

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05 июля» 2023 г.

Регистрационный № УД – 12395/уч.



МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 09-2021, утверждён постановлением № 98 от 25.04.2022 и учебных планов № G31-1-019/уч. от 25.05.2021 и № G 31-1-004/уч. ин. от 31.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

О.А. Лаврова, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук;

Л.Л. Голубева, заведующая кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Дюбков В.К., ректор Учреждения дополнительного образования «Институт повышения квалификации и переподготовки специалистов информационных технологий и бизнес-администрирования», кандидат технических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ (протокол № 13 от 14.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 29.06.2023).

Зав. кафедрой дифференциальных уравнений
и системного анализа

Л. Л. Голубева

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Методы математического программирования» – повышение уровня профессиональной компетентности студентов путем обучения навыкам и умениям использовать фундаментальные математические знания по математическому программированию в качестве основы при проведении прикладных исследований и решении практических задач, связанных с оптимизацией.

Образовательная цель: обучение студентов методам и алгоритмам для решения задач оптимизации.

Развивающая цель: формирование у студентов практических навыков построения и анализа оптимизационных математических моделей.

Задачи учебной дисциплины:

1. формировать понимание математических моделей, используемых в математической оптимизации;
2. обучить навыкам построения и анализа алгоритмов для практической реализации математических моделей в виде задач выпуклого программирования.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина «Методы математического программирования» относится к модулю «Компьютерное моделирование», компонента учреждения высшего образования, является дисциплиной по выбору студента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Компьютерная математика», «Численные методы», «Основы математического программирования», «Экстремальные задачи». При изучении дисциплины «Методы математического программирования» используются знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплин «Математический анализ», «Алгебра и теория чисел», «Компьютерная математика», «Численные методы», «Основы математического программирования». Приобретенные при изучении данной дисциплины компетенции пригодятся студенту при изучении дисциплины «Исследование операций».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Методы математического программирования» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции:**

СК-8. Осуществлять математическое и компьютерное моделирование для прикладных исследований.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

основные теоретические результаты и практические методы решения задач математического программирования;

уметь:

строить экстремальные задачи на выпуклых множествах конечномерного пространства при наличии ограничений в виде равенств и неравенств;

решать задачи линейного программирования с применением симплекс-алгоритма;

решать задачи линейного и выпуклого программирования с применением метода внутренней точки;

владеть:

навыками построения и анализа задач оптимизации выпуклых функций на выпуклых множествах конечномерного пространства;

навыками построения и анализа задач оптимизации линейных функций на множествах конечномерного пространства, описываемых конечной системой линейных уравнений и неравенств;

основными алгоритмами и методами решения задач линейного и выпуклого программированиями.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Методы математического программирования» изучается в шестом семестре. Форма получения высшего образования очная (дневная).

Всего на изучение учебной дисциплины «Методы математического программирования» отведено: 120 часов, в том числе 52 аудиторных часов, из них: лекции – 20 часов, лабораторные занятия – 26 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Внутреннее представление полиэдра

Теорема о декомпозиции полиэдра. Внутреннее и внешнее представления полиэдра. Решение задач линейного программирования для полиэдров, заданных внутренним представлением. Полиномиальные сертификаты для задач линейного программирования и для задачи разрешимости системы линейных алгебраических неравенств. Политоп.

Тема 2. Характеристический конус

Характеристический конус, его свойства. Пространство линейности, его свойства. Размерность полиэдра.

Тема 3. Грань полиэдра

Понятие грани полиэдра. Алгебраическое описание грани полиэдра. Фасета, минимальная грань: свойства, описания. Понятия собственная минимальная грань, вершина, экстремальный луч, ребро. Неизбыточное внутреннее и внешнее представление полиэдра.

Тема 4. Геометрическое описание симплекс-алгоритма

Внешнее и внутреннее описание вершины, радиального конуса, нормального конуса. Условие проверки вершины на оптимальность. Условие проверки задачи линейного программирования на неограниченность. Первая фаза симплекс-алгоритма нахождения начальной вершины.

Тема 5. Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате неравенств

Базис для ограничений-неравенств. Идея замены радиального конуса на симплицеальный конус. Экстремальные лучи симплицеального конуса. Правило Блэнда выбора направления движения по граням первой размерности.

Тема 6. Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате равенств

Базис для ограничений равенств. Допустимый базис. Допустимое базисное решение. Алгебраическое описание симплекса-алгоритма для задачи линейного программирования в формате равенств.

Тема 7. Табличная реализация симплекс-алгоритма

Выбор начального базиса. Двойственный симплекс-алгоритм.

Тема 8. Метод эллипсоидов для решения задач выпуклого программирования

Выпуклое тело. Эллипсоид минимального объема, описанный вокруг выпуклого тела. Алгоритм двоичного поиска для последовательности задач о разрешимости. Алгоритмическое представление выпуклого тела. Полиномиальная сложность алгоритма для метода эллипсоидов.

