

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

 О.И. Прохоренко

30 июня 2023 г.

Регистрационный № УД-704 /6.

Дискретная математика и математическая логика

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

6-05-0533-11 Прикладная информатика

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

и ее специальности

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-11-2023 специальности 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», примерного учебного плана, регистрационный № 6-05-05-029/пр. от 30.01.2023, учебных планов БГУ: №6-5.3-59/03 от 15.05. 2023 г., №6-5.3-59/04 от 15.05. 2023 г., №6-5.3-59/05 от 15.05. 2023 г., №6-5.3-59/01ин от 31.05. 2023 г., №6-5.3-59/02ин от 31.05. 2023 г., №6-5.3-59/03ин от 31.05. 2023 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Д.М. Васильков – доцент кафедры биомедицинской информатики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

М.Я. Ковалев – главный научный сотрудник лаборатории математической кибернетики ГНУ «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси», доктор физико-математических наук, профессор;

В.И. Бенедиктович – ведущий научный сотрудник отдела комбинаторных моделей и алгоритмов Института математики Национальной академии наук Беларуси, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дискретной математики и алгоритмики
(протокол № 16 от 05.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023).

Заведующий кафедрой



В.М.Котов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Основной спецификой дискретной математики и математической логики является их алгоритмическая основа и демонстрация использования дискретности в современной науке. Учебная дисциплина «Дискретная математика и математическая логика» является не только фундаментом математической кибернетики, но и важным звеном математического образования для специалистов в области прикладной математики и информатики. Дисциплина знакомит студентов с такими дискретными объектами, как множества, комбинаторные конфигурации, графы, булевы функции, грамматики, конечные автоматы и алгоритмы. Указанные объекты определяют основу перечислительной комбинаторики, дискретной оптимизации, криптографии, теории алгоритмов и являются базовыми для многих прикладных областей. Прогресс в их изучении самым непосредственным образом влияет на состояние и развитие информационных технологий.

Цель учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» состоит в изучение методов решения логических и комбинаторных задач, получение будущими специалистами базового математического образования, необходимого им в дальнейшем для успешной работы, формирование у студентов современного математического кругозора, овладение навыками алгоритмического и логического мышления.

Задачи учебной дисциплины

1. Ознакомление студентов с такими фундаментальными понятиями как высказывание, предикат, множество, полнота, замкнутость, алгоритм и др.
2. Обучение правильной записи математических утверждений с помощью логических и теоретико-множественных конструкций.
3. Применение методов математической логики и теории множеств для решения задач перечислительной комбинаторики и теории графов.
4. Обучение методам сравнения и классификации массовых проблем и алгоритмов по их сложности.

Место учебной дисциплины

В системе подготовки специалиста с высшим образованием для специальности 6-05-0533-11 «Прикладная информатика» учебная дисциплина относится к модулю «Дискретная математика и алгоритмы» государственного компонента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам.

Для специальности 6-05-0533-11 «Прикладная информатика» основой для изучения учебной дисциплины является дисциплина государственного компонента «Математический анализ» модуля «Высшая математика», дисциплина государственного компонента «Аналитическая геометрия» модуля «Высшая математика». Знания, полученные в учебной дисциплине,

используются при изучении дисциплины государственного компонента «Алгоритмы и структуры данных» модуля «Дискретная математика и алгоритмы», дисциплины государственного компонента «Теория графов» модуля «Дискретная математика и алгоритмы», дисциплины компонента учреждения образования «Теория вероятностей и математическая статистика» модуля «Теория вероятностей и математическая статистика».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной** компетенции для специальности 6-05-0533-11 «Прикладная информатика»:

БПК-3. Характеризовать предмет и объекты дискретной математики и математической логики, использовать основные приемы разработки эффективных алгоритмов и знания об основных структурах данных при решении прикладных задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные логические операции и формулы логики высказываний;
- базовые понятия и методы теории множеств и комбинаторики;
- основы теории булевых функций;
- основные понятия и результаты теории графов;
- элементы теории формальных грамматик и языков;
- основы теории алгоритмов, понятие о классах сложности P и NP ;

уметь:

- переводить высказывания с естественного языка на формальный язык логики высказываний;
- упрощать логические выражения и выполнять операции над множествами;
- решать базовые комбинаторные задачи;
- строить реализации булевых функций в заданном базисе, исследовать на полноту системы булевых функций;
- оценивать количественные характеристики графов, исследовать простейшие графы на изоморфизм, связность, двудольность и планарность;
- анализировать и строить простейшие грамматики.

владеть:

- простейшими методами исследования графов на изоморфизм, связность, двудольность и планарность;
- методами построения простейших грамматик;
- основными методами решения задач математической логики;
- методами решения задач комбинаторного анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1-м и 2-м семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дискретная математика и математическая логика» отведено:

в 1-м семестре для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 64 аудиторных часов, из них: лекции – 30 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа;

– во 2-м семестре для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации: в 1-м семестре – зачет, во 2-м семестре – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Высказывания и предикаты

Тема 1.1. Логика высказываний

Высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы логики высказываний. Равносильные формулы, интерпретации, тавтологии, противоречия. Логическое следование и эквивалентность. Основные равносильности. Основная теорема логического вывода.

Тема 1.2. Логика предикатов

Понятие предиката. Логические операции над предикатами. Кванторы. Формулы логики предикатов. Общезначимые формулы (тавтологии) логики предикатов. Равносильные формулы логики предикатов. Приведенная и нормальная формы для формул логики предикатов. Применение логики предикатов для описания математических понятий.

