

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля

2023 г.

Регистрационный № УД – 12396/уч.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09-2021, утверждён постановлением № 98 от 25.04.2022 учебных планов: № G31-1-019/уч. от 25.05.2021 и № G 31-1-004/уч. ин. от 31.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

О.А. Лаврова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук;

Л.Л. Голубева, заведующая кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Дюбков В.К., ректор Учреждения дополнительного образования «Институт повышения квалификации и переподготовки специалистов информационных технологий и бизнес-администрирования», кандидат технических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (протокол № 13 от 14.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа

Л. Л. Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Основы математического программирования» – подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований и решении практических задач, связанных с оптимизацией.

Образовательная цель: обучение студентов методам и приемам математического моделирования для задач выпуклого программирования.

Развивающая цель: формирование у студентов практических навыков построения и анализа оптимизационных математических моделей.

Задачи учебной дисциплины:

1. формировать понимание математических моделей, используемых в математической оптимизации;
2. обучить навыкам построения и анализа математических моделей в виде задач выпуклого программирования;
3. развивать фундаментальные математические знания для решения задач выпуклого программирования.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина «Основы математического программирования» относится к модулю «Компьютерное моделирование» компонента учреждения высшего образования, является дисциплиной по выбору студента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Компьютерная математика», «Методы математического программирования», «Экстремальные задачи». При изучении дисциплины «Основы математического программирования» используются знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплин «Математический анализ», «Компьютерная математика». Приобретенные при изучении данной дисциплины компетенции пригодятся студенту при изучении дисциплины «Методы математического программирования», «Экстремальные задачи», «Исследование операций».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Основы математического программирования» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции:**

СК-8. Осуществлять математическое и компьютерное моделирование для прикладных исследований.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные теоретические результаты для решения задач математического программирования;

– классификацию задач выпуклого программирования;

уметь:

– строить экстремальные задачи на множествах конечномерного пространства;

– осуществлять анализ выпуклых множеств, выпуклых функций, задач выпуклого и линейного программирования;

владеть:

– навыками построения и анализа задач оптимизации выпуклых функций на выпуклых множествах конечномерного пространства;

– навыками построения и анализа задач оптимизации линейных функций на множествах конечномерного пространства, описываемых конечной системой линейных уравнений и неравенств.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Основы математического программирования» изучается в пятом семестре. Форма получения высшего образования очная (дневная).

Всего на изучение учебной дисциплины «Основы математического программирования» отведено: 120 часов, в том числе 72 аудиторных часов, из них: лекции – 36 часов (в том числе – 4 ч (ДОТ)), лабораторные занятия – 30 часов (в том числе – 4 ч (ДОТ)), управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория выпуклых множеств

Тема 1.1. Оптимизация без ограничений

Результаты математического анализа для задач безусловной оптимизации. Метод Ньютона для нахождения оптимального решения строго выпуклой дифференцируемой функции.

Тема 1.2. Выпуклые множества. Определения и свойства

Выпуклое множество. Выпуклая функция. Полупространство. Гиперплоскость. Полиэдр. Эллипсоид. Алгебраическое и геометрическое описание выпуклых множеств. Методики проверки множества на выпуклость и замкнутость.

Тема 1.3. Теоремы об отделимости

Теорема об отделимости точки от выпуклого и замкнутого множества. Теорема об отделимости двух выпуклых множеств.

Тема 1.4. Конус

Определение и свойства конуса. Теорема об отделимости точки от выпуклого конуса. Конечно-порожденный конус. Симплициальный конус. Теорема Каратеодори.

Тема 1.5. Полярный конус

Определение и свойства полярного конуса. Теорема о полярном конусе для пересечения выпуклых конусов.

Тема 1.6. Полиэдрический конус

Определение и свойства полиэдрического конуса. Поляр для полиэдрического конуса. Связь полиэдрического конуса и конечнопорожденного конуса. Рациональный полиэдрический конус. Рациональный конечно-порожденный конус. Длины кода для данных, описывающих множества.

Тема 1.7. Лемма Фаркаша

Задача разрешимости системы линейных алгебраических неравенств. Лемма Фаркаша.

