БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_______________ О.Г.Прохоренко
(подпись)
(И.О.Фамилия)
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12351/уч.

Функциональный анализ
(название учебной дисциплины)

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-98 01 01Компьютерная безопасность (по направлениям)
Направление специальности:
1-98 01 01-01 Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-98 01 01- 2021, типового учебного плана регистрационный № Р98-1-003/пр-тип. от 02.07.2021, учебных планов: № Р98-1-005/уч. от 23.07.2021, №Р98-1-024/уч. ин. от 09.08.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Е.С.Чеб, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

(И.О.Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание)

РЕЗЕНЗЕНТЫ:

Ф.Е.Ломовцев, профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

О.И.Костюкова, профессор кафедры информатики Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор.

(И.О.Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание рецензента)

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой компьютерных технологий и систем БГУ
(протокол № 14 от 23.05.2023)

Научно-методическим советом БГУ[1]
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой
компьютерных технологий и систем В.В. Казаченок

[1] Учебные программы обучения по факультативным дисциплинам могут быть рекомендованы к утверждению Советом факультета или учебно-методической комиссией факультета, или общеуниверситетской кафедрой.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» отражает важное направление развития современной математики, которая находит применение в различных областях, включая, например, разработку программного обеспечения. Он позволяет анализировать и оптимизировать функции и алгоритмы, что помогает создавать более эффективные и надежные программы. Понимание основных понятий и свойств функционального анализа позволяет разработчикам применять его методы и инструменты для решения сложных задач. Важно учиться применять функциональный анализ в практических ситуациях и постоянно совершенствовать свои навыки в этой области.

Функциональный анализ весьма обширен и интенсивно развивается.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Функциональный анализ» – изложить студентам основы функционального анализа, включающего такие важные для компьютерного моделирования и защиты информации понятия, как метрика (позволяющая дать количественный анализ изменения информационного сообщения), компактность и свойства непрерывных отображений на компактах (лежащие в основе фрактальных методов хранения и передачи информации, а также обеспечивающие достаточные условия разрешимости различных экстремальных задач) и тесно связанные с ними понятия нормы и полноты метрических пространств, а также понятие гильбертовых пространств и линейных операторов в них. Последнее важно для обоснования современных способов кодирования графической информации (методы гармонического и вейвлет-анализа). Важное место в курсе занимает конструкция интеграла Лебега, на которой базируются, в частности, стохастические методы математического моделирования процессов хранения, передачи и защиты информации.

Образовательная цель: использовать методы функционального анализа и применять их для решения прикладных задач в различных областях науки, техники, экономики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, необходимого при исследовании теоретических вопросов и при решении задач других разделов математики и ее приложений.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение основных принципов и методов функционального анализа.

2. Формирование умений в области применения основных методов функционального анализа при решении теоретических и прикладных задач естествознания.

3. Получение практических навыков работы с методами функционального анализа.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» относится **к модулю** «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами.

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» тесно связана с такими дисциплинами как: «Линейная алгебра», «Криптографические методы», «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Численные методы», «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Методы оптимизации».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции:**

СК – 2. Использовать методы функционального анализа и применять их для решения прикладных задач в различных областях науки, техники, экономики.

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

терминологию и основные понятия функционального анализа, используемые в области фундаментальной математики и её приложениях:

- метрические и линейные нормированные пространства;
- непрерывные отображения метрических пространств;
- компактность в метрических пространствах;
- гильбертовы пространства, ряды Фурье в гильбертовых пространствах;
- конструкцию меры и интеграла Лебега;
- линейные ограниченные операторы;
- линейные ограниченные функционалы и сопряженные пространства;

уметь:

- проверять выполнение аксиом метрики и нормы, сравнивать нормы на линейном пространстве;
- устанавливать сходимость последовательностей в линейных нормированных пространствах;
- исследовать заданное отображение на сжатие;
- исследовать заданное подмножество метрического пространства на предкомпакность;
- находить ортогональную проекцию заданного элемента на подпространство с помощью рядов Фурье;
- доказывать ограниченность линейных операторов и вычислять норму;
- продолжать линейный ограниченный функционал с одномерного подпространства плоскости на всю плоскость с сохранением нормы;

владеть:

- навыками письменной и устной коммуникации на математическом языке;
- терминологией и аппаратом функционального анализа, необходимыми

для изучения смежных дисциплин в процессе профессиональной подготовки, а также лежащими в основе фрактальных методов хранения и передачи информации и обосновании современных способов кодирования графической информации.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Введение. Предмет и основные методы дисциплины «Функциональный анализ», его современное состояние и связь с приложениями.

