Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теории функций

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
____________________ Бровка Н.В.	____________________ Босяков С.М.
«07» сентября 2023г.	«21» сентября 2023г.

Математический анализ

Электронный учебно-методический комплекс для специальностей:
6-05-0533-06 «Математика»,
6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки»,
6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ»,
6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование»

Регистрационный № 2.4.2-24/407

Авторы:
Бровка Н.В., доктор педагогических наук, профессор;
Кротов В.Г., доктор физико-математических наук, профессор;
Бондарев С.А., кандидат физико-математических наук;
Васильев И.Л., кандидат физико-математических наук, доцент;
Мардвилко Т.С., кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 18.01.2024 г., протокол № 5.

Минск 2023

УДК 517(075.8)
М 34

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 5 от 18.01.2024 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 1 от 21.09.2023 г.

А в т о р ы:

Бровка Наталья Владимировна, доктор педагогических наук, заведующий кафедры теории функции механико-математического факультета БГУ,

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функции механико-математического факультета БГУ,

Бондарев Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функции механико-математического факультета БГУ,

Васильев Игорь Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функции механико-математического факультета БГУ,

Мардвилко Татьяна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функции механико-математического факультета БГУ.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка (заведующий кафедрой Гриб Н.В., кандидат физико-математических наук, доцент);

Антоневич А.Б., профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

Математический анализ : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / Н.В. Бровка [и др.] ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. теории функций. – Минск : БГУ, 2023. – 380 с. : ил. – Библиогр.: с. 379–380.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». В ЭУМК содержатся лекционный материал, практический материал, раздел контроля знаний и вспомогательный материал.

Оглавление

Пояснительная записка

Дисциплина «Математический анализ» является базовой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление». При изучении математического анализа студенты знакомятся с основами дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Основные понятия дифференциального и интегрального исчисления являются базовыми для освоения указанных выше математических дисциплин.

Элементы теории предела и дифференциального исчисления используются при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». Базовые конструкции интегрального исчисления используются при решении интегральных уравнений в рамках изучения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения», при создании вариационных принципов в задачах математической физики (дисциплина «Уравнения математической физики»), при изучении геометрии гладких поверхностей в рамках дисциплины «Дифференциальная геометрия», при построении необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах оптимизации (дисциплина «Экстремальные задачи и вариационное исчисление и методы оптимизации»).

Основными методами изучения дисциплины «Математический анализ» являются освоение теоретических знаний на базе лекционного курса, а также самостоятельная проработка студентами теоретического материала. Контроль освоения теоретического материала проводится в форме экзаменов, коллоквиумов, самостоятельных работ и опросов на практических и лабораторных занятиях.

Методы привития студентам практических навыков использования теоретических результатов при решении различных задач и упражнений отрабатываются на практических и лабораторных занятиях, а также в форме самостоятельной работы студентов. Контроль освоения практических навыков осуществляется во время практических и лабораторных занятий в форме проверки домашних заданий, компьютерного тестирования, а также на контрольных работах и зачетах.

Цель дисциплины "Математический анализ": создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математический анализ»:

– формирование у студентов понятий числа;

– изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;

– изучение основ дифференциального исчисления, использование элементов дифференциального исчисления при решении экстремальных задач и других задач современной математики;

– использование основ интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

В результате изучения дисциплины обучаемый должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

– новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки основ дифференциального и интегрального исчисления в математике.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) преследует цель оказать посильную помощь студентам в усвоении учебного и нормативного материала, сориентировать в подборе специальной литературы для подготовки к практическим и лабораторным (семинарским) занятиям, направить на развитие навыков самостоятельного решения практических задач.

Содержание тем ЭУМК структурировано с учетом вопросов, рассматриваемых на лекционных занятиях и соответствует учебным программам для высших учебных заведений по дисциплине «Математический анализ» для специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-07 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование».

В ЭУМК имеются следующие разделы: лекционный материал, практический материал, раздел контроля знаний и вспомогательный материал. Лекционный материал основан на курсе лекций профессора кафедры теории функций В.Г. Кротова, являющимся одним из основных лекционных курсов, по которому студенты механико-математического факультета БГУ изучают математический анализ. Практический материал представлен примерами типовых заданий, которые должен уметь решать студент по каждой из рассматриваемых тем. Этот материал разбит на 18 разделов: «Введение в анализ», «Предел последовательности», «Предел функции», «Предел и непрерывность функции», «Производная», «Применение дифференциального исчисления», «Исследование функций и построение графиков», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Приложения определенного интеграла», «Предел и непрерывность функций многих переменных», «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Дифференцируемые векторные функции», «Числовые ряды», «Функциональные последовательности и ряды», «Степенные ряды», «Ряды Фурье». Мы не рассматриваем здесь задачи с решениями, так как преподавателями кафедры теории функций за последние несколько лет разработаны и опубликованы пособия для ведения практических занятий. Мы приводим эти пособия в списке рекомендуемой литературы. В разделе контроль знаний приводятся примерные перечни вопросов к коллоквиумам и экзаменам. Вспомогательный материал состоит из списков рекомендуемой литературы: основной и дополнительной.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Введение в математику

1.1.1. Введение в математическую логику

Высказывания и операции над ними

Высказыванием будем называть любое повествовательное предложение, которому может быть приписано значение истинности, т. е. известно, ложно оно или истинно.

Значением истинности высказывания P называется число[1]

$$\alpha(P) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad P \quad \text{истинно,} \\ 0, & \text{если} \quad P \quad \text{ложно.} \end{cases}$$

Определение 1.1. ***Отрицанием*** *высказывания P называется высказывание $\overline{P}$ (читается «не P»), истинное тогда и только тогда, когда P ложно.*

Определение 1.2. ***Дизъюнкцией*** *(логическим сложением) высказываний P и Q называется высказывание $P \vee Q$ (читается «P или Q»), ложное тогда и только тогда, когда ложны и P, и Q.*

Определение 1.3. ***Конъюнкцией*** *(логическим умножением) высказываний P и Q называется высказывание $P \wedge Q$ (читается «P и Q»), истинное тогда и только тогда, когда истинны и P, и Q.*

Определение 1.4. ***Импликацией*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \implies Q$ (читается «из P следует Q»), ложное тогда и только тогда, когда P истинно, а Q ложно.*

Определение 1.5. ***Эквивалентостью*** *высказываний P и Q и называется высказывание $P \iff Q$ (читается «P равносильно Q»), истинное тогда и только тогда, когда P и Q имеют одинаковые значения истинности.*

Удобно определять также эти операции над высказываниями с помощью так называемой таблицы истинности:

[1] Здесь и далее знак «:=» читается как «обозначим».

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

С помощью операций, исходя из простейших высказываний, можно строить новые более сложные высказывания, называемые формулами, например $(P \vee Q) \Longleftrightarrow R$. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний P, Q, R, будем называть их **высказывательными переменными**. **Формулами алгебры высказываний** являются:

1) любая высказывательная переменная;

2) если F_1 и F_2 — формулы, то $\overline{F}_1$, $F_1 \wedge F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Longrightarrow F_2$ также являются формулами.

Другими словами, любая формула может быть получена из высказывательных переменных с помощью операций за конечное число шагов.

Логические законы (тавтологии)

Определение 1.6. ***Логическим законом*** *или* ***тавтологией*** *называется любая формула алгебры высказываний, значение истинности которой равно 1 при любых значениях истинности высказывательных переменных, входящих в нее.*

С одной стороны, тавтологии позволяют строить истинные высказывания независимо от истинности высказываний, входящих в них. С другой стороны, и это особенно важно, они могут давать правильные способы умозаключений. Приведем примеры простейших и в то же время важнейших тавтологий.

Упражнение 1.1. Доказать, что следующие высказывания являются логическими законами:

a) $P \vee \overline{P}$ (закон исключенного третьего),
b) $\overline{P \wedge \overline{P}}$ (закон непротиворечивости),
c) $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P$ (правило двойного отрицания),
d) $P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$ (коммутативность дизъюнкции),
e) $P \vee (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \vee R$ (ассоциативность дизъюнкции),
f) $P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$ (коммутативность конъюнкции),
g) $P \wedge (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$ (ассоциативность конъюнкции),
h) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции),
i) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции),

j) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$ (правило Де Моргана),
k) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ (правило Де Моргана),
l) $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ (транзитивность импликации),
m) $(P \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow Q$,
n) $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}\right)$ (закон контрапозиции).

Упражнение 1.2. Пусть $A \Longrightarrow B$ — истинное высказывание. Найти значения истинности следующих высказываний: $\overline{A} \Longrightarrow B$, $A \Longrightarrow \overline{B}$, $\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}$, $B \Longrightarrow A$, $\overline{B} \Longrightarrow A$, $B \Longrightarrow \overline{A}$, $\overline{B} \Longrightarrow \overline{A}$.

Теоремы

Под математической теоремой обычно понимают утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Математические теоремы имеют форму импликации

$$P \Longrightarrow Q, \tag{1.1}$$

в которой высказывание P предполагается истинным, тогда согласно таблице истинности импликации теорема (1.1) истинна только в том случае, когда истинно и Q. А за значком импликации «$\Longrightarrow$» скрывается процесс доказательства, позволяющий вывести истинность Q из истинности P.

При этом P называется **условием** теоремы, а Q — ее **утверждением** (или заключением).

Если теорема (1.1) истинна, то говорят, что Q является **необходимым** условием для P, а P — **достаточным** для Q.

С теоремой (1.1) можно связать еще три высказывания:

1) $Q \Longrightarrow P$ — **обратная** теорема;
2) $\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q}$ — **противоположная** теорема;
3) $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$ — теорема, **обратная противоположной**.

Упражнение 1.3. 1) Выделите условие и заключение:
а) в теореме Пифагора;
б) в признаке делимости на 3;
в) в теореме о трех перпендикулярах;
г) в теореме Виета.

2) Сформулируйте обратную, противоположную и обратную к противоположной к теоремам из предыдущего пункта.

3) Является ли необходимым или достаточным условием:

а) отсутствие четных делителей у целого числа для его простоты;

б) четность одного из двух целых чисел и делимость на 3 другого для делимости их произведения на 6;

в) равноудаленность точек множества на плоскости (в пространстве) от фиксированной точки для того, чтобы это множество было окружностью;

г) положительность дискриминанта для существования корня у квадратного трехчлена;

д) совпадение двух пар чисел для совпадения их средних арифметических (средних геометрических)?

Из тавтологии 14) в упражнении 1.1 следует, что теорема и обратная противоположной ей равносильны.

Справедлив следующий логический закон:

$$\big((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)\big) \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q).$$

Поэтому если верны обе теоремы

$$P \Longrightarrow Q \quad \text{и} \quad Q \Longrightarrow P,$$

то их утверждения объединяют в форме эквивалентности $P \Longleftrightarrow Q$, которая называется **критерием**. В таком случае говорят также, что:

а) P равносильно Q;

б) Q есть необходимое и достаточное условие для P;

в) P верно тогда и только тогда, когда верно Q;

г) Q есть характеристическое свойство для P.

Упражнение 1.4. 1) Какие из следующих теорем допускают обращение: теорема Пифагора, признак делимости на 3, теорема о трех перпендикулярах, теорема Виета?

2) Сформулировать признаки параллелограмма и выяснить, какие из них являются характеристическими.

3) Какое свойство ромба является характеристическим?

Иногда критерий может иметь более сложную форму, например «утверждения P_1, P_2, ..., P_n равносильны». В таком случае удобно доказывать критерий по «круговой» схеме

$$P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P_n \Longrightarrow P_1.$$

Доказательство от противного

Рассмотрим тавтологию

$$\big((\overline{P} \Longrightarrow Q) \wedge (\overline{P} \Longrightarrow \overline{Q})\big) \Longrightarrow P$$

(проверьте самостоятельно, что это — действительно тавтология).

Она является весьма важной, так как выражает часто встречающийся метод доказательства от противного. Опишем этот метод.

Пусть необходимо доказать некоторое утверждение P. Предположим, что оно ложно, тогда истинно $\overline{P}$ (это — предположение «от противного»).

Пусть имеется также некоторое заведомо истинное высказывание Q, а в результате логически правильного рассуждения удается установить, что из $\overline{P}$ следует $\overline{Q}$.

Таким образом, истинны Q и $\overline{Q}$, поэтому истинно и $Q \wedge \overline{Q}$, что невозможно в силу тавтологии 2) из упражнения 1.1. Следовательно, нужно признать, что предположение о ложности P было неверным.

Ярким примером доказательства от противного может служить доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел: если предположить, что $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа, то число $p = p_1 \cdots p_n + 1$ является составным и делится на какое-то из p_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда и число $1 = p - p_1 \cdots p_n$ — составное, так как делится на то же самое p_k.

Здесь P — высказывание «множество простых чисел бесконечно», а Q — «1 делится только на себя».

Предикаты и кванторы

Предикатом (одноместным) называется высказывание $P(x)$, зависящее от некоторого параметра x, принадлежащего некоторому множеству X. Значение истинности предиката зависит от выбранного значения параметра и не обязано быть одинаковым для всех $x \in X$. Множество всех $x \in X$, для которых истинно $P(x)$, называется **множеством истинности** предиката $P(x)$.

Квантором общности называется высказывание

$$\forall x \in X \quad P(x)$$

(читается «для любого $x \in X$ истинно $P(x)$»), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ совпадает с X.

Квантором существования называется высказывание

$$\exists x \in X \quad P(x)$$

(читается «существует $x \in X$, для которого истинно $P(x)$»), истинное в точности тогда, когда множество истинности предиката $P(x)$ непусто.

Кванторы важны в математической логике. Кроме того, они дают возможность превращать обычные тексты в формальные. С одной стороны, это приводит к более удобным и компактным записям, а с другой — применение кванторных записей позволяет проще исследовать смысл текста и избегать многих ошибок.

Для некоторых часто встречающихся в математике кванторных записей в разговорной речи часто используют сложившиеся словосочетания. Приведем два примера, в которых $P(n)$ — некоторое свойство, зависящее от натурального параметра n.

Запись

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n > m \quad P(n)$$

может быть прочитана так: свойство $P(n)$ выполнено для бесконечно многих значений n. Запись

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > m \quad P(n)$$

может быть прочитана так: свойство $P(n)$ выполнено для всех достаточно больших значений n.

Еще один важный пример — запись

$$\bigl[\exists\, x \in X \quad P(x)\bigr] \wedge \bigl[\forall\, y \in X \quad (P(y) \Rightarrow y = x)\bigr]$$

означает, что найдется объект x, обладающий свойством P, и такой, что если y — любой объект, обладающий свойством P, то $y = x$, т. е. существует, и притом единственный, объект x, обладающий свойством P. Обычно это высказывание записывают в виде $\exists\,!\, x \in X\ P(x)$, и далее будем использовать такое сокращение.

Упражнение 1.5. Сформулировать в кванторах следующие высказывания:

1) для любого элемента a множества A справедливо высказывание $P(a)$;

2) любая точка на серединном перпендикуляре к отрезку равноудалена от его концов;

3) если A не является подмножеством множества B, то найдется элемент $a \in A$, не принадлежащий B.

Непосредственно из определений кванторов общности и существования вытекают следующие **правила отрицания кванторов**:

$$\overline{\forall\, x \in X \quad P(x)} \Longleftrightarrow \exists\, x \in X \quad \overline{P(x)};$$

$$\overline{\exists\, x \in X \quad P(x)} \Longleftrightarrow \forall\, x \in X \quad \overline{P(x)}.$$

Подчеркнем, что в кванторной записи однотипные кванторы, идущие подряд, можно записывать в любом порядке.

Порядок следования различных кванторов важен — его нельзя менять, так как иначе изменится смысл высказывания. Поясним это на примере.