Раздел 2. Комбинаторный анализ

Тема 2.1. Множества и отношения

Множества и способы их заданий. Подмножества и операции над множествами. Основные теоретико-множественные тождества. Покрытия и разбиения множеств. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения и их свойства. Типы бинарных отношений. Отношения эквивалентности и частичного порядка. Функции. Обратная функция. Композиция функций. Мощность множества, счетные и несчетные множества. Парадокс Рассела и наивная теория множеств.

Тема 2.2. Классические комбинаторные объекты

Основные правила комбинаторики (правила суммы и произведения). Формула включений и исключений. Размещения без повторений и с повторениями. Перестановки. Сочетания без повторений и с повторениями. Биномиальный коэффициент Ньютона. Мультимножества. Перестановки мультимножеств и полиномиальные коэффициенты. Числовые разложения и разбиения. Подстановки.

Тема 2.3. Методы перечисления

Рекуррентные соотношения. Линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные однородные рекуррентные соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами. Производящие функции и операции над ними. Основные последовательности и связанные с ними производящие функции. Производящие функции и комбинаторные подсчеты. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций.

Раздел 3. Булевы функции

Тема 3.1. Начальные понятия

Булевы функции. Табличное задание булевых функций. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Существенные и фиктивные переменные булевых функций. Двойственность. Принцип двойственности.

Тема 3.2. Представления булевых функций

Представление булевых функций посредством формул. Равносильные формулы. Основные равносильности. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ и СДНФ). Алгоритмы построения СДНФ. Единственность СДНФ. Конъюнктивные нормальные формы (КНФ и СКНФ). Полиномиальные нормальные формы. Полином Жегалкина (существование и единственность, методы построения).

Тема 3.3. Минимизация булевых функций

Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Типы ДНФ, связанных с задачей минимизации булевых функций (сокращенная, тупиковая и минимальная ДНФ). Метод Квайна. Геометрическая модель минимизации булевых функций в классе ДНФ.

Тема 3.4. Замкнутость и полнота систем булевых функций

Понятие базиса. Замыкание. Замкнутые классы булевых функций. Понятие полной системы. Примеры полных систем. Основные замкнутые классы и их свойства (классы T_0 , T_1 , T_L , T_S , T_M). Теорема Поста (критерий функциональной полноты).

Раздел 4. Графы

Тема 4.1. Начальные понятия

Определение графа. Некоторые специальные графы. Абстрактные и помеченные графы. Число помеченных графов. Изоморфизм графов. Способы задания графов. Подграфы. Операции над графами. Степенная последовательность графа. Маршруты. Связность графов, компоненты связности. Связь между числами вершин, ребер и компонент связности графа. Вершинная и реберная связность графов, связь между ними. Теорема Менгера.

Тема 4.2. Двудольные графы и деревья

Двудольные графы. Критерий Кенига двудольности графа. Деревья. Эквивалентные определения дерева. Код Прюфера дерева. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев.

Тема 4.3. Плоские и планарные графы

Плоские и планарные графы. Формула Эйлера. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Гомеоморфные графы. Критерии планарности.

Тема 4.4. Обходы графов

Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Гамильтоновы циклы и цепи. Необходимые условия гамильтоновости графов. Достаточные условия гамильтоновости графов.

Тема 4.5. Раскраски

Вершинная раскраска и хроматическое число графа. Алгоритм последовательной раскраски вершин графа. Теорема о пяти красках для планарного графа. Верхняя оценка хроматического числа планарного графа.

Тема 4.6. Ориентированные графы

Основные определения. Лемма о рукопожатиях для орграфов. Маршруты, пути и контуры. Связность в орграфах. Сильно связанные компоненты. Конденсация орграфа.

Раздел 5. Формальные грамматики и языки

Тема 5.1. Иерархия грамматик

Алфавиты, цепочки, языки. Основные операции над цепочками и языками. Понятие порождающей грамматики. Иерархия грамматик и их свойства. Примеры порождения языков с помощью грамматик. Иерархия языков. Понятие о грамматическом разборе.

Тема 5.2. Приложения грамматик

Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Распознавание языков с помощью конечных автоматов.

Раздел 6. Алгоритмические модели

Тема 6.1. Машины Тьюринга и вычислимые по Тьюрингу функции

Интуитивное понятие алгоритма и необходимость его уточнения. Детерминированные машины Тьюринга (ДМТ). Команда, протокол и программа ДМТ. Примеры решения задач с помощью ДМТ. Функции, вычислимые по Тьюрингу. Тезис Тьюринга (основная гипотеза теории алгоритмов).

Тема 6.3. Алгоритмически неразрешимые массовые проблемы

Абстрактные (массовые) задачи и языки. Задачи распознавания, их связь с абстрактными языками. Существование невычислимых по Тьюрингу функций. Алгоритмически неразрешимые проблемы (проблема распознавания самоприменимости).

Тема 6.4. Теория сложности: классы P и NP

Понятие о сложности алгоритма и о сложностях вычислений. Задачи распознавания и k -ленточные ДМТ. Класс \mathcal{P} и полиномиальная сводимость. Недетерминированные машины Тьюринга и класс \mathcal{NP} . Проблема $\mathcal{P} =? \mathcal{NP}$. Понятие \mathcal{NP} -полной проблемы, вероятное соотношение между классами \mathcal{P} , \mathcal{NP} и классом \mathcal{NP} -полных проблем. Проблема выполнимости и другие важнейшие \mathcal{NP} -полные проблемы.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Высказывания и предикаты	8	12				2	
1.1	Логика высказываний	4	6					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа № 1.
1.2	Логика предикатов	4	6				2	Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой. Контрольная работа № 2. Собеседование.
2	Комбинаторный анализ	22	18				2	
2.1	Множества и отношения.	6	6					Собеседование.
2.2	Классические комбинаторные объекты	8	8					Контрольная работа № 3.