Раздел 1. Мера и интеграл Лебега

Тема 1.1. Мера.

Кольцо, алгебра, сигма-алгебра множеств, борелевская сигма-алгебра. Мера на алгебре. Условия счетной аддитивности меры. Внешняя мера. Основная теорема о продолжении (без доказательства). Свойства меры Лебега.

Тема 1.2. Измеримые функции.

Измеримые функции на пространстве с мерой и их свойства. Сходимость по мере и ее связь с другими типами сходимости.

Тема 1.3. Интеграл Лебега.

Простые функции. Свойства интеграла от простых функций. Общее понятие интеграла Лебега и его свойства. Пространство квадратично суммируемых функций. Теоремы о предельном переходе (формулировка).

Раздел 2. Нормированные векторные пространства

Тема 2.1. Метрические пространства, нормированные векторные пространства.

Примеры метрических пространств и метрик. Классические примеры нормированных пространств. Открытые и замкнутые множества в них. Предельные точки и точки прикосновения множества. Замыкание множества.

Тема 2.2. Сходимость в метрических и нормированных пространствах.

Свойства сходящихся последовательностей. Сходимость в пространствах непрерывных функций и пространстве дискретных бесконечных числовых последовательностей. Последовательность Коши и ее свойства. Эквивалентность норм. Пополнение, теорема о пополнении (без доказательства). Принцип вложенных шаров. Сепарабельные пространства, примеры.

Тема 2.3. Непрерывные отображения метрических пространств.

Непрерывные, равномерно непрерывные и отображения, удовлетворяющие условию Липшица. Сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений в полных метрических пространствах. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.

Тема 2.4. Компактность в метрических пространствах.

Свойства компактных подмножеств метрического пространства. Вполне ограниченность и теорема Хаусдорфа. Теорема Арцела (без доказательства). Непрерывные отображения на компактах. Лемма Рисса. Компактность и конечномерность.

Тема 2.5. Гильбертовы пространства.

Пространства со скалярным произведением, определение и примеры. Евклидовы, унитарные и гильбертовы пространства. Пространство квадратично суммируемых дискретных числовых последовательностей. Элемент наилучшей аппроксимации в гильбертовом пространстве и его связь с проекцией. Ортогональное разложение гильбертова пространства.

Тема 2.6. Ортонормированные системы и ряды Фурье.

Существование полной ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве. Аппроксимация рядами Фурье. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Элементы гармонического анализа.

Раздел 3. Линейные ограниченные операторы и функционалы

Тема 3.1. Линейные ограниченные операторы.

Определение и примеры линейных непрерывных операторов. Эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности для линейного оператора. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных непрерывных операторов и сходимость в нем. Полнота пространства линейных непрерывных операторов. Непрерывная обратимость оператора.

Тема 3.2. Линейные непрерывные функционалы.

Общий вид линейного ограниченного функционала в евклидовом и гильбертовом пространствах. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха о продолжение линейного ограниченного функционала и следствия из нее.

Тема 3.3. Сопряженные, самосопряженные и вполне непрерывные операторы.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, примеры и их свойства, применение. Операторы ортогонального проектирования. Определение вполне непрерывного оператора, примеры и свойства. Вполне непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах и их собственные векторы и собственные значения.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Мера и интеграл Лебега**	**6**			**6**			
1.1	Мера	2			2			опрос
1.2	Измеримые функции	2			2			опрос
1.3	Интеграл Лебега	2			2			коллоквиум
2	**Нормативные векторные пространства**	**18**			**18**		**4**	
2.1	Метрические пространства, нормированные векторные пространства.	6			8			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
2.2	Сходимость в метрических и нормированных пространствах.	2			2			проверка отчета по лабораторной работе
2.3	Непрерывные отображения метрических пространств.	4			2		2	типовой расчет
2.4	Компактность в метрических пространствах.	2			2			контрольная работа
2.5	Гильбертовы пространства.	2			2			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
2.6	Ортонормированные системы и ряды Фурье.	2			2		2	коллоквиум и типовой