Рассмотрим высказывание «для любого натурального числа n существует натуральное число $m > n$», или

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \quad m > n.$$

Поменяем здесь порядок следования кванторов:

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad m > n.$$

Полученное высказывание, разумеется, ложно, хотя предыдущее — истинно.

Отметим также, что в математике принято следующее соглашение: если в кванторной записи для некоторых переменных отсутствуют кванторы, то по умолчанию считается, что эти переменные расположены в начале кванторной записи под кванторами общности.

1.1.2. Основные понятия теории множеств

Понятие множества

Множество — это одно из основных первичных математических понятий. Оно не определяется, можно дать лишь его описание. Синонимами термина «множество» являются «набор», «семейство», «класс», «коллекция», «совокупность» и т. д.

По словам Г. Кантора (создатель теории множеств и основатель теоретико-множественного языка в математике), под множеством мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли.

Это описание не может служить, конечно, определением множества, так как оно использует другие понятия, которые не определены. Его цель — дать разъяснения этому термину.

Ситуация, когда понятие «множество» не определяется, математиков не устраивает. Поэтому в математической логике в противовес такому широкому толкованию множества это понятие формализуют, т. е. определяют аксиоматически посредством системы аксиом.

Объекты, составляющие множество, называют его **элементами**. Задать множество — это значит указать правило, по которому можно отличить его элементы от объектов, ему не принадлежащих. Запись $x \in X$ будет всегда означать, что x является элементом множества X, а запись $x \notin X$ означает, что x не является элементом X.

Рассмотрим наиболее употребительные способы задания множества.

1) **Перечисление** элементов, например, запись

$$X = \{a, b, c\}$$

означает, что множество состоит из элементов a, b, c. Другими словами, здесь явно указываются все элементы множества.

Чаще всего этот способ употребляется для так называемых конечных множеств.

2) **Индексация** элементов множества — это способ перечисления элементов множества с помощью элементов некоторого другого множества[1]

$$X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}.$$

[1] Этот способ задания множества лучше воспринимается после того, как введено понятие функции (см. определение 1.19) — здесь неявно предполагается, что задана функция $\alpha \mapsto x_\alpha$, $\alpha \in A$.

Здесь множество A называется **множеством индексов**.

3) **Определение по свойству** применяется тогда, когда имеется некоторое свойство P, которым обладают элементы множества, а объекты, не являющиеся его элементами, этим свойством не обладают. В таком случае используется запись

$$X = \{x : x \text{ обладает свойством } P\},$$

а P называется **характеристическим свойством** для множества X.

Данный способ — наиболее распространенный и служит источником построения разнообразных примеров, используемых в математике.

Парадоксы теории множеств

Отметим, что столь широкое толкование множества (по Кантору) является внутренне противоречивым. Наиболее известной иллюстрацией этому служит следующий парадокс.

Парадокс Рассела. Пусть M — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента.

Тогда, с одной стороны, если $M \in M$, то M не содержит себя в качестве элемента и должно быть $M \notin M$. С другой стороны, если $M \notin M$, то M содержит себя в качестве элемента, т. е. $M \in M$. Таким образом, здесь мы имеем дело с противоречивым множеством.

Чтобы не пользоваться такими противоречивыми множествами, будем считать, что все множества, изначально рассматриваемые в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, которое называется универсальным множеством для данной теории.

Примерами могут служить множество натуральных чисел в арифметике, множество действительных чисел в математическом анализе, множество комплексных чисел в теории аналитических функций и т. д.

При этом в процессе развития теории универсальное множество может расширяться. Но всегда в каждой конкретной ситуации это универсальное множество будет указываться вполне конкретно, если его выбор неясен из контекста.

На этой базе будем строить другие множества, используя понятие подмножества, а также операции над множествами, которые будут рассматриваться далее.

Чтобы избежать противоречий, аналогичных парадоксу Рассела, в теории множеств (как и в других разделах математики) применяется аксиоматический метод построения теории. Этот метод будет рассмотрен несколько позже при изучении множества действительных чисел. При первичном ознакомлении с теорией множеств для понимания ее основных конструкций и теорем нам будет вполне достаточно «наивного» канторовского подхода.

Отношения включения и равенства множеств

Определение 1.7. *Пусть X и Y — два множества. Будем говорить, что множество X является* ***подмножеством*** *множества Y, если любой элемент из X принадлежит и Y.*

В таком случае будем говорить также, что X содержится в Y. Для этого используется следующая краткая запись:

$$X \subset Y.$$

Введенное в определении 1.7 отношение между множествами называется **отношением включения**. Оно обладает следующими свойствами:

1) $X \subset X$ (рефлексивность);

2) если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$ (транзитивность).

Определение 1.8. *Два множества X и Y называются* ***равными****, если каждое из них содержится в другом, т. е. $X \subset Y$ и $Y \subset X$.*

Равенство множеств записывается так: $X = Y$.

Отметим, что включение множеств $X \subset Y$ не исключает их равенства.

Если $X \subset Y$, но $X \neq Y$, то будем говорить, что X является **собственным подмножеством** для Y[1].

Таким образом, чтобы установить, что включение $X \subset Y$ является собственным, надо доказать следующие утверждения:

1) любой элемент $x \in X$ принадлежит Y;

2) некоторый элемент $x_0 \in Y$ не является элементом множества X.

Чтобы подчеркнуть, что включение $X \subset Y$ является собственным, иногда пишут $X \subsetneq Y$.

Определение 1.9. ***Пустое множество*** *— это множество, не имеющее элементов. Оно обозначается символом $\varnothing$.*

Естественно считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Тогда нетрудно показать, что пустое множество единственно: если $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$ — два пустых множества, то должно быть $\varnothing_1 \subset \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subset \varnothing_1$, следовательно, $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

Операции над множествами

Определение 1.10. ***Пересечением*** *множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств X и Y.*

---

[1] Иногда в математической литературе используются несколько иные обозначения для включений множеств: вместо $X \subset Y$ пишут $X \subseteq Y$, а запись $X \subset Y$ применяют для собственных включений.

Определение 1.11. ***Объединением*** *множеств X и Y называется множество $X \cup Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств X или Y.*

Часто для иллюстрации операций над множествами используются так называемые диаграммы Эйлера – Венна. На рис. 1.1, *а* схематически изображено пересечение двух множеств, а на рис. 1.1, *б* — их объединение.

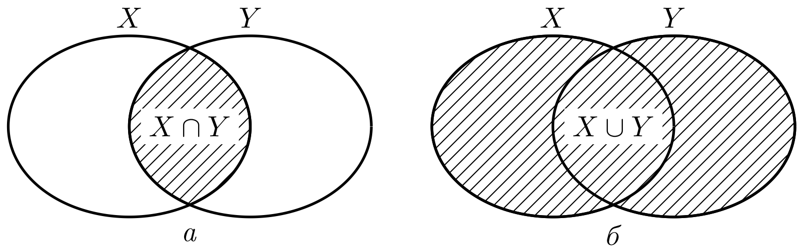

Рис. 1.1. Диаграммы Эйлера – Венна: *а* — пересечение; *б* — объединение

На рис. 1.1 множества X и Y изображаются эллипсами (это могут быть и другие фигуры), а иллюстрируемые множества (в данном случае это пересечение $X \cap Y$ и объединение $X \cup Y$) заштрихованы.

Определение 1.12. *Множества X и Y называются* ***непересекающимися*** *или* ***дизъюнктными****, если $X \cap Y = \varnothing$.*

Определение 1.13. ***Разностью*** *множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих X и не принадлежащих Y (рис. 1.2, а).*

Определение 1.14. *Пусть $X \subset Y$, тогда множество $X^c = Y \setminus X$ называется* ***дополнением*** *относительно Y множества X (рис. 1.2, б).*

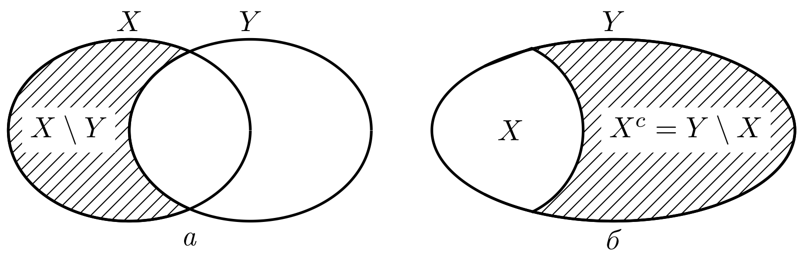

Рис. 1.2. Диаграммы Эйлера – Венна: *а* — разность; *б* — дополнение

Свойства операций над множествами

Пусть Ω — некоторое множество и X, Y, Z — его подмножества. Тогда операции над этими множествами обладают следующими свойствами:

1) $X \cup Y = Y \cup X$ (коммутативность объединения);

2) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ (ассоциативность объединения);

3) $X \cap Y = Y \cap X$ (коммутативность пересечения);

4) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (ассоциативность пересечения);

5) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

6) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

7) $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$ (правило де Моргана);

8) $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ (правило де Моргана);

9) $(X^c)^c = X$ (правило двойного отрицания).

В свойствах 7)–9) дополнения берутся относительно объемлющего множества Ω.

Эти свойства операций над множествами легко вытекают непосредственно из определений и тавтологий из упражнения 1.1 (проверьте это самостоятельно).

1.1.3. Отображения и функции

Отношения

Под **упорядоченной парой** будем понимать пару, в которой один из ее элементов отмечен. Этот отмеченный элемент называется первым в паре, а оставшийся — вторым.

Определение 1.15. ***Декартовым произведением*** *множеств X и Y называется множество*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

Определение 1.16. *Произвольное подмножество $R \subset X \times Y$ декартового произведения $X \times Y$ будем называть* ***отношением*** *между X и Y.*

Если $(x, y) \in R$, то будем говорить, что элемент x находится в отношении R к элементу y и кратко записывать это так: xRy.

На языке отношений можно выразить многие конструкции, которые встречались выше. Рассмотрим несколько содержательных примеров.

Пример 1.1. 1) **Отношение принадлежности**. Пусть X — множество и $\mathcal{B}(X)$ — множество всех его подмножеств[1]. Отношение

$$xRY \ \Leftrightarrow \ x \in Y$$

называется отношением принадлежности элементов $x \in X$ подмножествам из $Y \in \mathcal{B}(X)$.

[1] $\mathcal{B}(X)$ часто называют **булеаном** множества X.

2) **Отношение неравенства** между действительными числами:

$$xRy \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y.$$

3) **Отношение включения** в булеане любого множества X:

$$ARB \;\Leftrightarrow\; A \subset B.$$

4) **Отношение равенства**. Пусть X и Y — два множества. Отношение

$$xRy \;\Leftrightarrow\; x = y$$

называется отношением равенства между элементами множеств X и Y. Его легко записать как подмножество в декартовом произведении:

$$\{(x,x) : x \in X \cap Y\} \subset X \times Y.$$

5) **Отношение делимости** между натуральными числами:

$$nRm \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{N} \quad n = km.$$

Из этих примеров видно, что для часто встречающихся и важных отношений вводились специальные обозначения, которые использовались при записи того факта, что элементы находятся в данном отношении.

Отношения эквивалентности

Следующее отношение является одним из самых важных в математике. Оно (наряду с отношением функции) лежит в основе математики.

Определение 1.17. *Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если выполнены следующие условия:*
1) $\forall\, x \in X \quad xRx$ — *рефлексивность;*
2) $\forall\, x, y \in X \quad xRy \;\Rightarrow\; yRx$ — *симметричность;*
3) $\forall\, x, y, z \in X \quad (xRy) \wedge (yRz) \;\Rightarrow\; xRz$ — *транзитивность.*

Упражнение 1.6. Показать, что отношениями эквивалентности являются:
а) отношение равенства из примера 1.1;
б) отношение

$$nRm \;\Leftrightarrow\; n \text{ и } m \text{ имеют одинаковую четность}$$

на множестве натуральных чисел.

Обычно для обозначения отношения эквивалентности используется символ «$\sim$» и вместо xRy пишут $x \sim y$, говоря при этом, что элементы x и y эквивалентны.

Определение 1.18. *Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве X и $x \in X$. Множество*

$$\widehat{x} := \{y \in X : y \sim x\}$$

называется ***классом эквивалентности***[1] *элемента x. Любой элемент из $\widehat{x}$ называется* ***представителем*** *класса эквивалентности $\widehat{x}$.*

Упражнение 1.7. Доказать, что

1) для любого $x \in X$ класс эквивалентности $\widehat{x}$ непуст;

2) любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают;

3) объединение всех классов эквивалентности совпадает с X.

Роль отношений эквивалентности в математике, науке и даже в практической деятельности весьма велика. Часто приходится иметь дело с огромными совокупностями объектов, каждому из которых присущи свои черты, особенности и признаки. Но учесть их все одновременно невозможно, и в зависимости от ситуации интересуются теми или иными признаками, игнорируя все остальные. Если эти выделенные признаки совпадают у двух объектов, то они считаются эквивалентными (условно равными), принадлежащими одному классу. Далее вся исследуемая совокупность разбивается на непересекающиеся классы, причем в один класс объединяются те объекты, которые считаются равными. Таким образом происходит построение любой классификации.

Общее понятие функции

Наряду с понятием множества основополагающим в математике является понятие функции, без которого невозможно представить себе какой-либо из разделов математики.

Становление современного понятия функции начинается с работ Лобачевского и Дирихле, которые впервые дали определение функции как соответствия: на множестве X задана функция f со значениями в Y, если любому $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$, называемый образом элемента.

С одной стороны, это определение правильно выражает суть понятия функции, но с другой — оно заменяет термин «функция» термином «соответствие», который не расшифрован.

В настоящее время общепринятым считается следующее определение, принадлежащее Дедекинду. В нем отчетливо разъясняется понятие соответствия.

[1] Иногда используется термин «**класс смежности**».

Определение 1.19. *Отношение f между X и Y называется* ***отображением*** *или* ***функцией****, заданной на X со значениями в Y, если выполнены следующие два условия:*

1) $\forall x \in X \quad \exists y \in Y \quad xfy$;
2) $\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad \big((xfy_1) \wedge (xfy_2) \implies y_1 = y_2\big)$.

Первое из условий в этом определении означает, что каждому элементу $x \in X$ функция ставит в соответствие элемент $y \in Y$, а второе — что этот элемент $y \in Y$ является единственным (рис. 1.3).

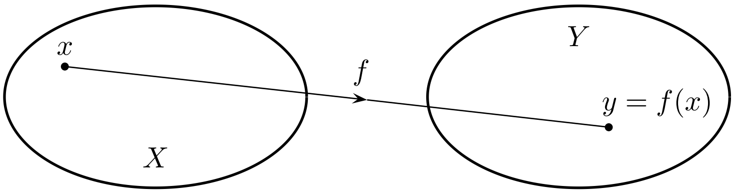

Рис. 1.3. Функция $f : X \to Y$

Факт задания функции принято записывать так: $f : X \to Y$, а вместо xfy для функций будем писать $y = f(x)$. В таком случае y называется **образом** элемента x, а x — **прообразом** элемента y.

Часто функцию задают с помощью «поточечного» правила

$$x \mapsto f(x), \; x \in X.$$

Образы и прообразы

Введем еще ряд важных терминов и обозначений, связанных с понятием функции, которые будут систематически использоваться в дальнейшем.

Множество X называется **областью определения** функции $f : X \to Y$. Часто область определения мы будем обозначать D_f или просто D, когда ясно, о какой функции идет речь.

Если $A \subset X$, то множество

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

называется **образом** множества A, а $f(X)$ — **областью значений** функции.

Если $B \subset Y$, то множество

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

называется **прообразом** множества B.