2.3	Методы перечисления	8	4				2	Собеседование. Коллоквиум по разделам №№ 1,2.
3	Булевы функции	8	8				2	
3.1	Начальные понятия	2	2					Собеседование.
3.2	Представление булевых функций	2	2					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
3.3	Минимизация булевых функций	2	2				2	Собеседование.
3.4	Замкнутость и полнота систем булевых функций	2	2					Контрольная работа № 4.
4	Графы	14	16					
4.1	Начальные понятия	2	4					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
4.2	Двудольные графы и деревья	3	2					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
4.3	Плоские и планарные графы	3	3					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
4.4	Обходы графов	2	3					Отчеты по домашним практическим

								упражнениям с их устной защитой.
4.5	Раскраски	2	2					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
4.6	Ориентированные графы	2	2					Контрольная работа № 5.
5	Формальные грамматики и языки	4	2				2	
5.1	Иерархия грамматик	2	2					Собеседование. Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
5.2	Приложения грамматик	2					2	Собеседование. Коллоквиум по разделам № 3–5.
6	Алгоритмические модели	8	4					
6.1	Машины Тьюринга и вычислимые по Тьюрингу функции	2	2					Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.
6.3	Алгоритмически неразрешимые массовые проблемы	2	2					Контрольная работа № 6.
6.4	Теория сложности: классы P и NP	4						Дискуссия. Отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Ерусалимский, Я. М. Дискретная математика. Теория и практикум : учебник / Я. М. Ерусалимский. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2018. – 472 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/212897>.
2. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. – 112 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/247400>.
3. Игнатъев, А. В. Теория графов. Лабораторные работы: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Информационные системы и технологии» / А. В. Игнатъев. – 1-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 2022 – 64 с. – URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/354021>.
4. Лекции по теории графов : учебное пособие для студ., обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Емеличев [и др.]. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. – 383 с.
5. Поттосин, Ю. В. Основы дискретной математики и теории алгоритмов : учебно-методическое пособие для специальности 1-40 05 01 "Информационные системы и технологии (по направлениям)" / Ю. В. Поттосин, Т. Г. Пинчук, С. А. Поттосина ; М-во образования Республики Беларусь, БГУИР, Инженерно-экономический факультет, Кафедра экономической информатики. – Минск : БГУИР, 2021. – 121 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Авдошин, С. М. Дискретная математика. Формально-логические системы и языки / С. М. Авдошин, А. А. Набебин ; [науч. ред. В. А. Захаров]. – Москва : ДМК Пресс, 2018. – 389 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1027772>.
2. Алексеев, В. Е. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений / В. Е. Алексеев, В. А. Таланов. – М.: Бином, 2012. – 320 с.
3. Верещагин, Н. К. Лекции по математической логике и теории алгоритмов (в трех частях) / Н. К. Верещагин, А. Х. Шень. – М.: МЦНМО, 2012.
4. Гладкий, А. В. Введение в современную логику. Учебное пособие / А. В. Гладкий. – М.: Либроком, 2016. – 238 с.
5. Глухов, М. М. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов / М. М. Глухов, А. Б. Шишков. – Спб.: Лань, 2012. – 416 с.
6. Громкович, Ю. Теоретическая информатика. Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию / Ю. Громкович. – Спб.: БХВ-Петербург, 2010. – 338 с.

7. Грэхем, Р. Конкретная математика. Математические основы информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Вильямс, 2016. – 784 с.
8. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 420 с.
9. Емеличев, В. А., Зверович, И. Э., Мельников, О. И и др. Теория графов в задачах и упражнениях. / В. А. Емеличев и др. – Москва: Лаиброкком, 2013. – 416 с.
10. Зуев, Ю. А. По океану дискретной математики: учебное пособие в двух частях / Ю. А. Зуев. – М.: Ленанд, 2017.
11. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2018. - 265 с.- URL: <https://e.lanbook.com/book/213008>.
12. Игошин, В. И. Теория алгоритмов: учеб. пособие / В. И. Игошин. – М.: ИНФРА-М, 2016. – 318 с.
13. Игошин, В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. Сборник задач. Учебное пособие / В. И. Игошин. – М.: Инфра-М, 2017. – 392с.
14. Когабаев, Н. Т. Лекции по теории алгоритмов: Учебное пособие / Н. Т. Когабаев. – Новосибирск: НГУ, 2009. – 107 с.
15. Крупский, В.Н. Введение в сложность вычислений / В. Н. Крупский. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 128 с.
16. Крупский, В. Н. Теория алгоритмов / В. Н. Крупский, В. Е. Плиско. – М.: Academia, 2009. – 208 с.
17. Кудрявцев, В. Б. Теория автоматов. Учебник / В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин. – М.: Юрайт, 2017. – 320 с.
18. Марченков, С. С. Конечные автоматы / С. С. Марченков. – М.: Физматлит, 2008. – 56 с.
19. Мозговой, М. В. Классика программирования: алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы. Практический подход / М. В. Мозговой. – СПб.: Наука и Техника, 2006. – 320 с.
20. Новиков, Ф. А. Дискретная математика : для бакалавров и магистров : учебник для студ. вузов, обуч. по напр. подготовки "Системный анализ и управление" / Ф. А. Новиков. — 3-е изд. — Санкт-Петербург [и др.] : Питер, 2017. – 493с. –URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/354021>.
21. Папшев, С. В. Дискретная математика. Курс лекций для студентов естественнонаучных направлений подготовки : учебное пособие / С. В. Папшев. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2019. - 189 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206210>
22. Пентус, А. Е. Математическая теория формальных языков: Учебное пособие / А. Е. Пентус, М. Р. Пентус. – М.: Бином, 2012. – 247 с.
23. Писарук, Н. Н. Сложность вычислений и криптография / Н. Н. Писарук. – Мн.: БГУ, 1999. – 230 с.
23. Рейуорд-Смит, В. Дж. Теория формальных языков: вводный курс / В. Дж. Рейуорд-Смит. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

