УДК 517.929, 519.862

МОДЕЛЬ ХАРРОДА-ДОМАРА С ДИСКРЕТНЫМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В. В. Салеев

студент экономического факультета, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия, e-mail: butek.6atek@gmail.com

Научный руководитель: **М. В. Мулюков**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия, e-mail: mulykoff@gmail.com

Работа посвящена модификации модели экономического роста Харрода-Домара посредством введения дискретного запаздывающего аргумента для моделирования эффекта последействия между вводом инвестиций и увеличением конечного продукта. Показано, что положение равновесия данной модели асимптотически устойчиво. Предложенная модель может быть использована для описания экономической динамики как валового внутреннего продукта государства, так и валового регионального продукта его субъектов.

Ключевые слова: модель Харрода-Домара; дифференциальные уравнения с запаздывающим дискретным аргументом; асимптотическая устойчивость; гибридные системы функционально-дифференциальных уравнений; экономический рост.

HARROD-DOMAR MODEL WITH DESCRET DELAY ARGUMENT

V. V. Saleev

Student of the Faculty of Economics, Perm State University, Perm, Russia, e-mail: butek.6atek@gmail.com

Supervisor: **M. V. Mulyukov**

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University, Perm, Russia, e-mail: mulykoff@gmail.com

The work is devoted to modification of the Harrod-Domar model of economic growth. We introduce a discrete delay argument to model the aftereffect between the input of investments and the increase in the final product. It is shown that the equilibrium position of this model is asymptotically stable. The proposed model can be used to describe the economic dynamics of the gross domestic product of the state and the gross regional product of its subjects.

Keywords: Harrod-Domar model; differential equations with a retarded discrete argument; asymptotic stability; hybrid systems of functional differential equations; economic growth.

Гибридные системы функционально-дифференциальных уравнений – это системы, состояние которых описывается переменными, которые являются функциями как непрерывного, так и дискретного времени. Такие системы возникают в моделях экономической динамики, в которых, с одной стороны, экономические показатели непрерывны, с другой результаты их наблюдения доступны дискретно по времени, а также управленческие решения принимаются регулярно через равные промежутки времени [1].

В моделях экономической динамики используются инерционные и постоянные запаздывания между входными и выходными процессами. В работе [2] предлагается использовать уравнения с дискретным запаздывающим аргументом, что эквивалентно построению гибридной системы.

Модель Харрода-Домара описывает рост односекторной экономики при следующих предположениях:

1) капитал рассматривается в качестве единственного фактора роста; все прочие факторы (преобразования в производстве, повышение занятости и уровень использования оборудования и т. д.) не берутся в расчет;

2) коэффициенты капиталоемкости и склонности к сбережению являются постоянными;

3) инвестиции мгновенно индуцируют рост капитала.

Последнее предположение означает, что классическая модель Харрода-Домара не учитывает предысторию экономических процессов. В работе [3] исследована модифицированная модель, учитывающая постоянное запаздывание между введением инвестиций и ростом капитала.

В настоящей работе рассматривается иная модификация модели Харрода-Домара: предлагается рассмотреть гибридную систему функционально-дифференциальных уравнений для моделирования экономического роста, заменив предположение 3) на следующее:

4) решение об инвестировании принимается дискретно через равные промежутки времени, влияя на рост капитала в текущем временном интервале.

Рассмотрим следующие функции непрерывного времени t:

$Y = Y(t)$ – конечный продукт; $C = C(t)$ – непроизводственное потребление; $I = I(t)$ – инвестиции в конечный продукт.

Величина Y допускает измерение через равные промежутки времени длиной T; последовательность этих значений обозначим через $\{Y_n\}$.

Рассмотрим следующую гибридную систему:

$$\begin{cases} Y(t) = C(t) + I(t), \\ B(I(t) + \bar{I}) = TY'(t) + Y_n \text{ при } t \in [n, n+1), \\ C(t) = cY(t) + \bar{C}, \\ Y_n = Y(Tn), \end{cases} \tag{1}$$

где $c \in (0;1)$ – предельная склонность к потреблению; B – положительный коэффициент капиталоёмкости. Через $\bar{I}$ и $\bar{C}$ обозначены автономные инвестиции и автономное потребление соответственно.

Исключив переменные I, C, Y_n сведём гибридную систему (1) к уравнению с дискретным запаздывающим аргументом:

$$\frac{T}{B} Y'(t) - (1 - c)Y(t) + \frac{1}{B} Y\left(\left[\frac{t}{T}\right] T\right) = \bar{I} - \bar{C}, \tag{2}$$

где через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Пусть $B(1 - c) \neq 1$. Масштабируем ось времени заменой переменных $\tau = t/T$ и исключим правую часть заменой $y(\tau) = Y(t) - \frac{\bar{C} - \bar{I}}{1 - c - B^{-1}}$. Тогда уравнение (2) принимает вид: $y'(\tau) = (1 - c)By(\tau) - y([\,\tau])$.

Можно показать [4], что $\lim\limits_{\tau \to \infty} y(\tau) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{t \to \infty} Y(t) = \frac{\bar{C} - \bar{I}}{1 - c - B^{-1}}$.

Иными словами, положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво.

Библиографические ссылки

1. *Козлов Р. И., Козлова О. Р.* Исследование устойчивости непрерывно-дискретных моделей экономической динамики методом ВФЛ. I // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 104–113.

2. *Симонов П. М.* Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2014. № 1(20). С 14–27.

3. *Мулюков М. В., Салеев В. В.* Модель Харрода-Домара с запаздыванием // Экономика и управление: актуальные проблемы и поиск путей решения: материалы российской научно-практической конференции молодых ученых и студентов, г. Пермь, ПГНИУ, 19–21 апреля 2023 г.) / редкол.: А.М. Ощепков [и др.]. Пермь : издательство Пермского государственного национального исследовательского университета, 2023. С. 239–246.

4. *Mulyukov M.* The asymptotic stability of the simplest hybrid systems // Functional Differential Equations. 2023. No. 1-2(30). P. 77–86.