Упражнение 1.8. Доказать следующие свойства образов и прообразов множеств:

1) $A \subset B \;\Rightarrow\; f(A) \subset f(B)$;
2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
3) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
4) $A \neq \varnothing \;\Rightarrow\; f(A) \neq \varnothing$;
5) $A \subset B \;\Rightarrow\; f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
6) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
7) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
8) $A \subset f^{-1}(f(A))$;
9) $f(f^{-1}(A)) \subset A$;

Привести примеры, показывающие, что в 3), 8) и 9) равенства не всегда имеют место.

Термин «функция» можно интерпретировать геометрически: **графиком** функции называется множество

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in D_f\}.$$

Рассмотрим примеры часто встречающихся функций.

Пример 1.2. 1) Пусть числа $a, b \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax+b$, $x \in \mathbb{R}$, называется **линейной**.

2) Пусть числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ фиксированы. Функция $x \mapsto ax^2+bx+c$, $x \in \mathbb{R}$, называется **квадратичной**.

3) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и заданы числа $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$. Функция

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}$$

(обозначение $\sum$ для суммы см. в (1.23)), называется **многочленом** или **полиномом** степени n.

4) Число

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

называется знаком числа $x \in \mathbb{R}$, а функция $x \mapsto \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$, — **функцией знака** или «сигнум».

5) Если X — произвольное множество, то любая функция $a : \mathbb{N} \to X$ называется **последовательностью** со значениями в X. Тогда образ числа $n \in \mathbb{N}$ обычно записывают в виде a_n (вместо $a(n)$) и называют n-м **элементом последовательности**. Саму последовательность записывают так: $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В принципе, не важно, что нумерация элементов последовательности начинается с единицы. Она может начинаться с любого целого числа.

Термин «последовательность» сохраняют, если $\mathbb{N}$ заменить на множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Такие последовательности называют **двусторонними**.

6) Если X — произвольное множество и $A \subset X$ — подмножество в X, то функция

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \\ 0, & x \in A^c, \end{cases} \tag{1.3}$$

называется **характеристической функцией** для A или **индикатором** A.

В частном случае $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел) получим так называемую **функцию Дирихле**

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1.4}$$

7) Если X — произвольное множество, то функция

$$\mathrm{Id}_X(x) = x,\ x \in X, \tag{1.5}$$

отображающая каждый элемент в себя, называется **тождественным отображением** множества X.

Иногда требуется сузить область определения функции, не меняя самого правила, по которому эта функция действует. В связи с этим для функции $f : X \to Y$ и множества $A \subset X$ определим ее **сужение** на A как функцию $f|_A : A \to Y$, действующую по правилу $f|_A : x \mapsto f(x)$, $x \in A$.

Композиция отображений

Пусть заданы две функции: $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Обратим внимание, что область значений $f(X)$ первой из них содержится в области определения второй — Y.

Определение 1.20. *Отображение $g \circ f : X \to Z$, действующее по правилу*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)), \quad x \in X,$$

*называется **композицией** отображений f и g (рис. 1.4).*

*При этом в композиции $g \circ f$ функция g называется **внешней**, а f — **внутренней**.*

Часто вместо термина «композиция» употребляют термин «суперпозиция», или «сложная функция».

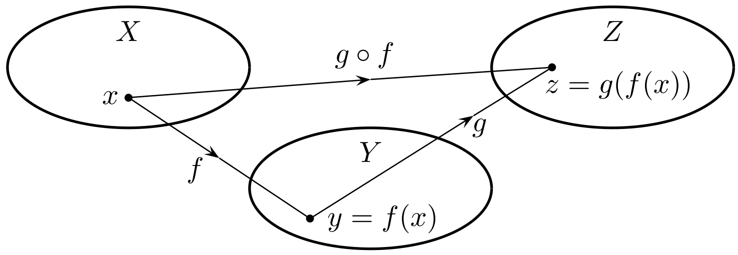

Рис. 1.4. Композиция функций

Отметим, что в композиции $g \circ f$ важен порядок, в котором записываются функции f и g. Композиция $f \circ g$ может даже не существовать (приведите такие примеры самостоятельно).

Сюръекция, инъекция, биекция

Определение 1.21. *Функция $f : X \to Y$ называется* ***сюръективной*** *или* ***сюръекцией****, если*

$$\forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X \quad f(x) = y.$$

Другими словами, сюръективность означает, что $f(X) = Y$. Часто вместо словосочетания «сюръективное отображение» используется более выразительный термин — «**отображение на**» Y.

Определение 1.22. *Функция $f : X \to Y$ называется* ***инъективной*** *или* ***инъекцией****, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \big(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\big)\,,$$

т. е. разные элементы из X имеют различные образы.

Другими словами, инъективность означает, что

$$\forall\, x_1,\, x_2 \in X \quad \big(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\big)\,.$$

Определение 1.23. *Функция $f : X \to Y$ называется* ***биективной****, или* ***биекцией****, или* ***взаимно однозначной****, если она одновременно сюръективна и инъективна.*

Свойства сюръективности и инъективности можно переформулировать на языке следующего уравнения:

$$f(x) = y. \tag{1.6}$$

Сюръективность функции $f : X \to Y$ означает, что уравнение (1.6) имеет решение $x \in X$ для любого $y \in Y$. Инъективность означает, что для любого $y \in Y$ уравнение (1.6) имеет не более одного решения $x \in X$.

Упражнение 1.9. 1) Для каких α степенная функция $x \mapsto x^{\alpha}$, $x > 0$, является сюръективной, инъективной, биективной?

2) Какие из тригонометрических функций являются сюръективными, инъективными, биективными?

3) Является ли показательная функция сюръективной, инъективной?

4) Доказать, что композиция сюръективных (инъективных, биективных) отображений наследует это свойство.

5) Доказать, что любое отображение является композицией сюръективного и инъективного отображений.

Обратная функция

Непосредственно из определения 1.23 вытекает, что если функция $f : X \to Y$ — биекция, то отношение

$$f^{-1} := \{(y, x) : f(x) = y\} \tag{1.7}$$

также является функцией (проверьте это).

Функция (1.7) называется **обратной** функции $f : X \to Y$ (рис. 1.5).

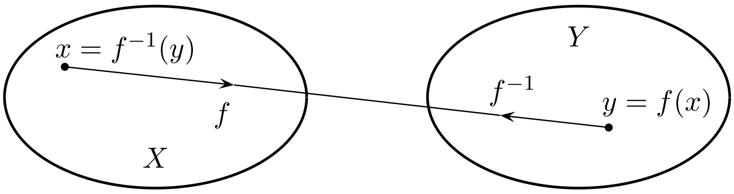

Рис. 1.5. Обратная функция $f^{-1} : Y \to X$

Отметим, что выражение f^{-1} используется в обозначениях двух объектов — для полного прообраза $f^{-1}(A)$ множества A при отображении f и для обратного отображения. При этом оба обозначения общеприняты среди математиков и надо быть внимательным при их использовании.

Упражнение 1.10. 1) Найти обратные функции к степенным.

2) Являются ли показательная и логарифмическая функции с одним основанием взаимно обратными?

3) Обратными каким функциям являются обратные тригонометрические функции?

4) Доказать равенства $(f^{-1})^{-1} = f$ и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ при условии, что $f, g : X \to Y$ — биекции.

Иногда понятие обратной функции полезно разложить на две составляющие. Пусть $f : X \to Y$ — некоторая функция.

Отображение $f_l^{-1} : Y \to X$ называется **левым обратным** функции f, если (см. (1.5))

$$f_l^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X .$$

Существование левого обратного отображения f_l^{-1} означает, что если для заданного $y \in Y$ существует решение уравнения (1.6), то оно единственно. В самом деле, пусть x — какое-нибудь решение (1.6). Тогда, действуя на него отображением f_l^{-1}, получим $x = f_l^{-1}(y)$ — решение обязано быть таким.

Отображение $f_r^{-1} : Y \to X$ называется **правым обратным** функции f, если (см. (1.5))

$$f \circ f_r^{-1} = \mathrm{Id}_Y .$$

Существование правого обратного отображения f_l^{-1} означает, что решение уравнения (1.6) существует для любого $y \in Y$. Действительно, для любого $y \in Y$ положим $x = f_r^{-1}(y)$, тогда $f(f_r^{-1}(y)) = y$ и $x = f_r^{-1}(y)$ является решением уравнения (1.6).

Упражнение 1.11. 1) Показать, что отображение $z \mapsto z^2$, $z \in \mathbb{Z}$, не имеет ни левого, ни правого обратного.

2) Привести пример функции, у которой не существует левой обратной, но есть правая.

3) Привести пример функции, у которой не существует правой обратной, но есть левая.

4) Привести пример функции, у которой есть более одной правой (левой) обратной.

5) Доказать, что если у функции существуют и левая, и правая обратные функции, то они совпадают. В этом случае функция является биекцией и $f^{-1} = f_r^{-1} = f_l^{-1}$.

Важное значение для иллюстрации положений математического анализа играют **элементарные функции** — так называют (при естественных значениях параметров и переменных) степенную, показательную, тригонометрические функции, им обратные, линейные комбинации и композиции конечного числа таких функций. Определение каждой из элементарных функций отложим до удобного момента. Сейчас же будем свободно пользоваться привычными свойствами этих функций, многие из них независимо докажем позже.

1.1.4. Множество действительных чисел

Построение множества рациональных чисел

Обозначим $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

Натуральные числа возникли для обеспечения счета. Для них определены операции сложения и умножения. Однако выполнить операцию, обратную сложению (вычитание), оставаясь в рамках множества натуральных чисел, не всегда возможно.

Для того чтобы исправить этот пробел, множество $\mathbb{N}$ было расширено до множества целых чисел $\mathbb{Z}$, в котором вычитание всегда возможно и которое обладает определенными естественными свойствами, которые будут указаны далее.

Однако возникает новая проблема, связанная с тем, что операция, обратная умножению (деление), также не всегда выполнима во множестве целых чисел. Для ее устранения вводится множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Покажем сейчас, как это можно сделать, исходя из множества целых чисел $\mathbb{Z}$.

Определение 1.24. ***Множеством рациональных чисел*** *будем называть множество*

$$\mathbb{Q} := \{(m, n) : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$$

всех упорядоченных пар с первым элементом $m \in \mathbb{Z}$ *(**числителем**) и вторым* $n \in \mathbb{N}$ *(**знаменателем**).*

Два числа $(m_1, n_1) \in \mathbb{Q}$ *и* $(m_2, n_2) \in \mathbb{Q}$ *называются **равными**, если*

$$n_2 m_1 = n_1 m_2.$$

Рациональное число $(0, n)$*, где* $n \in \mathbb{N}$ *любое, называется **нулем** и обозначается просто* 0*.*

Следует подчеркнуть, что рациональные числа были введены для выполнимости операции деления. Поэтому будем использовать для их записи традиционную форму[1] $\dfrac{m}{n}$ вместо (m, n).

Введем теперь операции над рациональными числами и определим правило для их сравнения.

Для любых двух рациональных чисел $\dfrac{m_1}{n_1}, \dfrac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ определим их сумму

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

и произведение

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Число $\dfrac{-m}{n}$ будем называть **противоположным** числу $\dfrac{m}{n}$, для него используется запись $-\dfrac{m}{n}$. Если $\dfrac{m}{n} \neq 0$, то число $\dfrac{n}{m}$ называется **обратным** числу $\dfrac{m}{n}$.

Будем считать, что $\dfrac{m_1}{n_1} \geqslant \dfrac{m_2}{n_2}$, если $m_1 n_2 - m_2 n_1 \geqslant 0$ (числитель разности этих чисел неотрицателен).

[1] Часто также будем использовать обозначение m/n.

Построенное множество рациональных чисел и введенные на нем операции сложения и умножения и отношение порядка удовлетворяют определенным свойствам, о которых пойдет речь в следующем разделе.

Аксиоматика множества действительных чисел

Необходимо дальнейшее расширение множества рациональных чисел, так как в его рамках нельзя решить ряд важных и естественных задач, из которых одной из самых выразительных является невозможность решения уравнения $x^2 = 2$.

Опишем нужный набор свойств, которыми должно обладать расширение множества рациональных чисел, чтобы задачи такого сорта (и многие другие) можно было успешно решать. Это расширение называется множеством действительных чисел.

Условимся говорить, что на некотором множестве X задана **бинарная операция** R, если задана функция

$$R : X \times X \to X$$

из декартового квадрата $X \times X$ в X. Для результата $R(x, y)$ операции R с элементами x и y будем использовать обозначение xRy вместо $R(x, y)$.

Определение 1.25. ***Множеством действительных чисел*** *будем называть любое множество* $\mathbb{R}$, *подчиняющееся следующей системе условий, называемых* ***аксиомами действительных чисел*** *(которые разделены на естественные группы).*

Аксиомы сложения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция сложения*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$ *(существование нуля — нейтрального элемента для сложения);*

2) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \exists -x \in \mathbb{R} \quad x+(-x) = 0$ *(существование противоположного элемента);*

3) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(ассоциативность сложения);*

4) $x + y = y + x$ *(коммутативность сложения).*

Аксиомы умножения: *на* $\mathbb{R}$ *определена бинарная операция умножения*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

5) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$ *(существование единицы — нейтрального элемента для умножения);*

6) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \cdot x^{-1} = 1$ *(существование обратного элемента);*

7) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(ассоциативность умножения);*

8) $x \cdot y = y \cdot x$ *(коммутативность умножения).*

Аксиома связи умножения и сложения:

9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(дистрибутивность).*

Аксиомы порядка: *на* $\mathbb{R}$ *определено отношение порядка* $\leqslant$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

10) $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R} \quad (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x);$

11) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x;$

12) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Longrightarrow x = y;$

13) $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Longrightarrow x \leqslant z$ *(транзитивность порядка).*

Аксиомы связи порядка и операций умножения и сложения:

14) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z;$

15) $(x \leqslant y) \wedge (z \geqslant 0) \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z.$

Аксиома полноты:

16) *для любых непустых подмножеств* $X,\, Y \subset \mathbb{R}$, *удовлетворяющих условию*

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, y \in Y \quad x \leqslant y,$$

существует такое $c \in \mathbb{R}$, *что*

$$\forall\, x \in X \quad \forall\, y \in Y \quad x \leqslant c \leqslant y.$$

Если эта совокупность аксиом выполняется на каком-либо множестве, то оно называется **моделью** (конкретной реализацией) множества действительных чисел.

Приведенная система аксиом является непротиворечивой, т. е. существует множество, удовлетворяющее этой системе аксиом. Построение таких моделей можно доказать, исходя из аксиом теории множеств.

Две модели $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ множества действительных чисел называются **изоморфными**, если существует биекция $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ со свойствами

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \quad x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$. Отображение f в таком случае называется **изоморфизмом моделей**. Другими словами, изоморфизм сохраняет операции и порядок.

Можно доказать, что любые две модели множества действительных чисел являются изоморфными. Поэтому с математической точки зрения любые модели множества действительных чисел совершенно равноправны.

Для наглядности будем часто привлекать образный геометрический язык, отождествляя действительные числа с точками некоторой прямой (которую назовем числовой прямой или координатной осью). Не будем останавливаться на подробном исследовании этого отождествления, так как не используем его в доказательствах.

Модель множества действительных чисел

Дадим представление об одном из способов построения модели множества действительных чисел, отталкиваясь от множества рациональных чисел. Данный способ носит название метода сечений Дедекинда.

Определение 1.26. ***Сечением*** *во множестве рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *называется разбиение* $\mathbb{Q}$ *на два непустых множества* A *и* A', *удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $A \cup A' = \mathbb{Q}$ *(каждое рациональное число принадлежит либо* A, *либо* A'*) и* $A \cap A' = \varnothing$ *(*A *и* A' *не имеют общих элементов);*

2) $\forall\, a \in A \quad \forall\, a' \in A' \quad a < a'$ *(любой элемент множества* A *меньше любого элемента множества* A'*);*

3) *в* A *нет наибольшего элемента.*

Обозначим сечения так: $A|A'$, при этом A называется **нижним классом** сечения $A|A'$, а A' — его **верхним классом**.