								расчет
3	**Линейные ограниченные операторы и функционалы**	**10**			**6**			
3.1	Линейные ограниченные операторы.	4			2			Опрос, проверка отчета по лабораторной работе
3.2	Линейные непрерывные функционалы.	2			2			контрольная работа
3.3	Сопряженные, самосопряженные и вполне непрерывные операторы	4			2			доклад с презентацией

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антоневич, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907.

2. Дайняк, В. В. Банаховы пространства : методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб ; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2021. – 67 с. – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/275205.

3. Дайняк, В. В. Гильбертовы пространства и аппроксимация [Электронный ресурс] : методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб ; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – 52 с. – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/256668.

4. Дайняк, В. В. Метрические пространства [Электронный ресурс] : методические указания и задания к практическим занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" для студентов факультета прикладной математики и информатики / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб ; БГУ, ФПМИ, Кафедра компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/241306.

5. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 560 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/189430.

6. Чеб, Е. С. Функциональный анализ и интегральные уравнения [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», направление специальности: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)» / Е. С. Чеб ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. компьютерных технологий и систем. – Минск : БГУ, 2020. – https://elib.bsu.by/handle/123456789/244161.

Перечень дополнительной литературы

1. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-изд./ А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Мн.: БГУ, 2006. – 434 с.

2. Богачев, В.И. Действительный и функциональный анализ: Университетский курс/ В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – М.: РХД, 2009. – 724 с.

3. Гуревич, А.П. Сборник задач по функциональному анализу/ А.П. Гуревич, В.В. Корнев, А.П. Хромов. – М.: Изд-во «Лань», 2022. – 192 с.

4. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.

5. Дайняк, В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В. Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.

6. Канторович, Л.В. Функциональный анализ. 4-е изд., испр./ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – СПб.: BHV, 2017. – 816 с.

7. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа./А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2023. – 572 с.

8. Треногин, В.А. Функциональный анализ: в 2 т. Т 1./ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 240 с.

9. Треногин, В.А.Задачи и упражнения по функциональному анализу/ В.А.Треногин, Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 240 с.

10. Хелемский, А.Я. Лекции по функциональному анализу/ А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2009. – 304 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций в рамках учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы:

1. Устный опрос.
2. Отчет по лабораторной работе.
3. Коллоквиум.
4. Контрольная работа.
5. Типовой расчет.
6. Доклад с презентацией.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. В случае неявки на контрольное мероприятие по уважительной причине студент вправе по согласованию с преподавателем выполнить его в дополнительное время. Для студентов, получивших неудовлетворительные отметки за контрольные мероприятия, либо не явившихся по неуважительной причине, по согласованию с преподавателем и с разрешения заведующего кафедрой мероприятие может быть проведено повторно.

Оценка за лабораторную работу и типовой расчет включает:

- ответ (полнота ответа) – 30 %;
- выполнение индивидуального лабораторного задания – 70 %.

Коллоквиумы используются для обобщения и систематизации учебного материала. В коллоквиум включаются теоретический вопрос и решение практической задачи. При оценивании коллоквиума внимание обращается на:

- содержание и последовательность изложения теоретического вопроса – 30%;
- соответствие и полноту раскрытия вопроса – 30 %;
- грамотный научный подход к решению практической задачи – 40%.

Доклад с презентацией – самый эффективный способ донесения важной информации при публичных выступлениях. Слайд-презентации с использованием мультимедийного оборудования позволяют эффективно и наглядно представить содержание изучаемого материала, выделить и проиллюстрировать сообщение, которое несет поучительную информацию, показать ее ключевые содержательные пункты. Использование интерактивных элементов позволяет усилить эффективность публичных выступлений. Студентам предлагается подготовить в заключении изучения предмета доклад с презентацией по любой из изучаемых тем с элементами практического использования.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- проверка отчета по лабораторной работе – 20%.
- коллоквиум – 25%.
- проверка контрольной работы –40%.
- типовой расчет –15%.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40%, экзаменационной отметки – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.3. Непрерывные отображения метрических пространств. (2 ч.) Управляемая самостоятельная работы предполагает изучение учебного материала темы по основной и дополнительной литературе. Усвоение материала контролируется в выполненном типовом расчете на лабораторном занятии (4 задания, индивидуальные варианты заданий представлены в LMS Moodle).

