочетания в произвольном графе.
35. Связь между числами независимости и покрытия двудольного графа.
36. Полиномиальная разрешимость задачи о наибольшем независимом множестве в классе двудольных графов.
37. Оценки хроматического числа графа - теорема Брукса.
38. Оценки хроматического индекса.
39. Критерий 3-раскрашиваемости плоской триангуляции.
40. Теорема Хивуда о раскраске планарного графа.
41. Гипотеза Хадвигера.
42. Теорема Рингеля-Янгса о хроматическом числе поверхности.
43. Совершенные графы.
44. Хроматический полином.
45. Лемма о переключениях и связь между различными реализациями графической последовательности.
46. Критерии графичности.
47. Орграфы сильные и односторонние.
48. Сильные компоненты и конденсация орграфа.
49. Достаточное условие гамильтоновости орграфа.
50. Теорема о путях и числе независимости орграфа.
51. Теорема Дилворта.
52. Теорема о путях и хроматическом числе орграфа.
53. Двойственный гиперграф и кёнигово представление гиперграфа.
54. Раскраски вершин гиперграфа.
55. Реализации гиперграфов.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Исследование операций	Информационных систем управления	нет	Изменений не требуется (протокол № 3 от 19.10.2023 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_