Совокупность всех таких сечений и дает модель множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Прежде всего выясним, какие сечения будут играть роль рациональных чисел, а какие — иррациональных.

Возможны следующие типы сечений: в верхнем классе сечения либо есть наименьший элемент, либо его нет.

Пример сечения первого типа:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\},\ A' = \{a' \in \mathbb{Q} : a' \geqslant 0\};$$

пример сечения второго типа:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : (a < 0) \vee (a^2 < 2)\},\ A' = \{a' \in \mathbb{Q} : (a' > 0) \wedge ((a')^2 > 2)\} \quad (1.8)$$

(хорошо известно, что нет рационального числа, квадрат которого равен 2).

Сечение первого типа можно отождествить с рациональным числом — наименьшим числом верхнего класса. Такое сечение строится для любого рационального числа $r \in \mathbb{Q}$:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a < r\},\ A' = \{a' \in \mathbb{Q} : a' \geqslant r\}. \quad (1.9)$$

В частности, сечение

$$O = \{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant 0\},\ O' = \{a' \in \mathbb{Q} : a' > 0\} \quad (1.10)$$

изображает нуль.

Теперь становится понятной роль условия 3) в определении 1.26 — оно исключает возможность представления рационального числа двумя различными сечениями. Если изъять условие 3) из определения 1.26, то кроме сечения (1.9) число $r \in \mathbb{Q}$ будет изображать также

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant r\}, \ A' = \{a' \in \mathbb{Q} : a' > r\}.$$

У сечений второго типа нет пограничного числа, «разделяющего» числа из нижнего и верхнего классов сечения. Каждое такое сечение как будто показывает место, где должно быть расположено «новое» число. Будем считать, что каждое сечение второго типа определяет некоторое иррациональное число. В частности, сечение из примера (1.8) определяет $\sqrt{2}$.

Таким образом, множество всех сечений можно рассматривать как множество всех действительных чисел. Однако нужно определить отношения равенства и неравенства для «новых» чисел, а также операции сложения и умножения.

Два сечения $A|A'$ и $B|B'$ будем называть равными, если $A = B$ (тогда автоматически будет и $A' = B'$).

Будем говорить, что сечение $A|A'$ меньше сечения $B|B'$, если $A \subset B$ и $A \neq B$. Конечно, это условие равносильно тому, что $A' \supset B'$ и $A' \neq B'$ (это нетрудно проверить самостоятельно).

Итак, отношения равенства и неравенства для сечений введены. Перейдем к определению арифметических операций.

Суммой сечений $A|A'$ и $B|B'$ будем называть сечение $C|C'$, где

$$C = \{a + b : a \in A, \ b \in B\}, \ C' = \{a' + b' : a' \in A', \ b' \in B'\}$$

(конечно, необходимо доказывать, что $C|C'$ — действительно сечение).

Наконец, произведение неотрицательных[1] сечений $A|A'$ и $B|B'$ определяется как сечение $C|C'$, у которого

$$C = \{r \in \mathbb{Q} : (r < 0) \vee (r = ab, \text{ где } a \in A, \ b \in B)\}$$

и $C' = \mathbb{Q} \setminus C$. На произведение сечений произвольного знака это определение распространяется обычным способом с учетом знаков сомножителей.

Здесь продемонстрировано только то, каким образом вводятся основные понятия в этой модели множества действительных чисел. Вопросы корректности определений и доказательства того, что построенная модель удовлетворяет всем свойствам, описанным в системе аксиом определения 1.25, не рассматривались (более подробно с этим можно ознакомиться по иным литературным источникам, см., например, [9]).

[1] Сечение $A|A'$ называется неотрицательным, если $A|A' \geqslant O|O'$ (см. (1.10)).

Другим распространенным способом построения модели множества $\mathbb{R}$ является метод бесконечных дробей по какому-либо основанию. Такие разложения чисел в бесконечные дроби будут рассмотрены в подп. 1.1.4.

Важнейшие подмножества

Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ назовем **индуктивным**, если

$$\forall x \in A \quad x + 1 \in A.$$

Определение 1.27. *Наименьшее индуктивное множество, содержащее 1, называется* ***множеством натуральных чисел****, обозначение* $\mathbb{N}$.

В этом определении «наименьшее» понимается по включению множеств. Другими словами, если множество индуктивно и единица ему принадлежит, то оно содержит $\mathbb{N}$.

Прямым следствием определения множества натуральных чисел является утверждение, которое лежит в основе **метода математической индукции**: *если подмножество* $A \subset \mathbb{N}$ *таково, что* $1 \in A$ *и вместе с любым числом* $x \in A$ *множеству* A *принадлежит также* $x + 1$, *то* $A = \mathbb{N}$.

Метод математической индукции чаще используется в следующей формулировке: *пусть некоторое утверждение* $P(n)$ *верно при* $n = 1$ *и из того, что верно* $P(n)$, *следует справедливость* $P(n+1)$, *тогда* $P(n)$ *справедливо при всех натуральных* n.

Определение 1.28. ***Множеством целых чисел*** $\mathbb{Z}$ *называется*

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Определение 1.29. *Множество*

$$\mathbb{Q} := \left\{m \cdot n^{-1} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

называется ***множеством рациональных чисел****.*

Можно показать, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ удовлетворяет системе аксиом действительных чисел с единственным изменением — аксиому полноты следует заменить на следующую **аксиому Архимеда**:

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > r.$$

Полученной системой аксиом множество $\mathbb{Q}$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма подобно тому, как это было для множества $\mathbb{R}$.

Для чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, введем **сегмент** (**отрезок**) (рис. 1.6):

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\};$$

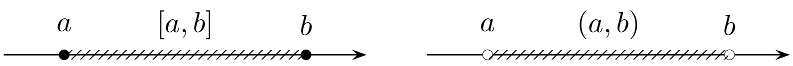

Рис. 1.6. Сегмент (отрезок) и интервал

при $a < b$ введем **интервал** (рис. 1.6):

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,;$$

полуинтервал (**полусегмент**), открытый слева (рис. 1.7):

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}\,;$$

полуинтервал (полусегмент), открытый справа (см. рис. 1.7):

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}\,.$$

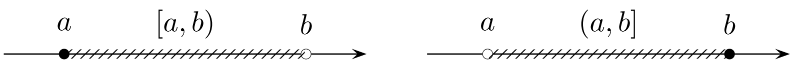

Рис. 1.7. Полуинтервалы (полусегменты)

Во всех случаях a — левый конец, а b — правый. Общее название для таких множеств — **промежутки**, общее обозначение — $\langle a,\, b\rangle$ (когда неизвестно или не важно, принадлежат ли концы промежутку).

Если неизвестно, выполнено ли условие $a < b$ для концов промежутка $\langle a, b\rangle$, то будем записывать его в виде $\langle a, b\rangle^*$ (звездочка расставляет в записи концы промежутка в правильном порядке). Другими словами,

$$\langle a, b\rangle^* = \begin{cases} \langle a, b\rangle, & a < b, \\ \langle a, b\rangle, & a > b. \end{cases} \tag{1.11}$$

Введем бесконечные промежутки:

$$(a,\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\,,\ [a,\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}\,,$$

$$(-\infty,\, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}\,,\ (-\infty,\, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$$

и

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}\,,\ (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Границы числовых множеств

Число $M \in X$ из множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **максимальным** для X, если

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Обозначение для максимального элемента — $\max X$.

Аналогично элемент $m \in X$ множества $X \subset \mathbb{R}$ называется **минимальным** для X, если

$$\forall x \in X \quad x \geqslant m.$$

Обозначение для минимального элемента — $\min X$.

Если множество конечно, то оно имеет минимальный и максимальный элементы. Если же множество бесконечно, то это уже не всегда так, в чем легко убедиться на примере интервала. Далее определим подходящие аналоги этих понятий для бесконечных множеств.

Определение 1.30. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется* ***верхней границей или гранью множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \quad x \leqslant M.$$

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным сверху****, если оно имеет верхнюю границу.*

Подчеркнем, что в определении верхней границы множества не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Легко убедиться, что если $M \in \mathbb{R}$ — верхняя граница множества $X \subset \mathbb{R}$, то любое число $M' > M$ также является верхней границей для X. Интерес представляет наименьшая из верхних границ: она ближе всех ко множеству.

Определение 1.31. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется* ***точной верхней границей множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:*

1) $\forall x \in X \quad x \leqslant M$;
2) $\forall M' < M \quad \exists x \in X \quad x > M'$.

В определении точной верхней границы множества также не требуется, чтобы она принадлежала этому множеству.

Точная верхняя граница обозначается $\sup X$, и для нее используется термин **супремум** (лат. supremum).

Первое условие в определении 1.31 означает, что $\sup X$ — верхняя граница для X. Второе же означает, что любое меньшее число верхней границей уже не является. Таким образом, супремум — это наименьшая верхняя граница множества.

Аналогично можно дать определение точной нижней границы.

Определение 1.32. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется* ***нижней границей или гранью множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если*

$$\forall x \in X \quad x \geqslant m.$$

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным снизу*** *, если оно имеет нижнюю границу.*

Определение 1.33. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется* ***точной нижней границей множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если выполнены следующие два условия:*
1) $\forall x \in X \quad x \geqslant m$;
2) $\forall m' > m \quad \exists x \in X \quad x < m'$.

Точная нижняя граница обозначается $\inf X$, и для нее используется термин **инфимум** (лат. infimum).

Первое условие в определении 1.33 означает, что $\inf X$ является нижней границей для X. Второе же означает, что любое большее число нижней границей уже не является. Таким образом, инфимум — это наибольшая нижняя граница множества.

Упражнение 1.12. Доказать следующие утверждения:
1) $\inf X$ и $\sup X$ определяются однозначно;
2) если во множестве $X \subset \mathbb{R}$ есть наибольший (наименьший) элемент, то он и будет совпадать с $\sup X$ ($\inf X$).

Если множество $X \subset \mathbb{R}$ не является ограниченным сверху (снизу), то условимся кратко записывать это так:

$$\sup X = +\infty \quad (\text{соответственно} \quad \inf X = -\infty).$$

Здесь впервые использовался символ бесконечности ∞ в равенстве. Подчеркнем, однако, что это лишь краткая запись вполне определенного факта (неограниченность X сверху или снизу). Никакие «бесконечные числа» не вводились и вводиться не будут. Использование символов ∞ и $\pm\infty$ в каждом случае будет оговариваться конкретно во избежание двусмысленностей.

Перейдем теперь к важнейшему свойству множества действительных чисел, которое обеспечено аксиомой полноты из определения 1.25.

Теорема 1.1 (Дедекинда). *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ непусто и ограничено сверху (снизу), то существует точная верхняя (соответственно нижняя) граница для X.*

Доказательство. Ограничимся доказательством существования $\sup X$ (обоснование другой части теоремы рекомендуется провести самостоятельно). Обозначим Y множество всех верхних границ для X, при этом множество Y не является пустым, так как X ограничено сверху. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено неравенство $x \leqslant y$.

В силу аксиомы полноты существует число M такое, что при всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнены неравенства $x \leqslant M \leqslant y$. Поскольку $x \leqslant M$ для всех $x \in X$, то M — верхняя граница для X и $M \in Y$, а так как $M \leqslant y$ для всех $y \in Y$, то M — наименьший элемент в Y, т. е. $M = \sup X$. □

Определение 1.34. *Если множество ограничено и сверху, и снизу, то оно называется* ***ограниченным****.*

В явном виде ограниченность множества $X \subset \mathbb{R}$ означает, что существуют такие числа $m \leqslant M$, что для всех $x \in X$ выполнены неравенства $m \leqslant x \leqslant M$.

Принцип Архимеда и его следствия

Рассмотрим свойства натуральных и целых чисел, связанные с аксиомой полноты. Основной результат здесь — принцип Архимеда, важный при измерениях и вычислениях. Он будет использован также при построении позиционной системы счисления в следующем подп. 1.1.4.

Лемма 1.1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{Z}$ непусто и ограничено сверху (снизу). Тогда в A есть максимальный (минимальный) элемент.*

Доказательство. Пусть множество A ограничено сверху и непусто. По теореме 1.1 существует $M = \sup A$. По определению 1.31 существует такой элемент $n \in A$, что $M - 1 < n \leqslant M$. Отсюда следует, что $n + 1 \notin A$ и все бóльшие целые числа также не входят в A и $n = M = \max A$. □

Лемма 1.2 (принцип Архимеда). *Пусть $x > 0$. Тогда для любого $h > 0$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$ со свойством*

$$nh \leqslant x < (n+1)h.$$

Доказательство. Множество $\left\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant \dfrac{x}{h}\right\}$ ограничено сверху и по лемме 1.1 имеет максимальный элемент $n \in \mathbb{Z}$. Число n является искомым, так как $x < (n+1)h$. □

Принцип Архимеда проиллюстрирован на рис. 1.8.

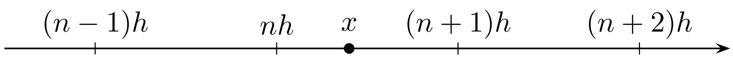

Рис. 1.8. Принцип Архимеда

В качестве первого приложения этого принципа докажем свойство **плотности** множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ во множестве $\mathbb{R}$. Так часто называют свойство множества рациональных чисел, сформулированное в следующей лемме.

Лемма 1.3 (о плотности $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$). *Для любых действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, для которого $a < r < b$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что существует число $n \in \mathbb{N}$ со свойством $\dfrac{1}{n} < b - a$. В самом деле, по принципу Архимеда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $1 < n(b-a)$.

Взяв такое n и, снова используя принцип Архимеда, найдем $m \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $\dfrac{m-1}{n} \leqslant a < \dfrac{m}{n}$. Тогда выполнено неравенство $\dfrac{m}{n} < b$, так как иначе было бы

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n},$$

откуда следовало бы неравенство $\dfrac{1}{n} \geqslant b - a$, которое противоречит выбору n. Итак, рациональное число $r = \dfrac{m}{n}$ удовлетворяет нужным требованиям. $\square$

Часто используется следующая более выразительная геометрическая форма леммы 1.3.

Лемма 1.4. *Для любых действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, пересечение $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ непусто.*

Другими словами, любой интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, содержит рациональное число.

Отметим также, что из принципа Архимеда вытекает следующее утверждение: для любого $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $n \in \mathbb{Z}$ со свойством

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Это число n (наибольшее целое число, меньшее либо равное x) называется **целой частью** числа x и обозначается $[x]$. Разность $\{x\} = x - [x]$ называется **дробной частью** числа x. Таким образом, любое число $x \in \mathbb{R}$ является суммой своих целой и дробной частей:

$$x = [x] + \{x\}.$$

Позиционная система счисления

Рассмотрим метод, позволяющий для каждого действительного числа строить последовательность его рациональных приближений и q-ичную запись числа. Для этого зафиксируем число $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, которое будем называть **основанием системы счисления**.

Опишем теперь процесс, позволяющий по числу $x > 0$ определить его

q-ичные цифры, которые будут использованы в q-ичной записи числа. При этом под q-ичной цифрой понимается элемент множества

$$\mathbb{N}_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}. \tag{1.12}$$

Итак, пусть задано основание $1 < q \in \mathbb{N}$ системы счисления и $x > 0$.