Раздел 2. Условия оптимальности и теория двойственности для задач выпуклого программирования

Тема 2.1. Классификация задач математического программирования

Задачи выпуклого программирования. Задачи линейного программирования. Задачи положительного полуопределенного программирования. Задачи дискретного программирования. Задачи комбинаторной оптимизации. Задачи целочисленного линейного программирования. Различные форматы описания задач.

Тема 2.2. Критерий оптимальности для задач выпуклого программирования

Определение радиального и нормального конуса для точки выпуклого множества. Критерий оптимальности для дифференцируемой выпуклой функции на выпуклом множестве.

Тема 2.3. Теорема Куна-Таккера

Регулярная тройка в описании множества допустимых решений. Критерий Куна-Таккера. Частные случаи теоремы Куна-Таккера для задач линейного программирования. Обобщение теоремы Куна-Таккера на случай не дифференцируемых функций.

Тема 2.4. Теория двойственности по Лагранжу

Функция Лагранжа. Прямая задача по Лагранжу и двойственная задача по Лагранжу. Слабая двойственность по Лагранжу. Седловая точка функции Лагранжа. Сильная двойственность по Лагранжу. Связь с теоремой Куна-Таккера.

Тема 2.5. Теория двойственности для задач конической оптимизации

Слабая и сильная двойственность для двойственных задач конической оптимизации. Построение двойственных задач конической оптимизации. Пример регулярной задачи конической оптимизации без оптимального решения. Построение двойственных задач линейного программирования. Пример для иллюстрации связи двойственных задач с поиском равновесных состояний в матричных играх.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские Занятия	Лабораторные Занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Теория выпуклых множеств							
1.1	Оптимизация без ограничений	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
1.2	Выпуклые множества. Определения и свойства	2			4			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
1.3	Теоремы об отделимости	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
1.4	Конус	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
1.5	Полярный конус	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой.
1.6	Полиэдрический конус	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой

1.7	Лемма Фаркаша	2			2 2 (ДОТ)	2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой по разделу 1. Видеоконференция
2	Условия оптимальности и теория двойственности для задач выпуклого программирования						
2.1	Классификация задач математического программирования	2 2 (ДОТ)			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Видеоконференция
2.2	Критерий оптимальности для задач выпуклого программирования	2			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.3	Теорема Куна-Таккера	4 2 (ДОТ)			2	2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой по темам 2.1-2.3. Видеоконференция
2.4	Теория двойственности по Лагранжу	4			2		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.5	Теория двойственности для задач конической оптимизации	2			2 2 (ДОТ)	2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой по темам 2.4, 2.5. Видеоконференция

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Палий, И. А. Линейное программирование: учеб. пособие для студ. высших учебных заведений, обучающихся по естественным направлениям / И. А. Палий. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2023. – 175 с.
2. Ржевский, С. В. Математическое программирование: учебное пособие / С. В. Ржевский. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 608 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/206993>.
3. Юрьева, А. А. Математическое программирование: учебное пособие / А. А. Юрьева. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 432 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/212210>.
4. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – изд. стер. – Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2019. – 386 с.
5. Донкова, И. А. Исследование операций и методы оптимизации: учебное пособие / И. А. Донкова; Тюменский гос. ун-т. – Москва: ПРОСПЕКТ, 2023. – 195 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Р. Габасов, Методы оптимизации: пособие для студ. вузов, обуч. по спец. 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актuarная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» (по направлениям), 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность» (математические методы и программные системы): [пособие для студ. мат. и экон. профиля] / [Р. Габасов и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с.
2. Болотский, А. В. Математическое программирование и теория игр: учебное пособие для вузов / А. В. Болотский. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 116 с. – Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/217433>
3. Р. Рокафеллар, Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар; пер. с англ. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомирова. – Москва: Мир, 1973. – 469 с.
4. А. Схрейвер, Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. / Александр Схрейвер; пер. с англ. С. А. Тарасова [и др.]. – Москва: Мир, 1991. – 702 с.
5. A. Ruszcynski, Nonlinear Optimization. Princeton University Press, 2006.
6. A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, 1986.