Тема 9. Метод внутренней точки для решения задач выпуклого программирования

Внутреннее скалярное произведение. Конкордантная функция в качестве функции-барьера. Функция-барьер для полиэдрических множеств. Полиномиальная сложность алгоритма для метода внутренней точки.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские Занятия	Лабораторные Занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Внутреннее представление полиэдра	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2	Характеристический конус	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
3	Грань полиэдра	2			2		2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой
4	Геометрическое описание симплекс-алгоритма	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
5	Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате неравенств	2			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой

6	Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате равенств	4			4		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
7	Табличная реализация симплекс-алгоритма	2			4	2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой
8	Метод эллипсоидов для решения задач выпуклого программирования	2			4		Отчет по лабораторной работе с устной защитой
9	Метод внутренней точки для решения задач выпуклого программирования	2			4	2	Отчет по лабораторной работе с устной защитой. Отчет по заданиям с устной защитой

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Палий, И. А. Линейное программирование: учеб. пособие для студ. высших учебных заведений, обучающихся по естественным направлениям / И. А. Палий. - 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2023. – 175 с.
2. Ржевский, С. В. Математическое программирование: учебное пособие / С. В. Ржевский. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 608 с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206993>.
3. Юрьева, А. А. Математическое программирование: учебное пособие / А. А. Юрьева. - 2-е изд., испр. и доп. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 432 с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212210>.
4. Поляк, Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – изд. стер. – Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2019. - 386 с.
5. Донкова, И. А. Исследование операций и методы оптимизации: учебное пособие / И. А. Донкова; Тюменский гос. ун-т. - Москва: ПРОСПЕКТ, 2023. - 195 с.
6. Трухан, А. А. Векторная алгебра, аналитическая геометрия и методы математического программирования: учебник для вузов / А. А. Трухан, В. Г. Ковтуненко. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 400 с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/183364>.
7. Трухан, А. А. Линейная алгебра и линейное программирование: учебное пособие / А. А. Трухан, В. Г. Ковтуненко. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 316 с. - Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212519>.

Перечень дополнительной литературы

1. Р. Габасов, Методы оптимизации: пособие для студ. вузов, обуч. по спец. 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» (по направлениям), 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность» (математические методы и программные системы): [пособие для студ. мат. и экон. профиля] / [Р. Габасов и др.]. - Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с.
2. Болотский, А. В. Математическое программирование и теория игр: учебное пособие для вузов / А. В. Болотский. - 4-е изд., стер. - Санкт-

Петербург: Лань, 2022. - 116 с. - Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: <https://e.lanbook.com/book/217433>

3. Р. Рокафеллар, Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар; пер. с англ. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомирова. – Москва: Мир, 1973. – 469 с.
4. А. Схрейвер, Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. / Александр Схрейвер; пер. с англ. С. А. Тарасова [и др.]. – Москва: Мир, 1991. – 702 с.
5. A. Ruszcynski, Nonlinear Optimization. Princeton University Press, 2006.
6. A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, 1986.
7. R.J. Vanderbei, Linear Programming: Foundations and Extensions. Springer, 2020.
8. M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer, 1988.
9. B. Korte, J. Vygen, Combinatorial Optimization. Theory and Algorithms, Springer, Sixth Edition, 2018.
10. V. Chvatal, Linear Programming, Freeman, 1983.
11. J. Matousek, B. Gärtner, Using and Understanding Linear Programming, Springer, 2006.
12. A. Blum, J. Hopcroft, R. Kannan, Foundations of Data Science, Cambridge University Press, 2020.

Рекомендуемое учебно-лабораторное оборудование

Для проведения занятий требуется следующее программное обеспечение: MS Office, пакет *Mathematica*, пакет MATLAB, Python.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Согласно Положения о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете контроль знаний студентов происходит в форме текущего контроля и текущей аттестации.

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: отчет по лабораторной работе с устной защитой, отчет по заданиям управляемой самостоятельной работы с устной защитой.

Оценка текущего контроля знаний студента по дисциплине «Методы математического программирования» формируется в результате регулярной и систематической проверки знаний студентов во время занятий и по итогам их самостоятельной работы. Текущий контроль знаний проходит во время устной защиты отчёта по лабораторным работам, выполняемым в учебной лаборатории и самостоятельно вне аудитории, отчётов по заданиям управляемой самостоятельной работы. Задания к лабораторным работам и управляемой самостоятельной работе составляются согласно содержанию учебного материала. Во время самостоятельной работы студент выполняет задания, полученные на лабораторных занятиях, а также изучает рекомендуемую литературу.

При защите лабораторных работ оценивается полнота ответа, аргументация выбранных решений, последовательность и оригинальность изложения материала, оригинальность кода, корректность оформления, самостоятельность выполнения заданий. Также ценится знание студентом теоретических сведений, полученных на лекциях, поэтому студенту при выполнении лабораторных заданий необходимо знание лекционных материалов. Для совершенствования способностей учиться самостоятельно студентам могут выдаваться темы докладов, с которыми они выступают на занятиях.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Методы математического моделирования» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- отчёты по лабораторным работам с устной защитой – 60%;
- отчёты по заданиям с устной защитой – 40%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Итоговая работа «Геометрия задач линейного программирования»
по теме 1. Внутреннее представление полиэдра, теме 2. Характеристический конус, теме 3. Грань полиэдра (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. По заданным конечным множествам V и U в \mathbb{R}^2 изобразите полиэдр $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(U)$.