24. Хопкрофт, Дж. Э. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений / Дж. Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, Дж. Ульман. – М.: Вильямс/Диалектика, 2019. – 528 с.
25. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие для вузов. /С. В. Яблонский — 6-е изд.— М.: Высшая школа, 2010. — 38 с.
27. Lewis, H. R. Elements of the theory of computation / H. R. Lewis, C. H. Papadimitriou. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1997. – 361 p.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устная форма: собеседование, дискуссия, коллоквиум.
2. Письменная форма: контрольные работы.
3. Устно-письменная форма: отчеты по домашним упражнениям с их устной защитой.
4. Техническая форма: электронные тесты.

В качестве рекомендуемых технических средств диагностики используется Образовательная платформа Insight Runner (www.acm.bsu.by), а также обучение, организованное на платформе Moodle (<https://edufpmi.bsu.by>).

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика» учебным планом предусмотрены зачет и экзамен.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить

динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

- отчет по домашним упражнениям с их устной защитой - 40 %;
- выполнение теста - 10%;
- контрольные работы - 30 %;
- коллоквиум - 20 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40% и экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема № 1.2. Логика предикатов (2 ч)

Построение приведённой и нормальной форм для формул логики предикатов. Применение логики предикатов к логико-математической практике.

Форма контроля – собеседование.

Тема № 2.3. Методы перечисления (2 ч)

Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций.

Форма контроля – собеседование.

Тема № 3.3. Минимизация булевых функций (2 ч)

Алгоритмы построения минимальной ДНФ методом Квайна и геометрическим методом.

Форма контроля – электронный тест (iRunner).

Тема № 5.2. Приложения грамматик (2 ч)

Применение регулярных выражений и свойства автоматных языков.

Форма контроля – собеседование.

Примерная тематика практических занятий

1-й семестр

Высказывания и предикаты

Занятие 1. Высказывания и операции над ними. Формулы логики высказываний и их таблицы истинности.

Занятие 2. Упрощение и преобразования формул.

Занятие 3. Логическое следование.

Занятие 4. Предикаты и операции над ними.

Занятие 5. Формулы логики предикатов.

Занятие 6. Классификация формул логики предикатов.

Комбинаторный анализ

Занятие 7. Множество. Операции над множествами. Теоретико-множественные тождества.

Занятие 8-9. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения и отображения. Основные типы отображений. Отношение эквивалентности и частичного порядка.

Занятие 10-11. Размещения и сочетания. Бином Ньютона.

Занятие 12-13. Биномиальные тождества. Полиномиальная теорема.

Занятие 14-15. Методы перечисления.

2-й семестр

Булевы функции

Занятие 1. Булевы функции. Существенные и фиктивные переменные.

Занятие 2. ДНФ, СДНФ, КНФ, СКНФ булевых функций, полином Жегалкина.

Занятие 3. Методы минимизации булевых функций.

Занятие 4. Замыкание и замкнутые классы булевых функций. Полные системы булевых функций.

Графы

Занятие 5-6. Графы и операции над ними. Степенные последовательности графов. Изоморфизм графов.

Занятие 7. Маршруты, цепи и циклы графа. Связность графа.

Занятие 8-9. Двудольные графы и деревья.

Занятие 10. Планарность графа.

Занятие 11. Двудольные, эйлеровы и гамильтоновы графы

Занятие 12. Раскраска графа, орграфы.

Формальные грамматики и языки

Занятие 13. Порождения языков с помощью грамматик.

Грамматический разбор.

Алгоритмические модели

Занятие 14. Машины Тьюринга и вычислимые по Тьюрингу функции.

Занятие 15. Теория сложности: классы P и NP.

сети и его приложения.

Рекомендуемая тематика контрольных работ и коллоквиума:

1-й семестр

1. Контрольная работа № 1 «Логика высказываний. Логика предикатов. Приложения математической логики».

2. Контрольная работа № 2 «Множества. Отображения. Отношения».

3. Контрольная работа № 3. «Комбинаторный анализ». «Рекуррентные соотношения».

4. Коллоквиум «Логика высказываний. Логика предикатов. Основы теории множеств. Комбинаторный анализ».

2-й семестр

1. Контрольная работа № 4 «Булевы функции».

2. Контрольная работа № 5 «Графы».

3. Контрольная работа № 6. «Формальные языки и грамматики. Алгоритмические модели».

4. Коллоквиум «Булевы функции. Графы. Формальные грамматики и языки».

Примерные варианты контрольных работ:

«Логика высказываний»

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Укажите истинностные значения тех, которые являются высказываниями.

а) Гомель – город Беларуси.

б) Посторонним вход воспрещен!

в) Который час?

г) $2 + 3 = 6$.

д) Минск – самый красивый город в мире.

е) $4 + x = 10$.

2. Докажите, что данная формула является тавтологией:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

3. Докажите эквивалентность:

$$(A \vee B \vee C) \cdot (B \vee C \vee D) \cdot (C \vee D \vee A) \sim AB \vee AD \vee BD \vee C.$$

4. Из двух высказываний $A =$ «Река Припять впадает в реку Днепр» и $B =$ «Город Пинск находится на территории Полесья» сформируйте и запишите составные высказывания $A \vee B$, $A \cdot B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$, укажите их истинностные значения.

