БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
__________________ О.Г.Прохоренко
(подпись)
(И.О.Фамилия)
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД - 12426 /уч.

Функциональный анализ

(название учебной дисциплины)

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 04 Информатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 04-2021, типового учебного плана G 31-1-029/пр-тип от 30.06.2021, учебных планов: № G 31-1-031/уч. от 30.06.2021, № G 31-1-021/уч. ин. от 23.07.2021, № G 31-1-213/уч от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.В. Дайняк, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЗЕНЗЕНТЫ:

Ф.Е. Ломовцев, профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Д.В. Баровик, заместитель директора ОАО “Центр банковских технологий”, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой компьютерных технологий и систем БГУ
(протокол № 14 от 23 мая 2023 г.)

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023 г.)

Заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем
В. В. Казачёнок

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Функциональный анализ - один из важнейших разделов математики, которому уделяется большое внимание в образовательных программах ведущих мировых университетов. По своему содержанию функциональный анализ тесно связан с математическим анализом, геометрией и алгеброй, вычислительной математикой и другими важными разделами математики. Методы функционального анализа находят широкое приложение при изучении физических, социально-экономических и финансовых процессов. Для успешного усвоения учебной дисциплины необходимы знания основ математического анализа, алгебры и геометрии. В процессе изучения дисциплины студенты должны ознакомиться с основными понятиями функционального анализа, изучить разделы функционального анализа, необходимые для использования в других математических дисциплинах, математические методы решения профессиональных задач, уметь применять математические методы при решении профессиональных задач, овладеть математическим аппаратом, необходимым для профессиональной деятельности. По окончанию дисциплины студенты должны быть способны применять изученные методы в собственных исследованиях и корректно интерпретировать полученные результаты. Методы функционального анализа используются в дисциплинах «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Оптимальное управление», «Экономика».

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Функциональный анализ» – овладение основными положениями теории и методами применения ее для решения задач естествознания, техники и управления.

Образовательная цель: формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, необходимого для исследования разрешимости прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.

2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания.

3. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» относится **к модулю** «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами. Учебная дисциплина «Функциональный анализ» тесно связан с дисциплинами: «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Основы высшей алгебры», «Математическое моделирование».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

универсальные компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации.

УК-2. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно - коммуникационных технологий.

УК-5. Быть способным к саморазвитию и совершенствованию в профессиональной деятельности.

базовые профессиональные компетенции:

БПК-1. Решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений.

БПК-2. Применять основы дифференциального и интегрального исчисления, демонстрировать способность применения математического анализа к исследованию алгоритмов

БПК-9. Применять базовые принципы построения математических моделей и выполнять их анализ в типовых задачах организационного управления и естественно-интеллектуальной активности человека, использовать системы искусственного интеллекта на практике.

специализированные компетенции:

СК-1. Использовать методы функционального анализа для решения прикладных задач в различных областях науки, техники, экономики.

В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия суммируемости функций по Лебегу;
- основные понятия и методы теории банаховых и гильбертовых пространств;
- основные понятия теории линейных ограниченных операторов и функционалов;
- теорию разрешимости операторных уравнений 1-го и 2-го рода;

уметь:

- исследовать множества в банаховых пространствах и последовательности на сходимость;
- исследовать отображения в банаховых пространствах;
- аппроксимировать функции в гильбертовом пространстве рядами

Фурье;

- вычислять норму линейного ограниченного оператора и функционала;
- вычислять сопряженный оператор в гильбертовом пространстве;
- применять принцип сжимающих отображений к различным задачам;
- использовать основные результаты функционального анализа в практической деятельности;

владеть:

- основными методами исследования множеств в банаховых и гильбертовых пространствах;
- основами аппроксимации функций в гильбертовых пространствах;
- методами доказательств и аналитического исследования на разрешимость операторных уравнений первого и второго рода;
- основными методами исследования на разрешимость интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера;
- навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение. Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ». Исторические сведения о возникновении и развитии этого раздела математики, его место среди других математических наук.

Раздел 1. Нормированные векторные пространства

Тема 1.1. Метрические пространства, нормированные векторные пространства, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.

Тема 1.2. Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.

Тема 1.3. Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в конечномерных и в строго нормированных пространствах.

Тема 1.4. Банаховы пространства и ряды в них. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.

Раздел 2. Гильбертовы пространства и аппроксимация

Тема 2.1. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.

Тема 2.2. Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с проекцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

Тема 2.3. Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.