Задание 2. Изобразите произвольный неограниченный полиэдр и сформулируйте его внутреннее представление. Является ли построенное внутреннее представление избыточным?

Задание 3. Сформулируйте внешнее описание характеристического конуса $\text{char}(P)$ и пространства линейности $\text{lineal}(P)$ для полиэдра $P = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$. Изобразите характеристический конус и пространство линейности для произвольного политопа.

Задание 4. Что такое грань полиэдра? Изобразите произвольный полиэдр и обозначьте все грани, ему принадлежащие. Среди всех граней дополнительно обозначьте тривиальные грани, фасеты и минимальные грани.

Задание 5. Почему выпуклая оболочка конечного числа точек является замкнутой?

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

² При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Итоговая работа «Симплекс-алгоритм» по теме 4. Геометрическое описание симплекс-алгоритма, **теме 5.** Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате неравенств, **теме 6.** Алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате равенств, **теме 7.** Табличная реализация симплекс-алгоритма (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Сформулируйте геометрическое описание симплекс-алгоритма.

Задание 2. Сформулируйте алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в виде неравенств.

Задание 3. Сформулируйте алгебраическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в виде равенств.

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Тема 9. Метод внутренней точки для решения задач выпуклого программирования (2 ч.)

Примерный перечень заданий:

Задание 1. Сформулируйте идею метода внутренней точки.

Задание 2. Какой вид имеет функция барьера для произвольного полиэдра $P = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$?

Задание 3. Какие вычисления необходимо сделать для получения шага метода Ньютона?

Задание 4. Опишите алгоритм метода внутренней точки. Какие условия на начальные значения должны выполняться, чтобы гарантировать сходимость метода?

Выполнение заданий на основе методических указаний к лабораторным занятиям.

Форма контроля – письменный отчет по заданиям с устной защитой.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *эвристический подход*, который предполагает демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем.

При организации образовательного процесса используется *практико-ориентированный подход*, который предполагает освоение содержания через решения практических задач.

При организации образовательного процесса *используются методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендовано разместить на образовательном портале или сайте кафедры учебно-методические материалы: курсы лекций и лабораторные практикумы, методические указания к лабораторным занятиям, вопросы для подготовки к экзамену, перечень рекомендуемой литературы, информационные ресурсы.

Самостоятельная работа студента включает в себя работу с учебной литературой по заданным темам дисциплины, поиск новейшей учебной и научной информации в указанных областях знаний и знакомство с ней, а также выполнение поставленных заданий.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Теорема о декомпозиции полиэдра. Внутреннее и внешнее представление полиэдра.
2. Решение задачи линейного программирования для заданного внутреннего представления полиэдра.
3. Характеристический конус. Пространство линейности.
4. Аффинная оболочка полиэдра. Размерность полиэдра.
5. Понятие грани полиэдра. Типы граней: фасета, минимальная грань, собственная минимальная грань, экстремальный луч, вершина.
6. Алгебраическое и геометрическое описание фасеты, ее свойства.
7. Алгебраическое и геометрическое описание минимальной грани полиэдра и собственной минимальной грани полиэдрического конуса, их свойства.

8. Алгебраическое и геометрическое описание экстремального луча, его свойства.
9. Алгебраическое и геометрическое описание вершины, ее свойства.
10. Неизбыточное внешнее представление полиэдра.
11. Неизбыточное внутреннее представление полиэдра.
12. Геометрическое описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате неравенств.
13. Понятие симплицеального релаксирующего конуса. Алгебраическое описание симплекс алгоритма для ограничений в формате неравенств.
14. Общее описание симплекс-алгоритма для ограничений в формате равенств. Понятие базисных и небазисных переменных, допустимого базисного решения, вектора небазисных оценок.
15. Табличная реализация симплекс-алгоритма для ограничений в формате равенств.
16. Общее описание метода эллипсоидов для приближенного решения задач выпуклого программирования.
17. Алгоритм метода эллипсоидов.
18. Сходимость метода эллипсоидов. Оценка количества арифметических операций и времени выполнения алгоритма.
19. Общее описание метода внутренней точки. Связь с методом Ньютона.
20. Свойства и построение функции барьера для метода внутренней точки.
21. Специальная метрика для оценки сходимости метода внутренней точки.
22. Аспекты практической реализации метода внутренней точки.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название Кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) ²
Исследование операций	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 14.06.2023)

² При наличии предложений об изменениях в содержании учебной программы УВО.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ
К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ
ДИСЦИПЛИНЕ НА _____ / _____ УЧЕБНЫЙ ГОД

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
 _____ (протокол № _____ от _____ 200__ г.)
 (название кафедры)

Заведующая кафедрой
 кандидат физ.-мат. наук, доцент _____
 (ученая степень, ученое звание) (подпись)

Л.Л. Голубева
 (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
 Декан факультета
 доктор физ.-мат. наук, профессор _____
 (ученая степень, ученое звание) (подпись)

С.М. Босяков
 (И.О.Фамилия)