5. Запишите таблицу истинности для следующей формулы логики высказываний: $(A \rightarrow B) \vee (A \sim \bar{B} \cdot C)$.

6. Выясните является ли формула логики высказываний $(A \rightarrow B \cdot C) \vee (\bar{B} \sim C)$ выполнимой, тавтологией и противоречием? Ответ обоснуйте.

7. Выясните, верна ли следующая равносильность логики высказываний:

$$A \cdot (B \sim C) \equiv (A \cdot B) \sim (A \cdot C)?$$

Ответ обоснуйте.

8. Используя равносильные преобразования упростите формулу логики высказываний $((A \rightarrow B) \vee (A \vee \bar{B})) \sim A \cdot B$.
9. Докажите, что справедливо следующее логическое следование, используя определение этого понятия:

$$(A \rightarrow C) \cdot B \models (A \vee \bar{B}) \rightarrow C.$$
Верно ли следование в обратную сторону? Ответ обоснуйте.
10. Используя закон контрапозиции докажите следующее утверждение относительно двух натуральных чисел m и n : если m, n – нечетные числа, то их произведение – нечетное число.

«Логика предикатов»

1. На языке логики предикатов запишите определение предела последовательности: число $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ называется пределом последовательности (a_n) , если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n_ε такое, что для любого натурального числа $n > n_\varepsilon$ имеет место неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.
2. Пусть $P(x)$ – предикат, определенный на множестве $M = \{-3, 0, 1, 2, 3, 9\}$. Выразите следующие высказывания, не употребляя кванторов и используя из операций только конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:
- $\exists x P(x)$;
 - $\forall x P(x)$;
 - $\forall x ((x \neq 1) \rightarrow P(x))$;
 - $\exists x ((x \geq 0) \cdot P(x))$.
3. Укажите зоны действия кванторов, перечислите предикатные переменные, связанные и свободные предметные переменные формулы логики предикатов

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (Q(y, z) \vee R)).$$

4. Снимите отрицание над кванторами $\exists x (\overline{\forall y P(x, y) \rightarrow \exists z Q(z)})$.
5. Методом математической индукции докажите, что для любого натурального числа n сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ является точным квадратом.
6. Придайте формуле логики предикатов

$$\forall x \forall y (P(x) \cdot P(y) \cdot R(x, y) \rightarrow (x = y))$$

интерпретацию $P(x) = \langle x - \text{составное число} \rangle$, $R(x, y) = \langle x \text{ делится на } y \rangle$, x и y – натуральные числа; определите истинностное значение получившегося в результате высказывания.

7. Докажите, что формула логики предикатов

$$\left(\forall x (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \right) \rightarrow \overline{(\forall x P(x)) \cdot (\exists x Q(x))}$$

является тавтологией логики предикатов.

8. Докажите равносильность логики предикатов

$$\overline{\exists x \forall y P(x, y)} \equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)}.$$

9. Используя равносильные преобразования приведите формулу логики предикатов

$$(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow ((\exists x P(x)) \rightarrow (\exists y Q(y)))$$

к нормальной форме.

«Приложения математической логики»

1. Решить следующую логическую задачу с помощью сведения к системе логических уравнений. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B, C и D . Установлено следующее:

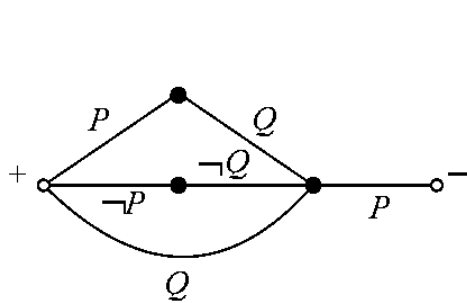
- а) если A не виновен или B виновен, то C виновен;
- б) если A не виновен, то C виновен;
- в) не верно, что если C не виновен, то D виновен.

Кто виновен?

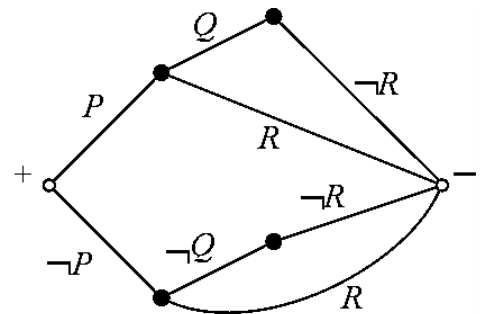
2. Реализовать следующие формулы логики высказываний в виде релейно-контактных схем:

- а) $(A \cdot B) \vee \bar{C}$;
- б) $(\bar{A} \cdot \bar{B}) \vee (C \cdot D)$;
- в) $(A \cdot B) \vee (B \cdot C) \vee (A \cdot C)$;
- г) $(A \vee B \vee C) \cdot (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C})$.

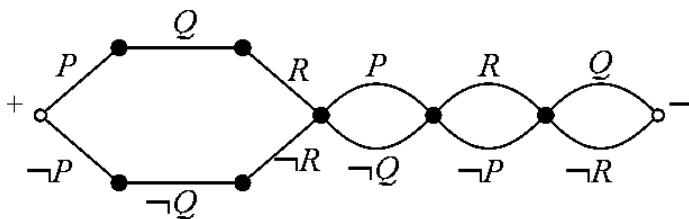
3. Упростите следующие релейно-контактные схемы:



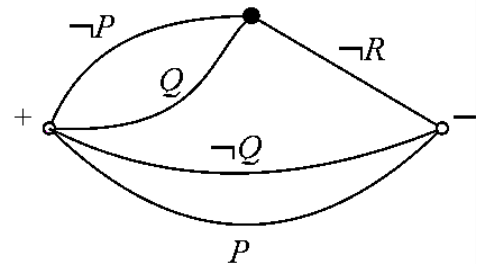
а)



б)



в)



г)

4. Докажите, что из истинных посылок

а) все студенты ФПМИ изучают дисциплину «Дискретная математика и математическая логика»;

б) Василий – студент ФПМИ;

следует истинность заключения – Василий изучает дисциплину «Дискретная математика и математическая логика».