Лемма 1.5. *Множество* $\left\{q^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Предположим противное, тогда если M — точная верхняя граница множества (она существует по теореме 1.1), то найдется $k \in \mathbb{Z}$, для которого $M/q < q^k$ и $q^{k+1} > M$ — противоречие. □

Лемма 1.6. *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}_+$ *существует единственное* $p \in \mathbb{Z}$*, для которого*

$$q^p \leqslant x < q^{p+1}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Сначала докажем, что множество

$$A_x = \left\{k \in \mathbb{Z} : q^k \leqslant x\right\}$$

непусто. В самом деле, по лемме 1.5 множество $\left\{q^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ не ограничено сверху, поэтому найдется $k \in \mathbb{Z}$, для которого $\dfrac{1}{x} < q^k$ или $q^{-k} < x$. Следовательно, $-k \in A_x$ и $A_x \neq \varnothing$.

Далее отметим очевидное неравенство $k \leqslant 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$ (его легко доказать по индукции или вывести из формулы для бинома Ньютона). Из этого неравенства следует, что множество A_x ограничено сверху. В самом деле, если $k \in A_x$, то либо $k \leqslant 0$, либо $k \in \mathbb{N}$, тогда $k \leqslant 2^k \leqslant q^k \leqslant x$.

Теперь ко множеству A_x можно применить лемму 1.1, согласно которой в A_x существует максимальный элемент $p \in \mathbb{Z}$. Тогда $q^p \leqslant x$ (так как $p \in A_x$) и $x < q^{p+1}$ (так как $p + 1 \notin A_x$). □

Число p, определенное в лемме 1.6 (рис. 1.9), называется **порядком** числа x по основанию q.

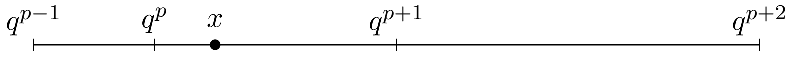

Рис. 1.9. Выбор порядка p

Найдя порядок p числа x так, чтобы выполнялись неравенства (1.13), используем лемму 1.2 с $h = q^p$, определяя $\alpha_p \in \mathbb{N}_q$ так, чтобы (рис. 1.10)

$$\alpha_p q^p \leqslant x < \alpha_p q^p + q^p.$$

На самом деле, $\alpha_p \geqslant 1$, что вытекает из неравенств (1.13).

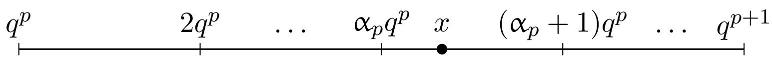

Рис. 1.10. Выбор α_p

Если слева в последних неравенствах — знак равенства, то положим

$$\alpha_{p-1} = \alpha_{p-2} = \ldots = 0.$$

В противном случае снова применим лемму 1.2 к числу $x - \alpha_p q^p > 0$ с $h = q^{p-1}$, определяя $\alpha_{p-1} \in \mathbb{N}_q$ так, чтобы (рис. 1.11)

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} \leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + q^{p-1}.$$

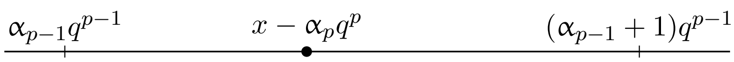

Рис. 1.11. Выбор α_{p-1}

Продолжая этот процесс по индукции, построим последовательность

$$\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots$$

q-ичных цифр $\alpha_k \in \mathbb{N}_q$, $k \geqslant p$, числа x. При этом последовательность рациональных чисел

$$r_n = \sum_{k=p-n}^{p} \alpha_k q^k, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.14}$$

удовлетворяет условиям

$$r_n \leqslant x < r_n + q^{p-n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.15}$$

причем если при некотором $n \in \mathbb{N}$ в (1.15) слева имеет место знак равенства, то $\alpha_k = 0$ при $k \leqslant n - 1$.

При описанном алгоритме не может оказаться так, что все α_k равны $q - 1$, начиная с некоторого k. Допустим, что это не так и существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $k < p - n_0$ будет $\alpha_k = q - 1$. Тогда при $n \geqslant n_0$

$$r_n = \sum_{k=p-n_0}^{p} \alpha_k q^k + \sum_{k=p-n}^{p-n_0-1} (q-1) q^k = r_{n_0} + q^{p-n_0} - q^{p-n}.$$

Подставляя это выражение в (1.15), получим

$$r_{n_0} + q^{p-n_0} - q^{p-n} \leqslant x < r_{n_0} + q^{p-n_0}$$

или
$$0 < r_{n_0} + q^{p-n_0} - x \leqslant q^{p-n}, \quad q^n \leqslant \frac{q^p}{r_{n_0} + q^{p-n_0} - x},$$
при всех $n \geqslant n_0$. Это невозможно, так как множество $\{q^k : k \in \mathbb{Z}\}$ не ограничено сверху (см. лемму 1.5).

Для того чтобы символ
$$\alpha_p \alpha_{p-1} \alpha_{p-2} \ldots \ (\alpha_k \in \mathbb{N}_q, \ \alpha_p > 0) \tag{1.16}$$
однозначно определял последовательность r_n, необходимо отметить в нем величину p — порядок числа x. Условимся о следующем соглашении: *если $p \geqslant 0$, то после α_0 ставим точку (или запятую), если же $p < 0$, то слева от α_p дописываем $|p|$ нулей и после крайнего левого ставим точку (или запятую).*

Обозначим теперь через P_q множество всех последовательностей (1.16), причем α_k не могут быть равными $q - 1$, начиная с некоторого номера (учитывая также соглашение о точке-запятой).

Указанный нами алгоритм задает отображение
$$f : \mathbb{R}_+ \to P_q, \tag{1.17}$$
ставящее в соответствие положительному числу символ (1.16). Покажем, что это отображение является инъективным и сюръективным.

Докажем инъективность. Пусть $x \neq x'$ — два положительных числа (можно считать, что $x > x'$). Используем обозначения для α_n и r_n, введенные выше для x. Пусть также $\{r'_n\}$ и $\{\alpha'_n\}$ — последовательности, соответствующие числу x'. Надо показать, что $\{\alpha_k\}$ и $\{\alpha'_k\}$ — различные элементы P_q. Можно считать, что x и x' имеют одинаковый порядок. Тогда из неравенств (1.15), записанных для этих чисел, и из $x > x'$ вытекает, что $0 < x - x' < r_n - r'_n + q^{p-n}$. Выберем теперь $n \in \mathbb{N}$ так, что $q^{p-n} < \dfrac{x - x'}{2}$ (это возможно по лемме 1.5). Тогда получим, что $r_n - r'_n > 0$ для выбранного n. Таким образом, $\{\alpha_k\}$ и $\{\alpha'_k\}$ отличаются по крайней мере одним элементом. Инъективность отображения (1.17) доказана.

Докажем сюръективность отображения (1.17). Пусть последовательность (1.16) — элемент P_q и $p \in \mathbb{Z}$ — ее порядок. Определим по формулам (1.14) последовательность $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда выполнено неравенство
$$r_n \leqslant r_{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Кроме того,
$$r_n + q^{p-n} \geqslant r_{n+1} + q^{p-n-1} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$
причем если $\alpha_{p-n-1} < q - 1$, то имеет место строгое неравенство. В самом деле,
$$r_{n+1} + q^{p-n-1} = r_n + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} + q^{p-n-1} \leqslant$$

$$\leqslant r_n + (q-1)q^{p-n-1} + q^{p-n-1} = r_n + q^{p-n}$$

и знак неравенства строгий, если $\alpha_{p-n-1} < q-1$.

Из неравенств для последовательностей $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{r_n + q^{p-n}\}_{n=0}^{\infty}$ вытекает (покажите это), что

$$r_n \leqslant r_m + q^{p-m} \quad (n, m = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому ко множествам $X = \{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $Y = \{r_n + q^{p-n}\}_{n=0}^{\infty}$ можно применить аксиому полноты: существует число $x \in \mathbb{R}$, для которого выполнены неравенства

$$r_n \leqslant x \leqslant r_n + q^{p-n} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1.18}$$

На самом деле, знак равенства справа невозможен, так как $\alpha_{p-n-1} < q-1$ для бесконечно многих $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеют место неравенства (1.15) и число x является прообразом элемента (1.16) при отображении (1.17). Сюръективность отображения доказана (1.17).

Итак, каждому положительному числу $x > 0$ взаимно однозначно поставлен в соответствие символ вида $\alpha_p \ldots \alpha_0, \alpha_{-1} \ldots$, если $p \geqslant 0$, и $0,0 \ldots 0\alpha_p \ldots$ ($|p|$ нулей), если $p < 0$. Он называется **q-ичной позиционной записью** числа x. Числу $x < 0$ условимся сопоставлять в качестве q-ичной позиционной записи взятый со знаком минус символ числа $-x$. Символом числа 0 будем считать символ $0,0 \ldots$.

Таким образом, построена позиционная q-ичная система записи действительных чисел. Исторически наиболее употребительным является основание 10. В информатике применяется двоичная система счисления, но используются также восьмеричная и шестнадцатеричная.

Отметим также, что для каждого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ по формулам (1.14) построена последовательность его рациональных приближений $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем r_n приближает x с точностью q^{p-n} (см. (1.18)).

1.1.5. Понятие о мощности множества

Равномощные множества

Следующее важное понятие лежит в основе обобщения представлений о количестве элементов множества.

Определение 1.35. *Два непустых множества X и Y называются* ***равномощными****, если существует биекция X на Y.*

Пустое множество равномощно самому себе и не равномощно никакому другому множеству.

Другими словами, равномощность множеств можно трактовать как тот факт, что они имеют одинаковое число элементов.

Будем говорить, что множество X имеет $n \in \mathbb{N}$ элементов, если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$. В этом случае его мощность равна n. Кроме того, множество **конечно**, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Мощностью множества или его **кардинальным числом** называется класс множеств, равномощных этому множеству. Для мощности множества будем использовать обозначение $\operatorname{card} X$. Мощность пустого множества по определению равна нулю.

Запись $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ будет означать, что X равномощно некоторому подмножеству множества Y. Если при этом еще X и Y не являются равномощными, то будем писать, что $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$.

Смысл этой конструкции состоит в том, что она позволяет сравнивать количества элементов во множествах, не прибегая к их пересчету. Понятие мощности обобщает понятие «количества» элементов в конечном множестве.

Важнейшие множества и их мощности

Для мощностей некоторых часто встречающихся множеств имеются специальные названия:

1) класс, содержащий пустое множество $\varnothing$, не содержит других множеств; эта мощность называется нулевой или нулем;

2) пусть $n \in \mathbb{N}$, все множества, состоящие ровно из n элементов, попадают в одну мощность — она называется n и совпадает с привычным понятием числа элементов в конечном множестве;

3) класс, содержащий $\mathbb{N}$, называется счетностью; другими словами, множество называется **счетным**, если оно равномощно $\mathbb{N}$;

4) класс, содержащий $\mathbb{R}$, называется **мощностью континуума**.

Упражнение 1.13. Доказать, что следующие множества равномощны:
1) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$;
2) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$;
3) $[0, 1]$ и $[a, b]$ (для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$);
4) $(0, 1)$ и $[0, 1]$;
5) $(0, 1)$ и $\mathbb{R}$.

Из упражнения 1.13 видно, что множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются счетными. Естественно возникает вопрос: является ли счетным $\mathbb{R}$? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 1.2 (Кантора). $\operatorname{card} \mathbb{N} < \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью важного и часто используемого приема, носящего название «**диагональный процесс Кантора**».

Докажем, что интервал $(0,1)$ не является счетным. Предположим противное, т. е. существует взаимно однозначное соответствие $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ между $\mathbb{N}$ и $(0,1)$. Пусть $f(n) = x_n$. Рассмотрим «троичную» позиционную запись каждого из чисел[1]:

$$x_n = 0,\alpha_1^n\alpha_2^n \ldots \alpha_k^n \ldots .$$

Построим теперь новую позиционную запись:

$$0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots,$$

где $\alpha_k \neq \alpha_k^k$ и $\alpha_k \neq 2$. С одной стороны, эта троичная запись соответствует некоторому числу $x \in (0,1)$: в ней все цифры отличны от 2 и по порядку видно, что $x < 1$. С другой стороны, это число отлично от любого из x_n. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Долгое время оставалась нерешенной «континуум-гипотеза» (поставленная еще в 1877 г. Кантором, известная еще под названием «первая проблема Гильберта») о существовании мощностей, промежуточных между счетностью и континуумом. Оказалось, что ни континуум-гипотезу, ни ее отрицание невозможно доказать в рамках общепринятой аксиоматики теории множеств Цермело – Френкеля.

[1]Здесь и далее индексы иногда пишутся сверху. Не следует путать их с показателями степеней.

1.2. Теория предела

1.2.1. Предел последовательности

Абсолютная величина числа. Окрестности

Определение 1.36. ***Модулем*** *или* ***абсолютной величиной*** *числа* $x \in \mathbb{R}$ *называется*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Легко показать (убедитесь в этом самостоятельно), что определение модуля можно дать и в одну строчку:

$$|x| = \max\{x, -x\}. \tag{1.20}$$

Теорема 1.3 (свойства модуля). *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *выполнено:*

1) $|x| \geqslant 0$;
2) $|x| = 0 \iff x = 0$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Доказательство. Свойства 1) и 2) очевидны. Для доказательства 3) сначала запишем два неравенства — $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$ (см. (1.20)) и сложим их: $x + y \leqslant |x| + |y|$. Точно так же из неравенств $-x \leqslant |x|$ и $-y \leqslant |y|$ следует, что $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$. Таким образом, $\max\{x + y, -(x + y)\} \leqslant |x| + |y|$, и, снова используя (1.20), получим неравенство 3).

Для доказательства 4) из уже доказанного свойства 3) выведем неравенство $|x| = |(x - y) + y| \leqslant |y| + |x - y|$ или $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Меняя в нем ролями x и y, получим $|y| - |x| \leqslant |x - y|$. Следовательно,

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} \leqslant |x - y|,$$

и теорема доказана. □

Утверждение 3) теоремы 1.3 называется **неравенством треугольника**. Равенство в нем возможно тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые знаки (проверьте, что это так).

Определение 1.37. ***Окрестностью*** *(рис. 1.12)* U_a *числа* $a \in \mathbb{R}$ *назовем любой интервал* $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$*, содержащий это число. Интервал*

$$U_a(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

будем называть ***ε-окрестностью*** *(см. рис. 1.12) числа* a*.*

Множество $U_a^\circ = U_a \setminus \{a\}$ $(U_a^\circ(\varepsilon) = U_a(\varepsilon) \setminus \{a\})$ *будем называть* ***проколотой (ε-)окрестностью*** *числа* a *(рис. 1.13).*

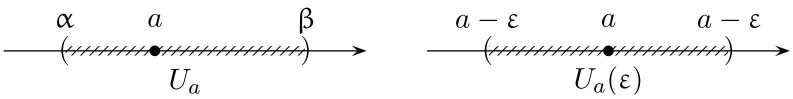

Рис. 1.12. Окрестность и ε-окрестность

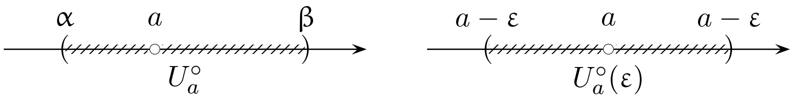

Рис. 1.13. Проколотые окрестности

Предел последовательности

Напомним (см. пример 1.2), что последовательностью (со значениями в X) называется любая функция $a : \mathbb{N} \to X$. Элементы последовательности (значения этой функции) обозначаются a_n. Здесь рассматриваются последовательности со значениями во множестве действительных чисел.

Определение 1.38. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом последовательности*** $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, *если (рис. 1.14)*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.21}$$

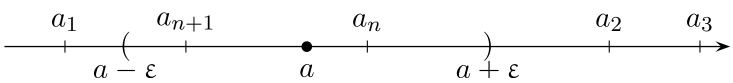

Рис. 1.14

Для краткой записи этого используем обозначения

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Индекс у числа N_ε подчеркивает его зависимость от ε — при изменении ε этот номер будет, вообще говоря, меняться.