7. R.J. Vanderbei, Linear Programming: Foundations and Extensions. Springer, 2020.
8. M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer, 1988.
9. B. Korte, J. Vygen, Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms, Springer, Sixth Edition, 2018.
10. V. Chvatal, Linear Programming, Freeman, 1983.
11. J. Matousek, B. Gärtner, Using and Understanding Linear Programming, Springer, 2006.
12. A. Blum, J. Hopcroft, R. Kannan, Foundations of Data Science, Cambridge University Press, 2020.

Рекомендуемое учебно-лабораторное оборудование

Для проведения занятий требуется следующее программное обеспечение: MS Office, пакет *Mathematica*, пакет MATLAB, Python.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Согласно Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в БГУ, контроль знаний студентов по дисциплине «Основы математического программирования» происходит в форме текущего контроля и текущей аттестации.

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: отчет по лабораторной работе с устной защитой, отчет по заданиям управляемой самостоятельной работы с устной защитой, видеоконференция.

Оценка текущего контроля знаний студента по дисциплине «Основы математического программирования» формируется в результате регулярной и систематической проверки знаний студентов во время занятий и по итогам их самостоятельной работы. Текущий контроль знаний проходит во время устной защиты отчёта по лабораторным работам, выполняемым в учебной лаборатории и самостоятельно вне аудитории, отчётов по заданиям управляемой самостоятельной работы. Задания к лабораторным работам и управляемой самостоятельной работе составляются согласно содержанию учебного материала. Во время самостоятельной работы студент выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу.

При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, аргументация выбранных решений, последовательность и оригинальность изложения материала, оригинальность кода, корректность оформления, самостоятельность выполнения заданий. Также ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекциях, поэтому студенту при выполнении лабораторных заданий необходимо знание лекционных материалов. Для совершенствования способностей учиться самостоятельно студентам могут выдаваться темы докладов, с которыми они выступают на занятиях.

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- отчёты по лабораторным работам с устной защитой – 60%;

– отчёты по заданиям с устной защитой – 40%.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Основы математического моделирования» учебным планом предусмотрен **зачёт**.

Зачёт по дисциплине проходит в форме контрольного опроса в устной или письменной форме. Если студент успешно защитил все лабораторные работы и выполнил все задания управляемой самостоятельной работы, то допускается определение результатов текущей аттестации по дисциплине на основании результатов текущего контроля знаний без проведения дополнительного опроса на зачёте. Это решение находится в компетенции преподавателя (группы преподавателей), ответственного за реализацию дисциплины. При этом явка студента на зачёт является обязательной.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Итоговая работа по разделу 1. Теория выпуклых множеств (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Для множества $\mathbb{R}_+^2$ докажите, что оно является а) выпуклым; б) замкнутым; в) полиэдром; г) конусом; д) выпуклым конусом; е) полиэдрическим конусом; ж) конечно-порожденным конусом.

Задание 2. Какими свойствами обладает множество S_+^k симметрических положительно-полуопределенных матриц размера $k \times k$?

Задание 3. Для каких множеств справедливо равенство $(\cap K_i)^\circ = \sum_{i=1}^q K_i^\circ$ и при каких условиях оно выполняется?

Задание 4. Как доказать, что заданная системы линейных алгебраических неравенств не имеет решения?

Задание 5. Почему проверка разрешимости системы линейных алгебраических неравенств на основе леммы Фаркаша содержит условие не отрицательности для переменной?

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Итоговая работа по теме 2.1. Классификация задач математического программирования, **по теме 2.2.** Критерий оптимальности для задач выпуклого программирования, **по теме 2.3.** Теорема Куна-Таккера (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Сформулируйте алгебраическое описание радиального и нормального конусов для произвольной точки полиэдра.

Задание 2. Изобразите произвольный неограниченный полиэдр в $X \subset \mathbb{R}^2$. Используя критерий оптимальности для задач выпуклого программирования, найдите графически оптимальное решение задач линейного программирования $\min\{ \langle c, x \rangle : x \in X \}$ и $\max\{ \langle c, x \rangle : x \in X \}$ для целевого вектора $c = (1, 1)$.

Задание 3. Почему в теореме Куна-Таккера накладываются ограничения на тройку $(X_0, (g_i)_{i=\overline{1,m}}, (h_i)_{i=\overline{1,p}})$?