Раздел 3. Линейные ограниченные операторы

Тема 3.1. Линейный ограниченный оператор и его норма. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности.

Тема 3.2. Обратные операторы, левый и правый обратные операторы и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость.

Тема 3.3. Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение. Метод резольвент для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера.

Раздел 4. Сопряженное пространство и сопряженные операторы

Тема 4.1. Линейные ограниченные функционалы и их норма. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Тема 4.2. Сопряженное пространство. Продолжение линейного ограниченного функционала.

Тема 4.3. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их применение. Операторы ортогонального проектирования.

Тема 4.4. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Симметричный оператор.

Раздел 5. Компактные множества и компактные операторы

Тема 5.1. Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространства. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Критерий конечномерности нормированного пространства.

Тема 5.2. Непрерывные отображения на компактах.

Тема 5.3. Компактные операторы и их структура. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.

Тема 5.4. Разрешимость интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма с ядром Гильберта-Шмидта.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Нормативные векторные пространства**	**6**			**8**		**4**	
1.1	Метрические пространства, нормированные векторные пространства, открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.	2			2			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
1.2	Сходящиеся последовательности и их свойства. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве бесконечных числовых последовательностей.	2			2			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
1.3	Аппроксимация, построение элемента наилучшей аппроксимации в конечномерных и в строго нормированных пространствах.	1			1			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
1.4	Банаховы пространства и ряды в них. Пополнение нормированных векторных пространств. Пространство суммируемых по Лебегу функций и его полнота.	1			1			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
1.5	Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в				2		4	Опрос и отчет по самостоятельной работе

	линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям.							
2	**Гильбертовы пространства и аппроксимация**	**6**			**6**			
2.1	Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций как гильбертово пространство.	2			2			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
2.2	Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с проекцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
2.3	Ортогональные системы и ряды Фурье. Полные ортонормированные системы. Аппроксимация рядами Фурье и ее применение. Изоморфизм гильбертовых пространств.	2			2			коллоквиум
3	**Линейные ограниченные операторы**	**6**			**6**			
3.1	Линейный ограниченный оператор и его норма. Пространство линейных ограниченных операторов и сходимость в нем. Принцип равномерной ограниченности.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
3.2	Обратные операторы, левый и правый обратные операторы и разрешимость операторного уравнения. Непрерывная обратимость оператора и корректная разрешимость.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
3.3	Линейные операторные уравнения первого и второго рода и их решение.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4	**Сопряженное пространство и сопряженные операторы**	**7**			**6**			
4.1	Линейные ограниченные функционалы и их норма. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4.2	Сопряженное пространство. Продолжение линейного	2			2			опрос и проверка отче-

	ограниченного функционала.							та по лабораторной работе
4.3	Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их применение. Операторы ортогонального проектирования.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
4.4	Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Симметричный оператор.	1						опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5	**Компактные множества и компактные операторы**	**6**			**4**			
5.1	Компактные и предкомпактные множества в банаховых пространства. Критерий предкомпактности Хаусдорфа. Теорема Арцела-Асколи предкомпактности в пространстве непрерывных функций. Критерий конечномерности нормированного пространства.	4			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.2	Непрерывные отображения на компактах.	1						опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.3	Компактные операторы и их структура. Компактные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы.	2			2			опрос и проверка отчета по лабораторной работе
5.4	Разрешимость интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма с ядром Гильберта-Шмидта.	2						контрольная работа
	Итого:	**34**			**30**		**4**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1.Филимоненкова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу: Учебное пособ СПб.: Издательство «Лань», 2022. - 176 с.- Текст: Электронный // Лань: электронно -библиотечная система https://e.lanbook.com/book/156410.

2.Дайняк, В. В. Банаховы пространства: методические указания и задания к практическим занятиям / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб. - Минск: БГУ, 2021. - 67 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/275205

3.Дайняк, В. В. Гильбертовы пространства и аппроксимация /В. В. Дайняк, Е.С.Чеб.-Минск: БГУ,2020.-52с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/256668

4.Дайняк В.В. Метрические пространства: метод. Указания и задания. В 3 ч. Ч.1 / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. - Минск: БГУ, 2020. - 52 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/241306

Перечень дополнительной литературы

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-изд./ А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Мн.: БГУ, 2006. – 434 с.

2. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2009. – 304с.

3. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс/ В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.: РХД, 2009. – 724с.

4.Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

5. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с.

6. Дайняк, В.В.Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания/ В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.

7. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.

8. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, коллоквиум, проверка отчетов по лабораторной работе, контрольная работа.

На лабораторных занятиях оценивается:

- ответ (полнота ответа) – 30 %
- выполнение лабораторной работы – 70 %

Коллоквиумы используются для обобщения и систематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

- содержание и последовательность изложения теоретического вопроса – 30%;
- соответствие и полноту раскрытия вопроса – 30 % ;
- грамотный научный подход к решению практической задачи – 40%.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- опрос и отчет по лабораторной работе – 50%;
- результаты коллоквиума – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.5. Принцип сжимающих отображений в банаховых пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре, к решению интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера второго рода, к дифференциальным уравнениям. (4 ч.)

Примерный перечень заданий:

1. Дано числовое уравнение.Преобразовать уравнение к виду, пригодному для применения принципа сжимающих отображений. Методом простых итераций найти приближенное решение с заданной точностью, используя апри-

орную и апостериорную оценки числа итераций. Для вычислений использовать математические пакеты.
2. Дана система алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Преобразовать систему к виду, пригодному для применения принципа сжимающих операторов. Методом простых итераций найти приближенное решение с заданной точностью. Найти точное решение системы и сравнить с приближенным. Для вычислений использовать математические пакеты.
3. Доказать двумя способами, что оператор является сжимающим: а)по определению сжимающего оператора; б)по достаточному признаку сжимающего оператора.
4. Дано нелинейное уравнение в пространстве непрерывных функций. Используя принцип сжимающих операторов, доказать, что данное уравнение имеет единственное непрерывное решение. Методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с заданной точностью, используя априорную оценку числа итераций. В качестве ответа предъявить график приближенного решения. Для вычислений и построения графика использовать математические пакеты.
5. В пространстве непрерывных функций дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр λ. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов. Выбрать подходящее значение λ и методом простых итераций найти приближенное решение этого уравнения с указанной точностью, используя априорную оценку числа итераций. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным. Для вычислений использовать математические пакеты.
6. Дана задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Найти точное решение этой задачи. Преобразовать задачу Коши к интегральному уравнения Вольтерра и методом простых итераций найти несколько первых приближений к точному решению. Проиллюстрировать графически сходимость приближенных решений к точному. Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

Форма контроля – опрос и отчёт по самостоятельной работе.

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие № 1. Некоторые методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера с вырожденным ядром.

Занятие № 2. Метрические и нормированные пространства. Способы задания метрики и нормы. Эквивалентные нормы.

Занятие №3. Предел последовательности в нормированном пространстве.

Занятие №4. Открытые, замкнутые, ограниченные, выпуклые множества в нормированном пространстве.

Занятие № 5. Банаховы пространства и отображения в них.

Занятие № 6. Сжимающие отображения и метод последовательных приближений.

Занятие № 7. Гильбертовы пространства. Вычисление проекции и аппроксимация рядами Фурье.

Занятие № 8. Линейные ограниченные операторы и их норма.

Занятие № 9. Левый и правый обратные операторы. Непрерывная обратимость.

Занятие № 10. Компактные множества.

Занятие № 11. Норма линейного ограниченного функционала. Структура сопряженного пространства.

Занятие № 12. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве и его применение.

Занятие № 13. Компактные операторы.

Занятие № 14. Собственные векторы и собственные значения компактного самосопряженного оператора.

Занятие № 15. Альтернатива Фредгольма.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B(0,r)$ – открытое множество.
2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.
3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.
4. Пусть в пространстве со скалярным произведением H последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.
5. Пусть M и N – такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.
6. В гильбертовом пространстве l_2 рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \left\{1, \frac{1}{2^n}, \ldots, \frac{1}{2^{in}}, \ldots\right\}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.
7. Пусть $A \subset E$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.
8. Доказать, что для того, чтобы элемент x был ортогонален подпространству $L \subset H$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство
9. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp}$ является подпространством.

10. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$? Ответ обоснуйте и приведите пример.
11. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.
12. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.
13. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Привести пример строгого включения.
14. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и $\lambda \in \Re$ – некоторое число. Доказать, что множество $\lambda M = \{x \in E : x = \lambda y, y \in M\}$ – выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?
15. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.

16. Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \bigcap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A, B) = 0$?
17. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что – $M + N$ подпространство в H.
18. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?
19. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z,\ y \in M,\ z \in N$. Следует ли отсюда, что N и M – подпространства в H? Ответ обосновать.
20. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$.
21. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$ для любых $\alpha, \beta \in C$.
22. Доказать, что в пространстве   нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.
23. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}, (y^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda^{(n)} = \|x^{(n)} - y^{(n)}\|$ сходится.
24. Доказать, что если $f : E \to W$ непрерывно, то $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ для любого $A \subset E$.
25. Пусть множество $A \subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывно отображает E в $\Re$.
26. Образует ли в пространстве $C[a, b]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n?

27. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t \in \Re : f(t) < 1\}$ открыто на числовой прямой.
28. Пусть $A, B \subset E$ – произвольные множества в банаховом пространстве E. Доказать, что $\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$.
29. Доказать, что множество $A \subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)} \in A$ и любой последовательности $\lambda^{(n)} \in C, \lambda^{(n)} \to 0,$ при $n \to \infty$ последовательность $\lambda^{(n)} x^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.
30. Пусть $M, N \subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в H.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Функциональный анализ» используются современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале: комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно - программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно - программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, тематика рефератов и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерная тематика индивидуальных заданий

Материалы к лабораторным занятиям с индивидуальными заданиями для каждого студента представлены в следующих материалах:

- Дайняк, В.В. Теория нормированных векторных пространств: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2005. – 82 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства. Определения и примеры.
2. Неравенство Юнга. Неравенство Гельдера для сумм. Неравенство Минковского для сумм.
3. Применение метрических пространств.
4. Линейные пространства.
5. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства норм.
6. Интегральное неравенство Гельдера. Интегральное неравенство Минковского.
7. Анализ в нормированных пространствах. Свойства открытых множеств. Примеры.
8. Внутренние, внешние, граничные, предельные и изолированные точки. Теорема о замкнутом множестве.
9. Расстояние от точки до множества. Необходимое и достаточное условие того, чтобы точка являлась точкой прикосновения.
10. Предел последовательностей в нормированном векторном пространстве. Примеры. Теорема о точке прикосновения.
11. Отображение в нормированном векторном пространстве. Теорема о непрерывном отображении.
12. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах.
13. Аппроксимация в нормированных векторных пространствах. Теорема об элементе наилучшего приближения.
14. Строго нормированные пространства и их свойства.
15. Банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров.
16. Ряды в банаховых пространствах. Критерий банахова пространства.
17. Примеры задач, приводящих к исследованию интегральных уравнений
18. Принцип сжимающих отображений. Теорема Банаха.
19. Локальный принцип сжимающих отображений. Теорема о свойстве n-ой итерации сжимающего отображения.
20. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.
21. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

22. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.
23. Пополнение линейных нормированных пространств.
24. Предгильбертовы пространства. Примеры. Свойства скалярных произведений.
25. Ортогональные системы. Процесс ортогонализации Шмидта.
26. Гильбертовы пространства. Теорема о пополнении. Расстояние от точки до подпространства. Теорема об аппроксимации.
27. Проекция в гильбертовом пространстве. Теорема о проекции.
28. Ортогональное дополнение и его свойства.
29. Разложение гильбертова пространства в прямую сумму. Теорема о плотном множестве.
30. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
31. Компактные множества в нормированных пространствах.
32. Относительно компактное множество. Теорема Арцела - Асколи. Относительная компактность в пространствах $L_p[a, b]$, l_p, $1 \le p < \infty$.
33. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность интегрального оператора.
34. Ограниченность и непрерывность. Оператор дифференцирования.
35. Пространства линейных операторов. Равномерная сходимость.
36. Сильная сходимость в пространстве $L(X, Y)$. Принцип равномерной Ограниченности.
37. Сильная сходимость в пространстве $L(X,\ Y)$. Теорема Банаха - Штейнгауза.
38. Левый и правый обратные операторы и их свойства.
39. Обратный оператор. Критерий существования обратного оператора.
40. Замкнутые операторы и их свойства. Теорема Банаха о замкнутом графике.
41. Теорема Хана - Банаха и ее следствия.
42. Сопряженные пространства. Теорема Рисса.
43. Сопряженные операторы.
44. Вполне непрерывные операторы.
45. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Замкнутость $R\ (I - A)$, $R\ (I - A^*)$. Первая и вторая теорема Фредгольма.
46. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Третья теорема Фредгольма.
47. Теория Рисса - Шаудера разрешимости уравнений 2-ого рода. Альтернатива Фредгольма.
48. Собственные значения и собственные векторы линейных операторов.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
отсутствует			

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 20_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________