5. Командир осажденной крепости послал следующие три сообщения:

а) если нам удастся получить продовольствие, то нам не будет угрожать смерть от голода;

б) если нам не удастся получить продовольствие, то нам или будет угрожать смерть от голода, или мы попытаемся прорвать кольцо окружения;

в) если нам будет угрожать смерть от голода, то мы попытаемся прорвать кольцо окружения.

Покажите, как можно упростить эти сообщения, не меняя их смысла.

«Множества. Отображения. Отношения.

Рекуррентные соотношения»

1. Докажите следующее теоретико-множественное тождество

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

2. Выясните какие из следующих функций являются инъективными (сюръективными, биективными):

а) $x \rightarrow 1 + x$;

б) $x \rightarrow 1 + x^2$;

в) $x \rightarrow 1 + x^3$;

г) $x \rightarrow 1 + x^2 + x^3$?

Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что если R и S — антисимметричные бинарные отношения, определенные на одной и той же паре множеств, то $R \cap S$ — антисимметричное отношение. Сохраняется ли свойство антисимметричности при объединении отношений? Ответ обоснуйте.

4. В течение семестра 28 студентов написали три контрольные работы, каждая из которых была оценена в 7, 8 или 9 баллов. Верно ли, что найдутся два студента, которые получили одинаковые оценки на всех контрольных работах? Ответ обоснуйте.

5. Найдите y_n , если $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$ и $y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

6. Найдите замкнутую форму производящей функции для последовательности $a_n = n\alpha^n$.

«Комбинаторный анализ»

1. В магазине продается апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Необходимо купить семь пакетов сока. Сколькими способами это можно сделать?

2. Сколько n -значных натуральных чисел содержат ровно одну цифру 0?

3. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем трех букв Б?
4. Сколькими способами можно собрать бригаду из трех маляров и четырех штукатуров, если имеется шесть маляров и восемь штукатуров?
5. Докажите, что

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Контрольная работа № 6 «Булевы функции»

1. Запишите таблицу истинности булевой функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus \bar{x}_2) \downarrow x_1) | (x_1 \cdot x_2 \rightarrow \bar{x}_3).$$

2. Постройте СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина для следующих булевых функций:

$$a) f(x_1, x_2, x_3) = 01100011; \quad б) f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \vee x_3)} \cdot x_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_2$$

3. Определите является ли функция $f(x_1, x_2, x_3) = 01100011$ линейной, монотонной, самодвойственной? Ответ обоснуйте.
4. Упростите булеву формулу

$$\overline{\left((x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \overline{(x_1 \vee x_2)} \vee x_1 \right)} \vee \overline{\left((x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \vee x_1 \right)}.$$

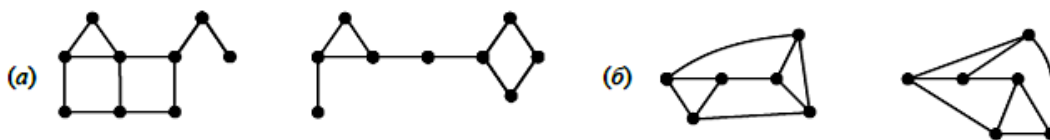
5. Докажите равносильность

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \oplus \bar{x}_n \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0).$$

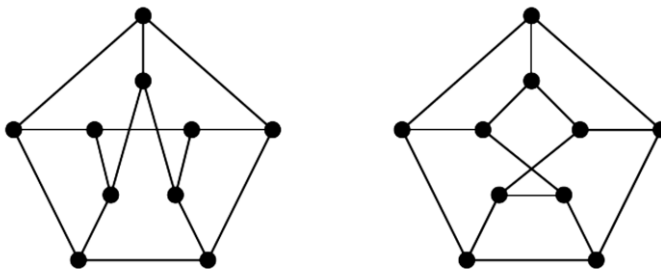
6. Можно ли из булевых функций $x_1 x_2 x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3$ операциями суперпозиции функций и замены переменной получить булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3) = 00110001$? Ответ обоснуйте.
7. Является ли система булевых функций $\{0, 1, x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$ полной? Ответ обоснуйте.
8. Найдите кратчайшую и минимальную дизъюнктивные нормальные формы булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = 01100011$.

«Графы»