На языке окрестностей определение 1.38 можно переформулировать так: в любой ε-окрестности предела находятся все элементы последовательности, начиная с некоторого.

Другая формулировка (без ε): в любой окрестности предела находятся все элементы последовательности с достаточно большими номерами.

Если последовательность имеет предел, то она называется **сходящейся**, в противном случае последовательность называется **расходящейся**.

Отметим также, что свойство последовательности сходиться (расходиться) является асимптотическим — оно не зависит от любого числа первых элементов последовательности. Более точно, если заменить любое конечное число первых элементов сходящейся последовательности любыми другими, то полученная последовательность будет также сходиться.

Рассмотрим теперь ряд примеров, иллюстрирующих определение 1.38. В некоторых из них будет использоваться формула для бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad \text{где} \quad C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.22}$$

(числа C_n^k называются **биномиальными коэффициентами**).

Только что впервые было использовано общепринятое математическое обозначение для суммы: если имеется набор $a_1, \ldots, a_n$ чисел, то для суммы всех чисел из этого набора используется знак

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n. \tag{1.23}$$

Подобное обозначение можно ввести и для произведения

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdots a_n. \tag{1.24}$$

Пример 1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

В самом деле, зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и обозначим $n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ и для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Пример 1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q| < 1.$

Обозначим $\delta = 1/|q| - 1 > 0$ и воспользуемся формулой бинома Ньютона (1.22):

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1/|q|)^n} = \frac{1}{(1+\delta)^n} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \delta^k} < \frac{1}{n\delta} < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant n_\varepsilon$, если $n_\varepsilon = [1/(\delta\varepsilon)] + 1$.

Пример 1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0,\ |q| < 1.$

Здесь рассуждаем аналогично примеру 1.4, только используем оценку

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \delta^k > \frac{n(n-1)}{2}\delta^2.$$

Пример 1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Неравенство $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ равносильно такому: $n < (1+\varepsilon)^n$. Последнее же выполнено, начиная с некоторого номера в силу примера 1.5.

Общие свойства предела

Последовательность называется **ограниченной (сверху, снизу)**, если множество ее элементов ограничено (сверху, снизу).

Другими словами, последовательность $\{a_n\}$ ограничена, если существуют такие числа $m, M \in \mathbb{R}$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Легко убедиться в том, что это равносильно существованию числа $M > 0$, для которого при всех $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leqslant M.$$

Часто будет использоваться именно такая форма ограниченности последовательности.

Теорема 1.4. 1) *Предел последовательности определяется однозначно.*
2) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. 1) Пусть $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a'' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, но $a' \neq a''$. Положим $\varepsilon = |a' - a''|/2 > 0$ и для него найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы $|a_n - a'| < \varepsilon$ при $n \geqslant N'_\varepsilon$ и $|a_n - a''| < \varepsilon$ при $n \geqslant N''_\varepsilon$. Обозначим $n = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, тогда

$$|a_n - a'| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |a_n - a''| < \varepsilon.$$

Отсюда получим противоречие

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|a' - a''| \leqslant \frac{1}{2}(|a_n - a'| + |a_n - a''|) < \varepsilon.$$

2) Для $\varepsilon = 1$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a| < 1$ при всех $n \geqslant N$. Тогда

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| \leqslant 1 + |a| \quad \text{при} \quad n \geqslant N.$$

Если обозначить $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$, то неравенство $|a_n| \leqslant M$ выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Предел и арифметические операции

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, то их суммой, произведением и частным называются соответственно последовательности $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ и $\{a_n/b_n\}$ (в последнем случае должно быть $b_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$).

Теорема 1.5. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — сходящиеся последовательности, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3) *если $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $b \neq 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Доказательство. 1) Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon \quad \text{и} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

Обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$, тогда

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon.$$

Поэтому для $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) В силу утверждения 2) теоремы 1.4 последовательность $\{a_n\}$ ограничена, т. е. существует число $A > 0$ такое, что $|a_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,(|b| + 1)} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon \quad \text{и} \quad |b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2A} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

Обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Тогда последние два неравенства выполнены одновременно при всех $n \geqslant N_\varepsilon$. Поэтому для таких n

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \leqslant |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a| \leqslant$$

$$\leqslant A\frac{\varepsilon}{2A} + |b|\,\frac{\varepsilon}{2\,(|b| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3) Найдется такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_0.$$

Поскольку $|b_n - b| \geqslant |b| - |b_n|$, из предыдущего неравенства получим

$$|b_n| \geqslant \frac{|b|}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant N_0.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы

$$|a_n - a| \leqslant \frac{|b|\,\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon \quad \text{и} \quad |b_n - b| \leqslant \frac{|b|^2\,\varepsilon}{4\,|a|} \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

Обозначим $N_\varepsilon = \max\{N_0, N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b|\,|b_n|} = \frac{|(a_n b - ab) + (ab - ab_n)|}{|b|\,|b_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|\,|b_n - b|}{|b|\,|b_n|} \leqslant \frac{2\,|a_n - a|}{|b|} + \frac{2\,|a|\,|b_n - b|}{|b|^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это рассуждение справедливо, если $a \neq 0$. При $a = 0$ доказательство только упрощается (проведите его самостоятельно). □

Предельный переход в неравенствах

Теорема 1.6. *Пусть* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *— сходящиеся последовательности,* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *и* $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1) *Если* $a < b$, *то, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства* $a_n < b_n$, *т. е.*

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad a_n < b_n.$$

2) *Если, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства* $a_n \leqslant b_n$, *то* $a \leqslant b$.

Доказательство. 1) Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, тогда можно указать номер $N \in \mathbb{N}$ так, что $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. В частности, для $n \geqslant N$

$$a_n - a < \varepsilon \quad \text{и} \quad -\varepsilon < b_n - b,$$

поэтому $a_n < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n$.

2) Предположив противное, сразу придем к противоречию с утверждением 1). □

Отметим, что из неравенств $a_n < b_n$ не следует, вообще говоря, что $a < b$. Для примера достаточно рассмотреть последовательности $a_n = 1/n$ и $b_n = 0$.

В частности, из теоремы 1.6 вытекает, что

1) если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a_n \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$;

2) если $a > 0$, то $a_n > 0$, начиная с некоторого номера.

Теорема 1.7 (о двух милиционерах). *Пусть заданы последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$ и первые две из них сходятся к одному пределу*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

причем, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n.$$

Тогда $\{x_n\}$ — сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство. Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и найдем номера N'_ε и N''_ε так, чтобы

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N'_\varepsilon \quad \text{и} \quad |b_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N''_\varepsilon.$$

Обозначим $N_\varepsilon = \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_\varepsilon$

$$a_n > a - \varepsilon, \quad b_n < a + \varepsilon,$$

поэтому

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant x_n \leqslant b_n < a + \varepsilon,$$

т. е. $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. $\square$

Шуточное название этой теоремы объясняется так: «милиционеры» $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ идут в отделение a, «хулиган» $\{x_n\}$, находящийся между ними, естественно, попадает туда же.

Бесконечно малые и бесконечно большие

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\{a_n\}$ называется **бесконечно малой**.

Теорема 1.8. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *бесконечно малая последовательность ограничена;*

2) *сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность;*

3) *произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность — бесконечно малая последовательность.*

Доказательство проведите самостоятельно — это несложно.

Определение 1.39. *Если*

$$\forall A > 0 \quad \exists N_A \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_A \quad |a_n| > A,$$

то последовательность $\{a_n\}$ называется ***бесконечно большой****, будем писать тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.*

Подчеркнем, что в этом случае предел не существует. Условимся записывать в таком виде факт специальной расходимости последовательности. Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно большая последовательность, положительная (отрицательная), начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right).$$

Символы Ландау для последовательностей

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две числовые последовательности, причем $b_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Запись $a_n = O\left(b_n\right)$ (читается «a_n есть O-большое от b_n») означает, что $\{a_n/b_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant M.$$

Запись $a_n = o\left(b_n\right)$ (читается «a_n есть o-малое от b_n») означает, что $\{a_n/b_n\}$ — бесконечно малая последовательность, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Запись $a_n \asymp b_n$ (читается «a_n и b_n слабо эквивалентны») означает, что одновременно

$$a_n = O\left(b_n\right) \quad \text{и} \quad b_n = O\left(a_n\right).$$

Запись $a_n \sim b_n$ (читается «a_n и b_n эквивалентны») означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Такие термины и обозначения обычно применяют к паре бесконечно малых или бесконечно больших последовательностей для сравнения их поведения[1].

Важнейшие последовательности и их сравнение

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся бесконечно большие последовательности и выясним, какие из них растут быстрее, а какие медленнее. При этом результаты будут сформулированы в терминах предыдущего раздела.

[1]Обычно введенные выше символы называют символами Ландау. На самом деле символы «O» и «o» ввели Бахман и Ландау, символ «$\sim$» впервые использовал Дюбуа-Реймон (см. об этом в [1, с. 19]).

Сначала перечислим эти последовательности, располагая их в порядке возрастания скорости роста:

$$(\log_a n)^\alpha, \quad n^\beta, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n.$$

Здесь α и β — любые положительные числа, $a > 1$.

Докажем теперь следующие соотношения:

$$(\log_a n)^\alpha = o\left(n^\beta\right) \text{ при любых } \alpha, \beta > 0,\ a > 1, \tag{1.25}$$

$$n^\alpha = o\left(a^n\right) \text{ при любых } \alpha > 0,\ a > 1, \tag{1.26}$$

$$a^n = o\left(n!\right) \text{ при любом } a > 1, \tag{1.27}$$

$$n! = o\left(n^n\right). \tag{1.28}$$

Докажем (1.25). После несложных преобразований получим

$$\frac{(\log_a n)^\alpha}{n^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\log_a a_n}{a_n}\right)^\alpha, \text{ где } a_n = n^{\beta/\alpha}.$$

Итак, надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a a_n}{a_n} = 0$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$, тогда неравенство $\dfrac{\log_a a_n}{a_n} < \varepsilon$ равносильно такому: $a_n < (a^\varepsilon)^{a_n}$. Однако

$$\frac{a_n}{(a^\varepsilon)^{a_n}} \leqslant 2\frac{[a_n]}{(a^\varepsilon)^{[a_n]}} < 1,$$

причем последнее неравенство выполнено для всех достаточно больших n в силу примера 1.5, так как $a^\varepsilon > 1$.

Доказательство (1.26) вытекает из примера 1.5 и равенства

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \left(\frac{n}{\left(a^{1/\beta}\right)^n}\right)^\beta.$$

Для доказательства (1.27) возьмем натуральное число $m > a$. Тогда

$$\frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{m^{n-m}} = m^m \left(\frac{a}{m}\right)^n,$$

и можно воспользоваться результатом примера 1.4.

Наконец, для доказательства (1.28) используем неравенство

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} < \frac{1}{n}$$

и теорему 1.7.

1.2.2. Различные формы полноты

Из аксиомы полноты (см. аксиому 16) в определении 1.25) множества действительных чисел выведем ряд важных утверждений. Некоторые из них могут служить эквивалентной заменой этой аксиомы для построения теории действительных чисел. Другие послужат основой для дальнейших обобщений, которые сыграют существенную роль в развитии топологии и функционального анализа. В математическом анализе эти утверждения являются базовми техническими приемами при доказательствах теорем.

Стягивающиеся сегменты

Последовательность сегментов $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется **вложенной**, если (рис. 1.15)

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность вложенных сегментов называется **стягивающейся**, если дополнительно

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

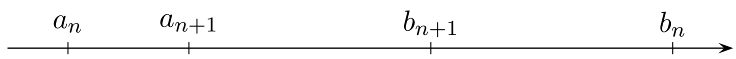

Рис. 1.15. Вложенные сегменты

Лемма 1.7 (Кантора о вложенных сегментах). *Если $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов, то существует число, принадлежащее всем сегментам, т. е.*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing.$$

Если $\{I_n\}$ — последовательность стягивающихся сегментов, то это число единственно.

Доказательство. Условие вложенности сегментов означает возрастание последовательности $\{a_n\}$ и убывание последовательности $\{b_n\}$, т. е.

$$a_n \leqslant a_{n+1}, \quad b_{n+1} \leqslant b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда вытекает, что

$$a_n \leqslant b_m \quad \text{для всех} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

В самом деле, если предположить, что $a_n > b_m$ при некоторых n и m, тогда $a_n > b_m \geqslant b_n$ при $n > m$ и $a_m \geqslant a_n > b_m$ при $n < m$, что невозможно.

Это показывает, что множества $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условиям аксиомы полноты, поэтому существует число $c \in \mathbb{R}$, для которого

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \text{ для всех } n,\ m \in \mathbb{N}.$$

В частности, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

В случае стягивающихся сегментов

$$0 \leqslant b_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0.$$

По теореме 1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, значит, такое число c единственно. □

Покрытия

Пусть $S = \{X\}$ — некоторая система множеств. Будем говорить, что S покрывает множество Y, если

$$Y \subset \bigcup_{X\in S} X.$$

Другими словами, это означает, что каждая точка множества Y принадлежит по крайней мере одному из множеств системы S. В этом случае S также называется **покрытием множества** Y.

Лемма 1.8 (Бореля – Лебега). *Из любой системы интервалов, покрывающей сегмент, можно выделить конечную подсистему интервалов, покрывающую этот сегмент.*

Доказательство. Пусть S — система интервалов, покрывающая сегмент $I = [a, b]$. Допустим, что I не покрывается конечным числом интервалов из S. Тогда одна из его половин — $[a, (a + b)/2]$ или $[(a + b)/2, b]$ — также не покрывается конечным числом интервалов из S. Обозначим эту половину $I_1 = [a_1, b_1]$. Одна из половин I_1 также не покрывается конечным числом интервалов из S — пусть это $I_2 = [a_2, b_2]$. Продолжая процесс по индукции, получим последовательность сегментов $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ со следующими свойствами:

1) $\{I_n\}$ — последовательность вложенных сегментов;
2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$;
3) I_n не покрывается конечным числом множеств из S.

По лемме Кантора существует точка c, принадлежащая всем I_n. Так как $c \in I$, то найдется интервал $(\alpha, \beta) \in S$, содержащий точку c. Обозначим $\varepsilon = \min\{c - \alpha, \beta - c\} > 0$, тогда $b_n - a_n < \varepsilon$ для достаточно больших n. Отсюда $I_n \subset (\alpha, \beta)$ для таких n и I_n покрывается одним (!) интервалом из S. Это противоречит тому, что каждый I_n не покрывается конечным числом интервалов из покрытия. □

Отметим, что из покрытия интервала интервалами конечное подпокрытие можно выделить не всегда. В самом деле,

$$(0,1)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right),$$

и никакое конечное число интервалов из объединения справа не покрывает интервал $(0,1)$.

Предельные точки

Определение 1.40. *Число $x\in\mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой*** *множества $X\subset\mathbb{R}$, если в любой окрестности x находится бесконечно много элементов множества X.*

Упражнение 1.14. Доказать, что определение предельной точки множества равносильно каждому из следующих утверждений:

1) в любой окрестности x есть по крайней мере один элемент из X, отличный от x;

2) существует последовательность $\{x_n\}$ различных точек множества X, сходящаяся к x.

Лемма 1.9 (Больцано – Вейерштрасса). *Каждое бесконечное ограниченное множество $X\subset\mathbb{R}$ имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Так как X ограничено, то существует сегмент $[a,b]$, содержащий это множество: $X\subset[a,b]$.

Предположим, что X не имеет предельных точек. В частности, каждая точка $x\in[a,b]$ не является предельной для X. Следовательно, для любого $x\in[a,b]$ существует окрестность U_x (см. определение 1.37) этой точки, в которой лишь конечное число точек из X.