Форма контроля – типовой расчет.

Тема 2.6. Ортонормированные системы и ряды Фурье. (2 ч.)

Управляемая самостоятельная работы предполагает изучение учебного материала темы по основной и дополнительной литературе. Усвоение материала контролируется в выполненном типовом расчете на лабораторном занятии (4 задания, индивидуальные варианты заданий представлены в LMS Moodle).

Форма контроля – типовой расчет.

Примерная тематика лабораторных занятий

Материалы к лабораторным занятиям с индивидуальными заданиями для каждого студента представлены в следующих материалах:

- Дайняк, В.В. Метрические пространства: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2020. – 52 с.
- Дайняк, В.В. Банаховы пространства: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2021. – 67 с.

- Дайняк, В.В. Гильбертовы пространства и аппроксимация: метод. указания и задания / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2020. – 82 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.1. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2013. – 52 с.
- Дайняк В.В. Линейные ограниченные операторы: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2015. – 56 с.
- Дайняк В.В.Теория меры. Интеграл Лебега: метод. указания и задания. В 2 ч. Ч.2. / В.В.Дайняк, Е.С. Чеб. – Минск: БГУ, 2001. – 70 с.

Занятие № 1. Мера на числовой прямой. Канторово множество и его мера.

Занятие № 2. Измеримые функции. Сходимость по мере.

Занятие № 3. Простые функции и интеграл Лебега.

Занятие № 4. Метрические пространства. Способы задания метрики.

Занятие № 5. Нормированные векторные пространства. Эквивалентные нормы.

Занятие № 6. Предел последовательности в нормированном и метрическом пространствах.

Занятие № 7. Открытые, замкнутые, ограниченные, выпуклые множества в нормированном пространстве.

Занятие № 8. Отображения в банаховых пространствах. Сжимающие отображения.

Занятие № 9. Метод последовательных приближений для решения нелинейных уравнений и СЛАУ.

Занятие № 10. Компактные множества в метрических пространствах.

Занятие № 11. Гильбертовы пространства. Вычисление проекции на подпространство.

Занятие № 12. Аппроксимация рядами Фурье по различным полным ортонормированным системам (тригонометрическая система, полиномы Лежандра, функции Хаара).

Занятие № 13. Линейные ограниченные операторы и их норма.

Занятие № 14. Норма линейного ограниченного функционала и его геометрический смысл. Продолжение линейного непрерывного функционала на плоскости.

Занятие № 15. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМОВ

1. Доказать, что в нормированном пространстве E открытый шар $B(0,r)$ – открытое множество.
2. Доказать, что для любых элементов $B(0,r)$ выполнено неравенство $\|x\| \le \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$.

