

ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ: ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ю. В. Зиняков

*студент факультета экономики, Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород,
Россия, e-mail: yuzinyakov@gmail.com*

Научный руководитель: О. В. Капитанова

*кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического
моделирования экономических процессов Института экономики
и предпринимательства, Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия, e-mail: kapitanova@iee.unn.ru*

В работе представлены результаты построения производственной функции с постоянной эластичностью замещения (CES-функция) для стран мира на основе статистических данных Penn World Table 10.01. Основной сложностью моделирования является невозможность применения обычного метода наименьших квадратов, что преодолевается путем разложения функции в ряд Тейлора (алгоритм, предложенный Я. Кментой). В итоге получены адекватные спецификации для 12 стран.

Ключевые слова: производственная функция с постоянной эластичностью замещения; CES-функция; экономический рост.

PRODUCTION FUNCTION WITH CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION: AN EMPIRICAL ANALYSIS

Yu. V. Zinyakov

*Student of the Faculty of Economics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod,
Russia, e-mail: yuzinyakov@gmail.com*

Supervisor: O. V. Kapitanova

*PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department
of Mathematical Modeling of Economic Processes, Institute of Economics
and Entrepreneurship, Lobachevsky Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod,
Russia, e-mail: kapitanova@iee.unn.ru*

The paper presents the results of modelling a production function with a constant elasticity of substitution (CES function) for the countries of the world based on statistical data from Penn World Table 10.01. The main difficulty of modeling is the impossibility of

using the usual least squares method, which is overcome by decomposing the function into a Taylor series (the algorithm proposed by J. Kmenta). As a result, adequate specifications were obtained for 12 countries.

Keywords: production function with constant elasticity of substitution; CES function; economic growth.

Задача определения ключевых факторов экономического роста не теряет своей актуальности уже многие годы. Накопленная статистика позволяет больше внимания уделить не только отбору новых факторов, но и поиску наиболее адекватной спецификации производственной функции.

Наиболее популярным видом производственной функции для эмпирического исследования экономического роста является функция Кобба-Дугласа в силу своей структурной простоты, а также того факта, что логарифмизация позволяет перейти к аддитивному виду и при построении эконометрической модели использовать обыкновенный метод наименьших квадратов.

Однако анализ литературы (например, [2]) показывает, что существует большое количество критических замечаний в адрес производственной функции Кобба-Дугласа, в связи с чем появляется все больше работ (например, [1]), в которых для моделирования зависимости выпуска от факторов производства применяется производственная функция с постоянной эластичностью замещения (CES-функция). Эта спецификация позволяет преодолеть необходимость ограничения на сумму эластичностей выпуска по капиталу и труду (равна единице), тогда как постоянная отдача от масштаба на практике наблюдается достаточно редко и большинство стран имеют либо возрастающую (для развивающихся), либо убывающую (для развитых) отдачу от масштаба.

Производственная функция с постоянной эластичностью замещения не предполагает выполнение такого условия. В ней постоянна эластичность замещения фактора затрат труда фактором затрат капитала ($\sigma = \text{const}$), а степень однородности может быть любой положительной ($n > 0$):

$$Y = A(uK^{-\rho} + (1 - u)L^{-\rho})^{-\frac{n}{\rho}}.$$

Здесь $\rho \geq -1$; $n > 0$ – степень однородности; $A > 0$; $0 < u < 1$. Эластичность замещения для заданной функции равна $\frac{1}{1+\rho}$. Если $\rho \rightarrow 0$, то в пределе получится производственная функция Кобба-Дугласа с $\sigma = 1$.

Основная сложность оценки параметров на основе статистических данных для рассматриваемой спецификации в том, что ее логарифмирование не приводит к линейной зависимости. Поэтому применение линейного метода наименьших квадратов невозможно.

$$\ln Y = \ln A - \frac{n}{\rho} \ln(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho})$$

Одним из возможных путей решения данной проблемы является алгоритм, предложенный Я.Кментой [3], когда данное выражение раскладывается в ряд Тейлора второго порядка в окрестностях $\rho = 0$:

$$\ln Y = \ln A + nu \cdot \ln K + n(1-u) \ln L - \frac{1}{2} \rho nu(1-u)(\ln K - \ln L)^2 + \varepsilon$$

Эта аппроксимация состоит из двух частей. Первые три слагаемых отвечают за модификацию производственной функции Кобба-Дугласа с поправкой на удаленность ρ от 0. Четвертое же слагаемое «отвечает» за расширение этой спецификации до CES-функции. Величина ошибки зависит от того, насколько ρ далеко от 0. Коэффициенты данного уравнения могут быть оценены с помощью метода наименьших квадратов.

В рамках данного исследования была выполнена оценка параметров производственных функций с постоянной эластичностью замещения для стран мира. Для анализа использовались статистические данные Penn World Table 10.01 [4]. Изначально в наборе присутствовало 183 страны, однако после отбора данных и удаления пропусков осталось 180 стран.

Были оценены регрессионные модели, после чего отобраны те, которые значимы в целом по критерию Фишера, и в которых значимы константа и все коэффициенты при переменных. Затем были восстановлены эмпирические значения коэффициентов CES-функции и отобраны модели, для которых выполняются модельные ограничения ($\rho \geq -1; n > 0; 0 < u < 1; A > 0$). В результате было получено 12 стран, для которых адекватна рассматриваемая спецификация: Австралия, Австрия, Швейцария, Китай, Германия, Франция, Гватемала, Япония, Сент-Люсия, Мальта, Малайзия и Парагвай.

Небольшое количество адекватных результатов в первую очередь связано с тем, что в течение рассматриваемого периода (около 70 лет) у большинства стран данные являются немонотонными. Поэтому улучшение результатов может наблюдаться увеличением доступного горизонта моделирования. Также существует необходимость поиска других, более уместных форм спецификаций для остальных стран, что и является целью дальнейшей работы. Также представляется целесообразным рассмотреть другие алгоритмы подбора параметров для спецификации про-

изводственной функции с постоянной эластичностью замещения. Например, нелинейную оптимизацию.

Библиографические ссылки

1. Сокол Г. А., Кутышкин А. В., Петров А. А. Об использовании производственных функций для моделирования функционирования региональной экономики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2017. № 4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ob-ispolzovanii-proizvodstvennyh-funktsiy-dlya-modelirovaniya-funktsionirovaniya-regionalnoy-ekonomiki> (дата обращения: 10.09.2023).

2. Юсим В. Н., Филиппов В. С. Производственная функция Кобба-Дугласа и управление экономико-технологическим развитием // Вестник РЭА им. Г. В. Плеханова. 2018. № 2(98). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/proizvodstvennaya-funktsiya-kobba-duglasa-i-upravlenie-ekonomiko-tehnologich-eskim-razvitiem> (дата обращения: 10.09.2023).

3. Kmenta J. On Estimation of the CES Production Function // International Economic Review. 1967. Vol. 8, № 2. P. 180–189. DOI: 10.2307/2525600.

4. Penn World Table version 10.01. [Электронный ресурс] // URL: <https://www.rug.nl/ggdc/productivity/pwt/?lang=en> (дата обращения: 21.05.2023).