Семейство интервалов $\{U_x : x\in[a,b]\}$ покрывает сегмент $[a,b]$. По лемме 1.8 Бореля – Лебега существует конечное подпокрытие $U_{x_1},U_{x_2},\ldots,U_{x_n}$ отрезка $[a,b]$, в частности, эти интервалы покрывают X. В то же время в каждом интервале U_{x_k}, $k=1,\ldots,n$, есть лишь конечное число элементов из X, а множество X бесконечно — противоречие. □

Критерий Коши

Использование определения 1.38 предела последовательности для проверки ее сходимости не всегда удобно. Если с его помощью пытаться доказать сходимость, то необходимо заранее знать, чему равен предполагаемый предел. Если же нужно доказать расходимость, то придется доказывать, что никакое число не является пределом. Поэтому возникает необходимость в отыскании «внутренних условий», позволяющих судить о сходимости, основываясь только на информации о поведении элементов последовательности.

Определение 1.41. *Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется* ***фундаментальной (последовательностью Коши)****, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{1.29}$$

Условие фундаментальности можно переписать в эквивалентном виде:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Очевидно, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. В самом деле, по $\varepsilon > 0$ найдем $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Тогда при $n, m \geqslant N_\varepsilon$

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Гораздо важнее то, что справедливо обратное утверждение.

Теорема 1.9 (критерий Коши). *Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Фундаментальность сходящейся последовательности отмечалась перед формулировкой теоремы. Докажем обратное.

Сначала покажем, что фундаментальная последовательность ограничена. Для $\varepsilon > 0$ найдем номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n, m \geqslant N_\varepsilon$$

или при $m = N_\varepsilon$:

$$a_{N_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_{N_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n \geqslant N_\varepsilon \tag{1.30}$$

(отсюда при $\varepsilon = 1$ легко следует ограниченность $\{a_n\}$ — см. доказательство части 2) теоремы 1.4).

Далее введем две последовательности:

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}.$$

Ясно, что $\overline{a}_n$ убывает, а $\underline{a}_n$ возрастает. Тогда $\{[\underline{a}_n, \overline{a}_n]\}$ — последовательность вложенных сегментов, причем

$$\underline{a}_n \leqslant a_m \leqslant \overline{a}_n \text{ при } m \geqslant n.$$

По лемме Кантора найдется точка $a \in \mathbb{R}$, общая для всех сегментов, т. е.

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Итак, при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполнены неравенства (см. (1.30))

$$|a_n - a| \leqslant \overline{a}_n - \underline{a}_n \leqslant \overline{a}_{N_\varepsilon} - \underline{a}_{N_\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant N_\varepsilon. \quad \square$$

Пример 1.7. Рассмотрим последовательность

$$H_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.31}$$

и покажем с помощью критерия Коши, что она расходится.

В самом деле,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \quad \exists\, m \geqslant n \geqslant N \quad |H_m - H_n| \geqslant \varepsilon$$

(можно взять $\varepsilon = 1/2$, $m = 2N$, $n = N$). Получено отрицание утверждения о том, что последовательность H_n фундаментальна. В силу критерия Коши последовательность $\{H_n\}$ расходится.

1.2.3. Монотонные последовательности

Предел монотонной последовательности

Определение 1.42. *Последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ называется* ***возрастающей (убывающей)****, если*

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}) \quad \textit{при} \quad n \geqslant 1.$$

Если эти неравенства строгие, то $\{a_n\}$ называется ***строго возрастающей*** *(соответственно* ***строго убывающей****).*

Часто применяют объединяющие термины: «**монотонная**» последовательность — для убывающей и возрастающей, а также «**строго монотонная**» — для строго убывающей и строго возрастающей.

Теорема 1.10. *Пусть* $\{a_n\}$ — *возрастающая (убывающая) последовательность. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\{a_n\}$ *сходится;*

2) $\{a_n\}$ *ограничена сверху (снизу).*

При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right). \tag{1.32}$$

Доказательство. Утверждение 1) $\Longrightarrow$ 2) справедливо и без предположения о монотонности (см. часть 2) теоремы 1.4).

Утверждение 2) $\Longrightarrow$ 1) докажем для возрастающих $\{a_n\}$. Для убывающих оно такое же (проведите его самостоятельно).

Пусть $M = \sup\{a_n\}$. Тогда по определению точной верхней границы для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что $a_{N_\varepsilon} > M - \varepsilon$. Поэтому в силу монотонности при $n \geqslant N_\varepsilon$

$$M - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant M \quad \text{и} \quad 0 \leqslant M - a_n < \varepsilon. \quad \square$$

Число Эйлера

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.33}$$

При возрастании n основание степени становится все ближе к единице, а показатель степени n неограничен. Поэтому асимптотическое поведение этой последовательности непредсказуемо, по крайней мере с первого взгляда. Тем не менее она ведет себя достаточно регулярно и, в частности, сходится. В этом будет состоять содержание следующей теоремы 1.11.

Предел этой замечательной последовательности (обозначается e и называется **числом Эйлера**) имеет не меньшее значение в математике, чем знаменитое число π (отношение длины любой окружности к ее диаметру).

Между этими двумя великими числами существует тесная связь. Начинающий математик удивится, что π и e обычно действуют совместно в самых различных математических законах[1]. Но он неоднократно будет иметь возможность убедиться в этом при изучении теории функций комплексного переменного, теории вероятностей и других разделов математики.

Для доказательства сходимости последовательности (1.33) понадобится вспомогательное утверждение.

[1] Тем не менее до сих пор *никому* не известно, является ли рациональным число $\pi - e$.

Лемма 1.10 (неравенство Бернулли). *Для любых* $\alpha > -1$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n. \tag{1.34}$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ это неравенство очевидно. Предположим, что оно верно для n, тогда

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) =$$

$$= 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.$$

Следовательно, оно верно для $n+1$. $\square$

Теорема 1.11. *Последовательность* (1.33) *сходится.*

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона (1.22), получим

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^{-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k n^{-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Каждое слагаемое в последней сумме увеличивается с ростом n и число слагаемых также увеличивается, поэтому $\{a_n\}$ возрастает.

Кроме того, в силу очевидного неравенства $k! \geqslant 2^{k-1}$

$$a_n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} 2^{-k+1} = 3 - 2^{-(n-1)} < 3$$

и $\{a_n\}$ ограничена. По теореме 1.10 $\{a_n\}$ сходится.

Приведем теперь другое доказательство. Докажем сходимость последовательности $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Используя неравенство Бернулли (1.34), получим

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} >$$

$$> \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Следовательно, $\{b_n\}$ — убывающая последовательность. Кроме того, очевидно, что она ограничена снизу нулем. По теореме 1.10 $\{b_n\}$ сходится. Так как $b_n = a_n\,(1 + 1/n)$, то по теореме 1.5 $\{a_n\}$ также сходится. $\square$

Предел последовательности (1.33) называется **числом Эйлера** и обозначается e.

Асимптотика некоторых сумм

Отметим, что метод доказательства теоремы 1.11 показывает, что справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geqslant 2. \tag{1.35}$$

Используя их, докажем следующее утверждение о поведении расходящихся сумм (см. пример 1.7):

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Теорема 1.12. *Существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n+1) + C + \varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Прологарифмируем неравенства (1.35):

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 2. \tag{1.36}$$

Далее, суммируя эти неравенства, придем к соотношениям

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{1.37}$$

или

$$0 < a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) < 1.$$

Это означает, что последовательность a_n ограничена.

Рассмотрим разности

$$a_{n+1} - a_n = \left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу (1.36). Это означает, что последовательность a_n строго возрастает. По теореме 1.10 существует $\lim_{n\to\infty} a_n = C$.

Наконец, перепишем последнее неравенство в виде

$$0 < a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) < \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Снова было использовано (1.36). Просуммируем это неравенство по всем $k = n, n+1, \ldots, n+p-1$:

$$0 < a_{n+p} - a_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$$

и, перейдя здесь к пределу при $p \to \infty$, получим

$$0 < \varepsilon_n := C - a_n \leqslant \frac{1}{n+1}. \quad \square$$

Несколько позже (см. подп. 1.5.8) будет найден общий метод получения асимптотик подобных сумм.

Число C, существование которого установлено в теореме 1.12, также называется числом Эйлера. Из доказательства теоремы легко вывести неравенства $0 < C < 1$[1].

1.2.4. Частичные пределы

Лемма Больцано – Вейерштрасса

Пусть $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ — последовательность и $n_1 < n_2 < \ldots$ — последовательность натуральных чисел. Тогда $\{a_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** для $\{a_n\}$.

Определение 1.43. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется* ***частичным пределом*** *последовательности $\{a_n\}$, если для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Лемма 1.11 (Больцано – Вейерштрасса). *Каждая ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.*

Доказательство. Если множество различных элементов в последовательности $\{a_n\}$ конечно, то по крайней мере один из них встречается в последовательности бесконечно много раз, т. е. $a_{n_k} = a$ для некоторой подпоследовательности индексов $\{n_k\}$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Если множество различных элементов в $\{a_n\}$ бесконечно, то по лемме 1.9 Больцано – Вейерштрасса это множество имеет предельную точку a. Пусть n_1 таково, что $|a_{n_1} - a| < 1$. Если номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже построены, то найдем n_k так, чтобы $n_k > n_{k-1}$ и $|a_{n_k} - a| < 1/k$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. $\square$

[1]До сих пор неизвестно, является ли число C иррациональным.

Верхний и нижний пределы

Определение 1.44. *Точная верхняя (нижняя) граница множества частичных пределов ограниченной последовательности называется ее **верхним** (соответственно **нижним**) **пределом** и обозначается*[1]

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \left(\textit{соответственно} \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n\right).$$

Существование верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности обеспечивается теоремой 1.1 и леммой 1.11.

Суть верхнего и нижнего пределов хоть и выражена в определении весьма кратко, но тем не менее скрывается за терминологией, что затрудняет использование этих понятий. Следующее утверждение дает более ясное выражение содержания понятия верхнего предела.

Теорема 1.13. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда*
1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *является частичным пределом;*
2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n < \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon.$
Верхний предел $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *— единственное число со свойствами 1) и 2).*

Доказательство. 1) Пусть L — множество частичных пределов для $\{a_n\}$, тогда $L \neq \varnothing$ по лемме 1.11. Обозначим

$$\overline{a} = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup L.$$

По определению точной верхней границы найдется такое $a \in L$, что $\overline{a} - 1 < a \leqslant \overline{a}$. По определению частичного предела можно указать номер n_1 так, что $|a - a_{n_1}| < 1$, тогда $|\overline{a} - a_{n_1}| < 2$. Если номера $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ уже построены, то $n_k > n_{k-1}$ определим так: существует $a \in L$ со свойством $\overline{a} - 1/k < a \leqslant \overline{a}$ и найдется номер $n_k > n_{k-1}$ со свойством $|a - a_{n_k}| < 1/k$, тогда $|\overline{a} - a_{n_k}| < 2/k$. Таким образом, по индукции построена подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{a}$.

2) Если допустить противное, т. е.

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, N \quad \exists\, n \geqslant N \quad a_n > \overline{a} + \varepsilon_0,$$

то по индукции легко строится такая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, что $a_{n_k} > \overline{a} + \varepsilon_0$. Из ограниченной последовательности $\{a_{n_k}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{n_{k_i}} \to a \geqslant \overline{a} + \varepsilon_0$ (см. теорему 1.6). Это противоречит тому, что $\overline{a} = \sup L$.

[1] В англоязычной математической литературе вместо $\varlimsup$ и $\varliminf$ используются соответственно обозначения $\limsup$ и $\liminf$.

Единственность. Пусть число $\overline{a}$ таково, что оно является частичным пределом для $\{a_n\}$ и

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n < \overline{a} + \varepsilon.$$

Докажем, что $\overline{a} = \max L$. Пусть $a \in L$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, тогда по теореме 1.6 из неравенств $a_{n_k} < \overline{a} + \varepsilon$ следует $a \leqslant \overline{a} + \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ — любое, поэтому $a \leqslant \overline{a}$. Таким образом, $\overline{a}$ — максимальный элемент в L. □

Подобное утверждение справедливо, конечно, и для нижнего предела.

Теорема 1.14. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда*
1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *является частичным пределом;*
2) $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad a_n > \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon.$

Нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *— единственное число со свойствами 1) и 2).*

Предлагаем самостоятельно доказать это утверждение.

В частности, из утверждений теорем 1.13 и 1.14 следует, что верхний и нижний пределы показывают характер асимптотического разброса элементов ограниченной последовательности: для любого $\varepsilon > 0$ интервал

$$\left(\varliminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon,\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon\right)$$

содержит все элементы последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого.

Теорема 1.15. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Тогда для сходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Доказательство. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Поэтому по теореме 1.6 и части 1) теорем 1.13 и 1.14 для любого $\varepsilon > 0$

$$a - \varepsilon \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant a + \varepsilon$$

и $0 \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Обратное утверждение вытекает непосредственно из утверждения 2) теорем 1.13 и 1.14. □

Монотонные перестановки последовательности

Покажем, что верхний и нижний пределы последовательности можно вычислить «внутренним образом», т. е. в терминах элементов самой последовательности, не прибегая к нахождению множества частичных пределов и его точных границ.

Если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, то можно определить следующие две последовательности:

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k : k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k : k \geqslant n\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.38}$$

(они уже появлялись при доказательстве критерия Коши, см. теорему 1.9). Эти последовательности удовлетворяют неравенствам

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \quad \underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad n \geqslant 1, \tag{1.39}$$

поэтому их часто называют **монотонными перестановками** $\{a_n\}$: $\{\underline{a}_n\}$ — возрастающей, а $\{\overline{a}_n\}$ — убывающей.

Теорема 1.16. *Для любой ограниченной последовательности* $\{a_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Доказательство. Докажем утверждение теоремы, например для верхнего предела (для нижнего предела докажите самостоятельно).

Сначала заметим, что последовательность $\{\overline{a}_n\}$ сходится. Это следует из теоремы 1.10 — она убывает и ограничена снизу, так как ограничена последовательность $\{a_n\}$ (см. (1.38)).

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim_{k\to\infty} \overline{a}_{n_k} \geqslant \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Докажем обратное неравенство. Пусть $\varepsilon > 0$. Из части 2) теоремы 1.14 вытекает, что $\overline{a}_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon$ при $n \geqslant N_\varepsilon$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. $\square$

1.2.5. Предел функции

Предел функции по Коши

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка ее области определения D. Следующее определение обычно называют определением **предела функции по Коши**.

Определение 1.45. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом*** *функции f в точке a, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{1.40}$$

Краткая запись этого:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{D\ni x\to a} f(x) = b.$$

Подчеркнем, что в самой точке a функция f не обязана быть определенной — значение $f(a)$ не используется в определении. Но точка a должна быть предельной для области определения, т. е. сколь угодно близко к a есть точки из D, отличные от a.

В терминах окрестностей (1.40) выглядит так:

$$\forall\, V_b \quad \exists\, U_a^\circ \quad f\left(U_a^\circ \cap D\right) \subset V_b$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad f\left(U_a^\circ(\delta) \cap D\right) \subset V_b(\varepsilon).$$

Теорема 1.17 (критерий Гейне). *Следующие условия равносильны*[1]*:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ *для любой последовательности* $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и задана последовательность $\{x_n\} \subset D$, $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Тогда по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, что из $0 < |x - a| < \delta$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$. По $\delta > 0$ определим номер $N \in \mathbb{N}$ так, что при всех $n \geqslant N$ будет $|x_n - a| < \delta$. Тогда при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим противное, тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in D \quad (0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geqslant \varepsilon_0)\,.$$

Взяв $\delta = 1/n$, найдем отсюда $x_n \in D$ так, чтобы $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon_0$ — противоречие. $\square$

Определение 1.46. *Функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *называется* ***ограниченной****, если множество ее значений* $f\,(D)$ *ограничено. Если* $f\,(D)$ *ограничено сверху (снизу), то и* f *называется* ***ограниченной сверху (снизу)****.*

В явном виде ограниченность функции означает, что

$$\exists\, m \quad \exists\, M \quad \forall\, x \in D \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

или эквивалентно

$$\exists\, M \geqslant 0 \quad \forall\, x \in D \quad |f(x)| \leqslant M.$$

[1] Обычно на условие 2) теоремы 1.17 ссылаются как на определение **предела функции по Гейне**.