3. Доказать, что алгебраическая сумма и объединение двух ограниченных множеств – ограниченное множество.
4. Пусть в пространстве со скалярным произведением H последовательности $x^{(n)}, y^{(n)} \in B[0,1]$ и $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x^{(n)} - y^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$.
5. Пусть M и N – такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Доказать, что $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.
6. В гильбертовом пространстве l_2 рассмотрим последовательность элементов $x^{(n)} = \left\{1, \frac{1}{2^n}, ..., \frac{1}{2^{in}}, ...\right\}$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2.
7. Пусть $A \subset E$ – замкнутое множество. Доказать, что $\rho(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.
8. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ множество $M^{\perp}$ является подпространством.
9. Пусть $A, B \subset E$ и $\overline{A} \subset \overline{B}$. Следует ли, что $A \subset B$? Ответ обоснуйте и приведите пример.
10. Доказать, что ортогональная система без нулевого элемента линейно независима в гильбертовом пространстве.
11. Доказать, что для любого множества $M \subset H$ в гильбертовом пространстве имеет место включение $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. Привести пример строгого включения.
12. Пусть $M \subset E$ выпуклое множество и $\lambda \in \Re$ – некоторое число. Доказать, что множество $\lambda M = \{x \in E : x = \lambda y, y \in M\}$ – выпукло. Будет ли множество всех выпуклых подмножеств пространства E векторным пространством?
13. Будет ли замыкание выпуклого множества $M \subset E$ в нормированном векторном пространстве E выпуклым множеством? Ответ обоснуйте.
14. Пусть $A, B \subset E$ – замкнутые множества и их пересечение $A \cap B$ пусто. Может ли расстояние $\rho(A, B) = 0$?
15. Пусть M и N – подпространства гильбертова пространства H и $M \perp N$. Доказать, что – $M + N$ подпространство в H.
16. Пусть $M, N \subset H$ и $H = M + N$. Верно ли, что $N = M^{\perp}$?
17. Пусть $M, N \subset H$ такие, что любой $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, $y \in M$, $z \in N$. Следует ли отсюда, что N и M – подпространства в H? Ответ обосновать.
18. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением выполнено равенство $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2$.

19. Доказать, что в унитарном пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x+\beta y\|^2=\|\alpha x\|^2+\|\beta y\|^2$ для любых $\alpha,\beta\in C$.
20. Доказать, что в пространстве нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства.
21. Пусть $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty},(y^{(n)})_{n=1}^{\infty}\subset E-$ фундаментальные последовательности. Доказать, что числовая последовательность $\lambda^{(n)}=\|x^{(n)}-y^{(n)}\|$ сходится.
22. Доказать, что если $f:E\to W$ непрерывно, то $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ для любого $A\subset E$.
23. Пусть множество $A\subset E$ фиксировано. Доказать, что функция $f(x)=\rho(x,A)$ непрерывно отображает E в $\Re$.
24. Образует ли в пространстве $C[a,b]$ подпространство множество многочленов степени не выше чем n?
25. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Доказать, что множество $\{t\in\Re: f(t)<1\}$ открыто на числовой прямой.
26. Пусть $A,B\subset E$ – произвольные множества в банаховом пространстве E. Доказать, что $\rho(A,B)=\rho(\overline{A},\overline{B})$.
27. Доказать, что множество $A\subset E$ является ограниченным тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x^{(n)}\in A$ и любой последовательности $\lambda^{(n)}\in C,\lambda^{(n)}\to 0,$ при $n\to\infty$ последовательность $\lambda^{(n)}x^{(n)}\to 0$ при $n\to\infty$.
28. Пусть $M,N\subset H$ – подпространства гильбертова пространства H и $M\perp N$. Доказать, что $M+N$ – подпространство в H.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа 1. (примерный вариант)

1. Вычислить меру множества на числовой прямой

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{80},\frac{1}{2^n}+\frac{1}{80}\right).$$

2. Вычислить интеграл Лебега на промежутке *[a, b]* от функции *f(x)*

$$\int_{[-3,3]} sign(\cos(\pi x))dx.$$

3. Найти предел последовательности в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$, если он существует

$$x_n(t)=\frac{2nt}{1+n^2t^2}.$$

4. Найти предел последовательности в пространстве бесконечных числовых последовательностей l_p, если он существует

$$x^{(n)}=\left(\frac{n^2}{n^2+1},\frac{2n^2}{4n^2+1},....,\frac{kn^2}{k^2n^2+1},...\right),\ p=2.$$

5. Является ли множество M равностепенно непрерывным в пространстве $C[0,1]$?

$$M=\left\{x(t)\in C^2[0,1]:|x(1)|\le 1,|x''(t)|\le 5, t\in[0,1]\right\}.$$

6. Выяснить, является ли отображение непрерывным равномерно непрерывным, удовлетворяющим условию Липшица, сжимающим.

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2},\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{3},...,\frac{1}{2^k}x_k+\frac{1}{2k+1},...\right),\ x\in l_2.$$

Контрольная работа 2. (примерный вариант)

1. Найти проекцию элемента $x_0=(0,2,2,1,0,0,...)\in\ell_2$ на подпространство

$$L=\left\{x\in\ell_2 : x_1-x_2=0,\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}=0\right\}.$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},x\in[0,2\pi]$.