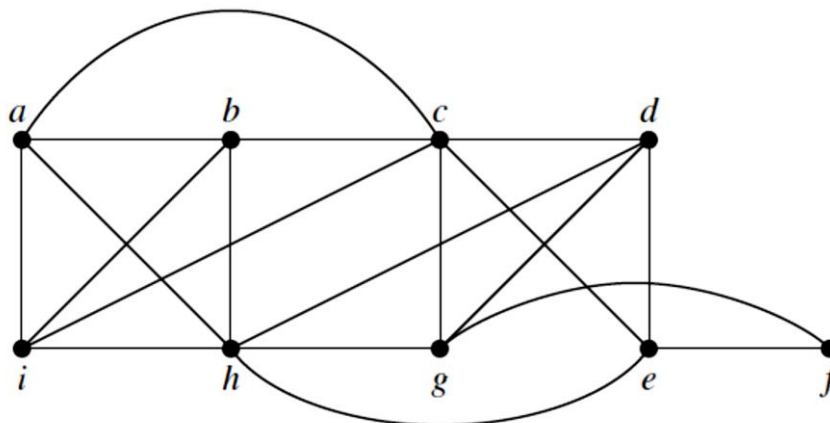
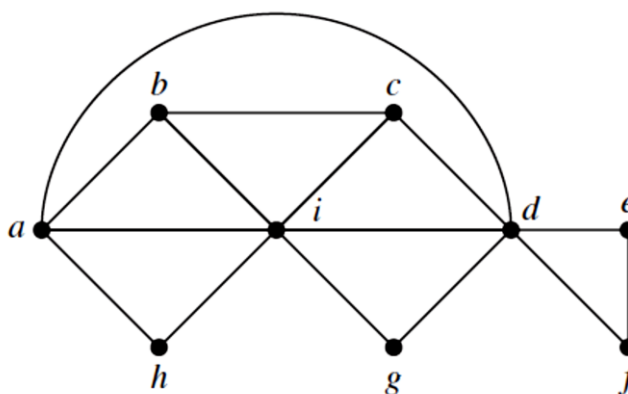
1. Верно ли следующее утверждение: если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то существует цепь, соединяющая их? Ответ обоснуйте.
2. Верно ли, что любой (9, 29)-граф является связным? Ответ обоснуйте.
3. Верно ли, что дерево является двудольным графом? Ответ обоснуйте.
4. Является ли последовательность $d = (5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$ графической? В случае положительного ответа изобразите граф, последовательность степеней вершин которого совпадает с d .
5. Среди изображенных ниже пар графов, найдите пару изоморфных и пару неизоморфных графов. Ответ обоснуйте.



6. Определите являются ли графы, изображенные ниже, двудольными?

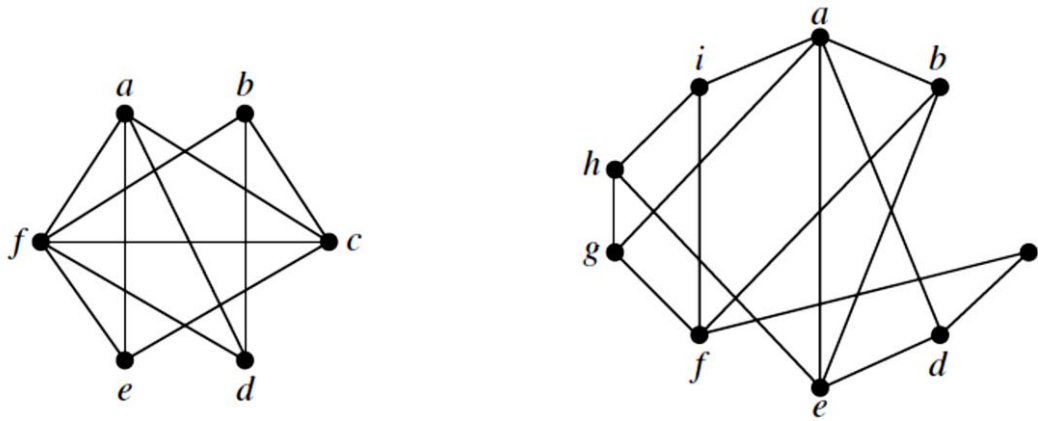


7. Определите являются ли графы, изображенные ниже, эйлеровыми. Для эйлеровых графов найдите эйлеров цикл.



8. Сколько существует различных гамильтоновых циклов в полном графе K_n порядка n ? Ответ обоснуйте.

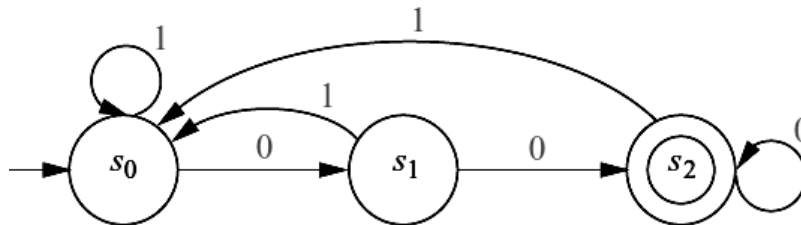
9. Определите являются ли графы, изображенные ниже, планарными? Для планарных графов изобразите соответствующую плоскую укладку.



«Формальные языки и грамматики.

Алгоритмические модели.»

1. Определите какой язык распознает ДКА, изображенный на рисунке?



2. Постройте ДКА, который распознает последовательности нулей и единиц, начинающиеся с 00.
3. Пусть $\Gamma = (V = \{0,1\}, W = \{J\}, J, R = \{J \rightarrow \varepsilon, J \rightarrow 0J, J \rightarrow J1\})$. Покажите, что язык этой грамматики $L(\Gamma) = \{0^n 1^m : n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
4. Докажите, что язык $L = \{0^n 1^n 0^n : n \in \mathbb{N}\}$ не является КС-языком.
5. Разработайте ДМТ-программу для вычисления разности двух натуральных чисел.
6. Докажите, что проблема ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ, в которой требуется определить, существует ли в данном графе вершинное покрытие, мощность которого не более k (k – заданное число), является NP-полной.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие методы:

- **метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

- *метод группового обучения*, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