Задание 4. Является ли тройка $(\mathbb{R}^n, x_1^2, \langle c, x \rangle - d)$ регулярной?

Задание 5. Сформулируйте частный случай теоремы Куна-Таккера для задачи выпуклого программирования $\min \{ f(x) : Ax \leq b, Cx = d, x \in \mathbb{R}^n \}$, где $f(x)$ – выпуклая и дифференцируемая функция (случай а) или $f(x)$ – выпуклая недифференцируемая функция (случай б).

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Итоговая работа «Теория двойственности» по теме 2.4. Теория двойственности по Лагранжу, **теме 2.5.** Теория двойственности для задач конической оптимизации (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Сформулируйте функцию Лагранжа, прямую функцию Лагранжа, двойственную функции Лагранжа для задачи оптимизации $\min \{ f(x) : x \in X_0; g_i(x) \leq 0, i = \overline{1,m}; h_i(x) = 0, i = \overline{1,p} \}$.

Задание 2. Приведите пример задачи конического программирования.

Задание 3. Сформулируйте двойственную задачу для следующих задач линейного программирования

$$\begin{aligned} & \max \{ \langle c, x \rangle : Ax \leq b \}, \\ & \max \{ \langle c, x \rangle : Ax \leq b, x \geq 0_n \}, \\ & \min \{ \langle c, x \rangle : Ax \geq b, x \geq 0_n \}, \\ & \max \{ \langle c, x \rangle : Ax \leq b, Cx = d, x \in \mathbb{R}^{10} \}, \\ & \max \{ 2x + 3y + z : x + y - 2z = 1, x + y + z \leq 10, x, y, z \in \mathbb{R} \}, \\ & \max \{ x_1 + 7x_2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 8, 4x_1 + x_2 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Задание 4. Как Вы докажете, что заданная задача линейного программирования имеет оптимальное значение?

Задание 5. Почему прямая задача линейного программирования и двойственная к ней не могут одновременно быть неограниченными?

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса *используются методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к зачёту, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным разделам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Классификация задач выпуклого программирования. Задачи линейного программирования. Задачи полуопределенной оптимизации.
2. Выпуклое множество. Выпуклая функция. Полупространство. Гиперплоскость. Полиэдр. Свойства выпуклых множеств.
3. Теорема об отделимости точки от выпуклого замкнутого множества.
4. Теорема об отделимости выпуклых множеств.
5. Конус. Теорема об отделимости точки от выпуклого конуса.
6. Конечно-порожденный конус. Симплициальный конус. Теорема Каратеодори.
7. Полярный конус. Полярный конус для пересечения выпуклых конусов.

8. Полиэдрический конус. Связь полиэдрического и конечнопорожденного конуса.
9. Лемма Фаркаша о разрешимости системы линейных неравенств.
10. Радиальный конус. Нормальный конус.
11. Критерий оптимальности для дифференцируемой выпуклой функции на выпуклом множестве.
12. Регулярная задача. Нормальный конус для множества, заданного неравенством от выпуклой функции. Условие Куна-Таккера.
13. Теорема Куна-Таккера.
14. Частные случаи теоремы Куна-Таккера.
15. Двойственность по Лагранжу. Прямая задача Лагранжа. Двойственная задача Лагранжа.
16. Принцип слабой двойственности по Лагранжу.
17. Принцип сильной двойственности по Лагранжу.
18. Результаты теории двойственности для задач конического программирования.
19. Результаты теории двойственности для задач линейного программирования.
20. Результаты теории двойственности для задач полуопределенной оптимизации.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название Кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ¹
Методы математического программирования	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)
Экстремальные задачи	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)
Исследование операций	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)

¹ При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЕ НА _____ / _____ УЧЕБНЫЙ ГОД

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
 _____ (протокол № _____ от _____ 200__ г.)
 (название кафедры)

Заведующая кафедрой
 кандидат физ.-мат. наук, доцент _____
 (ученая степень, ученое звание) (подпись)

Л.Л. Голубева
 (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
 Декан факультета
 доктор физ.-мат. наук, профессор _____
 (ученая степень, ученое звание) (подпись)

С.М. Босяков
 (И.О.Фамилия)