3. Вычислить норму оператора $A: C[-1,1] \to L_2[0,5]$,

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} t^3 s x(s)\, ds.$$

4. Вычислить норму функционала в гильбертовом пространстве ℓ_2

$$f(x) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 + x_3}{2^2}, \ldots \right).$$

5. Показать, что к оператору *A* существует сопряженный и найти его в пространстве ℓ_2

$$Ax = (0, 2x_1, x_3 + 2x_4, x_4, x_5, \ldots).$$

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Функциональный анализ» используются современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале: комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, тесты, вопросы для самоконтроля, тематика рефератов и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Кольцо, алгебра, сигма-алгебра множеств, борелевская сигма-алгебра.
2. Мера на алгебре и ее свойства. Счетно-аддитивная мера.
3. Внешняя мера. Основная теорема о продолжении меры.

4. Измеримые функции и их свойства. Сходимость по мере.
5. Простые функции и их интеграл. Определение интеграла Лебега в общем случае.
6. Метрические пространства. Способы задания расстояния. Прикладные задачи и способы задания метрики.
7. Нормированные векторные пространства. Примеры. Свойства нормы. Эквивалентные нормы. Теорема об эквивалентных нормах в конечномерных пространствах.
8. Неравенства Гельдера, Юнга, Минковского. Пространство $CL_p[a,b]$, ℓ_p. $p \geq 1$.
9. Открытые, замкнутые, ограниченные и выпуклые множества в нормированных векторных пространствах и их свойства. Примеры.
10. Внутренние, внешние, граничные и предельные точки. Примеры. Теорема о замкнутом множестве. Всюду плотные и нигде не плотные множества.
11. Предел последовательности в нормированном и метрическом пространствах. Свойства предела. Теорема о точке прикосновения.
12. Полные метрические и банаховы пространства. Примеры. Принцип вложенных шаров.
13. Пополнение нормированных векторных пространств.
14. Компактные множества в нормированных пространствах. Критерий компактности Хаусдорфа.
15. Предкомпактные множества в метрических пространствах. Теорема Арцела.
16. Лемма о почти перпендикуляре. Критерий конечномерности нормированного пространства.
17. Отображения в нормированных пространствах. Теорема о непрерывном отображении, непрерывность композиции отображений.
18. Сжимающие отображения. Теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Локальный принцип сжимающих отображений.
19. Применение принципа сжимающих отображений в линейной алгебре.
20. Предгильбертовы пространства. Свойства скалярного произведения. Примеры.
21. Гильбертовы пространства. Примеры. Теорема об элементе наилучшей аппроксимации.
22. Ортогональное дополнение. Теорема о проекции. Ортогональное разложение гильбертова пространства в прямую сумму.
23. Ортогональные системы и ряды Фурье в гильбертовых пространствах. Теорема о разложении в ряд Фурье. Экстремальное свойство отрезка ряда Фурье. Аппроксимация рядами Фурье.
24. Полные ортонормированные системы в гильбертовом пространстве и их существование. Примеры полных ортонормированных систем в конкретных пространствах. Изоморфизм гильбертовых пространств.
25. Линейные ограниченные операторы. Ограниченность и непрерывность. Примеры линейных ограниченных операторов.

26. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота. Равномерная и сильная сходимость в пространстве $B(X,Y)$. Примеры.
27. Обратные операторы. Непрерывная обратимость оператора. Левый и правый обратные операторы и разрешимость уравнения $Ax=y$.
28. Терема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.
29. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала. Следствия из теоремы Хана-Банаха.
30. Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Свойства операции сопряжения.
31. Самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, его норма и свойства.
32. Операторы ортогонального проектирования и их свойства.
33. Пространство вполне непрерывных операторов. Примеры.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Численные методы	Вычислительной математики	нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 14 от 23.05.2023)
Методы оптимизации	Методов оптимального управления	нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 14 от 23.05.2023)
Теория вероятностей и математическая статистика	Теории вероятностей и математической статистики	нет	Внесение изменений не требуется (протокол № 14 от 23.05.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от _______ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________