В качестве технических средств для организации работы в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать Образовательную платформу Insight Runner (www.acm.bsu.by), Образовательный портал БГУ (<https://edufpmi.bsu.by>) – инструмент с эффективной функциональностью контроля, тренинга и самостоятельной работы.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные ресурсы: разместить на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к практическим занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачёту, задания, тесты, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Высказывание. Логические операции над высказываниями.
2. Формула логики высказываний. Таблица истинности формулы логики высказываний. Выполнимые, тождественно-истинные и тождественно-ложные формулы логики высказываний. Равносильные формулы логики высказываний.
3. Логическое следование и эквивалентность. Основная теорема логического вывода.
4. Понятие n -местного предиката. Множество истинности предиката. Выполнимые, тождественно-истинные и тождественно-ложные предикаты. Равносильные предикаты.
5. Операции над предикатами. Формула логики предикатов. Интерпретация формулы логики предикатов на множестве.
6. Формула логики предикатов. Выполнимые, тождественно-истинные, тождественно-ложные на множестве формулы логики предикатов.
7. Формула логики предикатов. Общезначимые формулы логики предикатов. Проблемы разрешения для общезначимости и выполнимости формул логики предикатов.
8. Формула логики предикатов. Приведенная и нормальная формы для формул логики предикатов.

9. Множества, способы задания множеств. Подмножества и их свойства. Операции над множествами.
10. Декартово произведение множеств. Число элементов в декартовом произведении множеств.
11. Бинарное отношение. Операции над бинарными отношениями. Отношение эквивалентности и частичного порядка. Классы эквивалентности и их представители.
12. Отображение. Инъективные, сюръективные и биективные отображения.
13. Отображение. Композиция отображений. Обратные отображения.
14. Равномощные множества. Счетные и несчетные множества. Примеры.
15. Основные правила комбинаторики (правило сложения, правило умножения). Размещения и сочетания (с повторениями и без повторений) из n элементов по k элементам.
16. Размещения и сочетания (с повторениями и без повторений) из n элементов по k элементам. Число размещений с повторениями из n элементов по k элементам.
17. Размещения и сочетания (с повторениями и без повторений) из n элементов по k элементам. Число размещений без повторений из n элементов по k элементам. Число перестановок элементов n -элементного множества.
18. Размещения и сочетания (с повторениями и без повторений) из n элементов по k элементам. Число сочетаний без повторений из n элементов по k элементам.
19. Размещения и сочетания (с повторениями и без повторений) из n элементов по k элементам. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k элементам.
20. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.
21. Полиномиальная формула.
22. Формула включений и исключений и ее приложения.
23. Линейные однородные рекуррентные соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о решении линейного однородного рекуррентного соотношения второго порядка.
24. Линейные однородные рекуррентные соотношения k -го порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о решении линейного однородного рекуррентного соотношения k -го порядка (без доказательства).
25. Производящие функции. Операции над производящими функциями. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Булевы функции. Табличное задание булевых функций. Число булевых функций от n переменных.
2. Булевы функции. Элементарные булевы функции. Булевы формулы.
3. Разложение булевой функции в дизъюнктивную форму по одной переменной.

4. Разложение булевой функции в дизъюнктивную форму по k переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
5. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма.
6. Полином Жегалкина (существование и единственность). Методы построения.
7. Полная система булевых функций. Замкнутые классы булевых функций. Класс булевых функций, сохраняющих константу 1, и класс булевых функций, сохраняющих константу 0.
8. Полная система булевых функций. Замкнутые классы булевых функций. Класс линейных функций.
9. Полная система булевых функций. Замкнутые классы булевых функций. Класс монотонных функций.
10. Полная система булевых функций. Замкнутые классы булевых функций. Класс самодвойственных функций.
11. Критерий полноты системы булевых функций.
12. Минимальные и кратчайшие дизъюнктивные нормальные формы булевой функции. Минимизации ДНФ.
13. Граф. Смежные вершины и смежные ребра. Окружение и степень вершины. Простейшие графы специального вида.
14. Матрицы графа. Лемма «о рукопожатиях».
15. Помеченные графы. Число помеченных графов заданного порядка. Изоморфизм графов.
16. Открытые и замкнутые маршруты, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл.
17. Связный граф и компоненты связности графа. Теорема о соотношении числа вершин, ребер и компонент связности графа.
18. Двудольный граф. Критерий двудольности графа.
19. Дерево. Эквивалентные определения дерева.
20. Теорема Кэли о числе помеченных деревьев заданного порядка.
21. Плоские и планарные графы. Грани плоского графа. Формула Эйлера.
22. Плоские и планарные графы. Грани плоского графа. Гомеоморфные графы. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского (без доказательства).
23. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости графа. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе.
24. Гамильтоновы графы. Необходимые и достаточные условия гамильтоновости графа.
25. Правильная раскраска графа и хроматическое число графа.
26. Порождающая грамматика и ее язык. Классы порождающих грамматик и их языки.
27. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы.
28. Устройство и программа детерминированной (недетерминированной) одноленточной машины Тьюринга. Функции, вычислимые по Тьюрингу.

29. Простейшие арифметические функции. Соотношения между ними и классом функций, вычислимых по Тьюрингу.
30. Абстрактные (массовые) задачи и языки.
31. Алгоритмически разрешимые и неразрешимые проблемы. Проблема самоприменимости.
32. Классы P и NP. Проблема равенства классов P и NP. Полиномиальная сводимость проблем распознавания и NP-полные задачи.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Алгоритмы и структуры данных	Дискретной математики и алгоритмики	нет	Изменений не требуется (протокол № 3 от 13.10.2023 г.)
2. Теория графов	Биомедицинской информатики	нет	Изменений не требуется (протокол № 3 от 13.10.2023 г.)
3. Теория вероятностей и математическая статистика	Теории вероятностей и математической статистики	нет	Изменений не требуется (протокол № 3 от 13.10.2023 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