Определение 1.47. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется* ***локально ограниченной в точке*** a, *если существует такая окрестность U_a этой точки, что множество $f\,(D \cap U_a)$ ограничено.*

Теорема 1.18 (общие свойства предела функции).

1) *Функция может иметь только один предел в точке.*

2) *Если функция имеет предел в некоторой точке, то она локально ограничена в этой точке.*

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из теоремы 1.17 и единственности предела последовательности (теорема 1.4).

Утверждение 2) доказывается так: существует $\delta > 0$, для которого $f\,(D \cap U_a^{\circ}(\delta)) \subset U_b(1)$, поэтому множество $f\,(D \cap U_a^{\circ}(\delta))$ ограничено. $\square$

Предел и операции над функциями

Арифметические операции над функциями определяются естественным образом:

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D_f \cap D_g;$$

$$(fg)\,(x) = f(x)g(x), \quad x \in D_f \cap D_g;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in (D_f \cap D_g) \setminus g^{-1}\left(\{0\}\right),$$

где D_f и D_g — области определения функций f и g соответственно.

Теорема 1.19 (предел и арифметические операции). *Пусть a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}$ и функции $f : D \to \mathbb{R}$ и $g : D \to \mathbb{R}$ имеют пределы в точке a. Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a} (f+g)\,(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} (fg)\,(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) *если дополнительно* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Доказательство немедленно вытекает из соответствующих свойств предела последовательности (теорема 1.5) и теоремы 1.17. Лишь при доказательстве 3) надо сначала отметить, что если $c = \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то по определению предела для $\varepsilon = |c|/2 > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при всех $x \in U_a^{\circ}(\delta) \cap D$ выполнено неравенство $|g(x) - c| < |c|/2$, т. е. для таких x $|g(x)| > |c|/2 > 0$ и $g(x) \neq 0$. $\square$

Можно было бы ожидать, что из

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{y\to b} g(y) = l$$

следует, что

$$\lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = l$$

(конечно, в предположении $f\left(D_f\right) \subset D_g$). Следующий пример показывает, что это не так.

Пусть

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \neq 0, \\ 1, \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{y \to 0} g(y) = 0, \quad \lim_{x \to 0} g\left(f(x)\right) = 1.$$

Докажем две теоремы, которые при определенных условиях все же позволяют делать вывод о существовании предела у суперпозиции функций.

Теорема 1.20. *Пусть функции $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $g : D_g \to \mathbb{R}$ таковы, что $f\left(D_f\right) \subset D_g$,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{y \to b} g(y) = g(b).$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = g\left(b\right).$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$ таким образом, чтобы $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$ при всех $y \in D_g$, $|y - b| < \delta_1$. Для этого $\delta_1 > 0$ найдем $\delta_2 > 0$ так, чтобы $|f(x) - b| < \delta_1$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_2$. Тогда при всех x таких выполнено неравенство $|g\left(f(x)\right) - g(b)| < \varepsilon$. $\square$

Теорема 1.21. *Пусть функции $f : D_f \to \mathbb{R}$ и $g : D_g \to \mathbb{R}$ таковы, что $f\left(D_f\right) \subset D_g$,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{y \to b} g(y) = c$$

и $f(x) \neq b$ в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда

$$\lim_{x \to a} g\left(f(x)\right) = c.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta_1 > 0$ таким образом, чтобы $|g(y) - c| < \varepsilon$ при всех $y \in D_g$, $0 < |y - b| < \delta_1$. Для этого $\delta_1 > 0$ найдем $\delta_2 > 0$ так, чтобы $|f(x) - b| < \delta_1$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_2$. Кроме того, найдется такое $\delta_3 > 0$, что $f(x) \neq b$ при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta_3$. Если взять $\delta := \min\{\delta_2, \delta_3\} > 0$, то при всех $x \in D_f$, $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|g\left(f(x)\right) - c| < \varepsilon$. $\square$

Предел функции и неравенства

Теорема 1.22. *Пусть функции $f : D \to \mathbb{R}$ и $g : D \to \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:
1) если $b < c$, то найдется такая окрестность U_a, что

$$\forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < g(x);$$

2) если неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ выполнено для всех x из некоторой проколотой окрестности U_a°, то $b \leqslant c$.

Доказательство. 1) Положим $\varepsilon = (c - b)/2 > 0$. Тогда по определению предела

$$\exists\,\delta_1 > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

$$\exists\,\delta_2 > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - c| < \varepsilon.$$

Если взять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, то при всех $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$, выполнены неравенства

$$f(x) < b + \varepsilon = c - \varepsilon < g(x).$$

2) Если предположить противное, то мы сразу приходим к противоречию с уже доказанным утверждением 1). □

Теорема 1.23. *Пусть $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ и*

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

в некоторой проколотой окрестности U_a°. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Доказательство вытекает из соответствующей теоремы 1.7 для последовательностей и «определения предела по Гейне» (см. теорему 1.17). □

Два замечательных предела

Теорема 1.24. *Справедливы следующие утверждения:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{— \textbf{\textit{первый замечательный предел}};} \tag{1.41}$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e \quad \text{— \textbf{\textit{второй замечательный предел}}.} \tag{1.42}$$

Доказательство (1.41) использует известные неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\},$$

или

$$1 - \frac{x^2}{2} < 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Крайние части неравенства сходятся к 1 при $x \to 0$, поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 1.23.

Докажем (1.42). Пусть $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$. Сначала предположим, что $x_n > 0$. Тогда $0 < x_n < 1$ для достаточно больших n. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m_n \in \mathbb{N}$ со свойством

$$\frac{1}{m_n + 1} < x_n \leqslant \frac{1}{m_n}.$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} < (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leqslant \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}.$$

Крайние последовательности сходятся к e по теореме 1.11.

Если $x_n < 0$ для всех n, то обозначим $x'_n = -x_n$ и преобразуем выражение

$$(1 + x_n)^{\dfrac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{x'_n}{1 - x'_n}\right)^{\dfrac{1 - x'_n}{x'_n} + 1}.$$

Поскольку $y_n = \dfrac{x'_n}{1 - x'_n} > 0$ и $y_n \to 0$, то по доказанному последнее выражение сходится к e.

В общем случае, когда в последовательности x_n бесконечно много чисел разных знаков, разобьем ее на две подпоследовательности. □

Односторонние пределы

Для множества $D \subset \mathbb{R}$ введем обозначения

$$D_{a+} := D \cap (a, +\infty), \quad D_{a-} := D \cap (-\infty, a). \tag{1.43}$$

Определение 1.48. *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$. Если a является предельной точкой для D_{a+} (D_{a-}), то **правым (левым) пределом** функции f в точке a называется предел сужения $f|_{D_{a+}}$ (соответственно $f|_{D_{a-}}$). Обозначение $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ или $f(a \pm 0)$.*

Общее название для $f(a \pm 0)$ — **односторонние пределы**.

Другими словами, запись $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ в явном виде означает

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

а запись $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ соответственно

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Так как $D \setminus \{a\} = D_{a+} \cup D_{a-}$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.25. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ и a является предельной точкой для $D_{a\pm}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *существует;*

2) $\lim\limits_{x \to a\pm 0} f(x)$ *существуют и они равны.*

Доказательство проведите самостоятельно.

Пределы на бесконечности

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$, причем ее область определения D не является ограниченной сверху. Тогда число b называется пределом функции f на $+\infty$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad x > \Delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

В таком случае будем писать $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Аналогично вводится предел $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ на $-\infty$ (тогда D должно быть неограниченным снизу):

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad x < -\Delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Наконец, запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad |x| > \Delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

На такие типы пределов легко распространить теоремы 1.18–1.23. При этом под окрестностью бесконечности понимаются интервалы вида $(a, +\infty)$ для $+\infty$, $(-\infty, a)$ для $-\infty$ и $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ для ∞.

Общее определение предела функции по базе

Рассмотрим различные типы пределов (обычный предел, односторонние пределы, пределы на бесконечности) с единой точки зрения.

Определение 1.49. *Совокупность подмножеств $\mathcal{B}$ множества $\mathbb{R}$ называется* ***базой****, если выполнены следующие два условия:*

1) $\forall B \in \mathcal{B} \quad B \neq \varnothing$;
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad B \subset B_1 \cap B_2$.

Примерами могут служить базы
«$x \to a$»$:= \{U_a^\circ : U_a^\circ$ — проколотая окрестность точки $a\}$;
«$x \to a+0$»$:= \{(a, a+\delta) : \delta > 0\}$;
«$x \to a-0$»$:= \{(a-\delta, a) : \delta > 0\}$;
«$x \to \infty$»$:= \{(-\infty, -\Delta) \cup (\Delta, +\infty) : \Delta > 0\}$;
«$x \to +\infty$»$:= \{(\Delta, +\infty) : \Delta > 0\}$;
«$x \to -\infty$»$:= \{(-\infty, -\Delta) : \Delta > 0\}$.

Определение 1.50. *Число b называется* ***пределом по базе*** *$\mathcal{B}$ функции $f : D \to \mathbb{R}$, если $D \cap B \neq \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{B}$ и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in D \cap B \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Кратко это записывается так: $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = b$.

В терминах окрестностей определение 1.50 можно переписать так:

$$\forall U_b \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad f(D \cap B) \subset U_b.$$

Ясно, что в случае перечисленных баз получим уже принятые нами определения предела.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Пусть заданы функция $f : D \to \mathbb{R}$ и база $\mathcal{B}$. Будем писать $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = \infty$ и говорить, что функция является **бесконечно большой** по базе $\mathcal{B}$, если

$$\forall A > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \forall x \in D \cap B \quad |f(x)| > A.$$

Если последнее неравенство заменить на $f(x) > A$ или на $f(x) < -A$, то пишут $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = -\infty$ соответственно. Наконец, функция f называется **бесконечно малой** по базе $\mathcal{B}$, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = 0$.

Символы Ландау для функций

Подобно тому, как это было сделано для последовательностей, символы «O» и «o» можно ввести и для функций.

Пусть $\mathcal{B}$ — база и заданы функции $f, g : D \to \mathbb{R}$, причем $g(x) \neq 0$ для всех x из некоторого множества из базы. Тогда

1) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O\,(g(x))$ означает, что существует множество $B \in \mathcal{B}$, для которого сужение $(f/g)|_B$ — ограниченная функция;

2) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} o\,(g(x))$ означает, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

3) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{\asymp} g(x)$ означает, что $f(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O\,(g(x))$ и $g(x) \overset{\mathcal{B}}{=} O\,(f(x))$;

4) запись $f(x) \overset{\mathcal{B}}{\sim} g(x)$ означает, что $\lim\limits_{\mathcal{B}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Как и в случае последовательностей, эти символы обычно используют для сравнения поведения бесконечно больших и бесконечно малых функций.

Критерий существования предела

Как и для последовательностей, полезным является «внутренний» критерий существования предела функции.

Теорема 1.26 (критерий Коши). *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка для D. Следующие условия равносильны:*

1) *существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$*;*

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in D$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |x_1 - a| < \delta \\ 0 < |x_2 - a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2) — очевидно, а 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из теорем 1.9 и 1.17. Проведите подробные рассуждения самостоятельно. □

Предел монотонной функции

Определение 1.51. *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Тогда*

1) f *называется* ***возрастающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

2) f *называется* ***строго возрастающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

3) f *называется* ***убывающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

4) f *называется* ***строго убывающей*** *на множестве X, если*

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

В качестве объединяющих терминов используем термин «**монотонная**» (случаи 1) и 3) в определении 1.51) и «**строго монотонная**» функция (случаи 2) и 4) в определении 1.51).

Если множество, на котором функция монотонна, не указывается, то подразумевается монотонность на всей области определения.

Теорема 1.27. *Пусть задана функция* $f : D \to \mathbb{R}$. *Тогда*
1) *если* a *— предельная точка для* D_a^+, *то*

$$f(a+0) = \inf f\left(D_{a+}\right) \qquad \textit{для возрастающей функции } f,$$

$$f(a+0) = \sup f\left(D_{a+}\right) \qquad \textit{для убывающей функции } f;$$

2) *если* a *— предельная точка для* D_{a-}, *то*

$$f(a-0) = \sup f\left(D_{a-}\right) \qquad \textit{для возрастающей функции } f,$$

$$f(a-0) = \inf f\left(D_{a-}\right) \qquad \textit{для убывающей функции } f.$$

Доказательство. Рассмотрим один из четырех случаев, например 1) для убывающей f (остальные рассмотрите самостоятельно).

Если $M = \sup f\left(D_{a+}\right) < +\infty$, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_\varepsilon \in D_{a+}$, что $f\left(x_\varepsilon\right) > M - \varepsilon$. Тогда при $a < x < x_\varepsilon$ $(x \in D)$ выполнены неравенства

$$M - \varepsilon < f\left(x_\varepsilon\right) \leqslant f(x) \leqslant M < M + \varepsilon$$

и можно взять $\delta = x_\varepsilon - a > 0$.

Если $M = \sup f\left(D_{a+}\right) = +\infty$, то для любого $A > 0$ найдется $x_A \in D_{a+}$, для которого $f\left(x_A\right) > A$. Тогда для всех $a < x < x_A$ $(x \in D)$

$$f(x) \geqslant f\left(x_A\right) > A. \quad \square$$

1.3. Непрерывные функции

1.3.1. Локальные свойства

Определение непрерывности

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in D$. В отличие от определения предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где точка a могла не принадлежать области определения D, здесь требование $a \in D$ необходимо.

Определение 1.52. *Будем говорить, что функция f* ***непрерывна в точке*** *a, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.44}$$

На языке окрестностей (1.44) выглядит так:

$$\forall\, U_{f(a)} \quad \exists\, U_a \quad f\,(U_a) \subset U_{f(a)}. \tag{1.45}$$

Рассмотрим два возможных случая отношения a и D. Если a является предельной точкой для D (см. определение 1.40), то (1.44) означает, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{или (более выразительно)} \quad \lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right),$$

т. е. можно совершать предельный переход под знаком функции.

Если точка a не является предельной для D, то существует такая ее окрестность U_a, в которой нет других элементов из D (в таком случае точка a называется **изолированной** для множества D). Тогда условие (1.45) выполнено автоматически, поэтому любая функция непрерывна в изолированных точках своей области определения.

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1.28. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in D$, то*

1) *f локально ограничена в точке a, т. е. f ограничена в некоторой окрестности точки a;*

2) *если $f(a) \neq 0$, то f локально сохраняет знак* $\operatorname{sign} f(a)$ *в точке a, т. е.* $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(a)$ *в некоторой окрестности U_a.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из части 2) теоремы 1.18. Для доказательства 2) возьмем $\varepsilon = |f(a)| > 0$, тогда для некоторой окрестности U_a

$$|f(x) - f(a)| < |f(a)|$$

при всех $x \in U_a$. Если, к примеру, $f(a) < 0$, то последнее неравенство влечет

$$f(x) - f(a) < -f(a)$$

и $f(x) < 0$ для $x \in U_a$. □

Непрерывность и операции над функциями

Из теорем 1.19 и 1.20 соответственно вытекают следующие две теоремы, описывающие взаимодействие понятия непрерывности функции в точке с операциями над функциями.

Теорема 1.29. *Пусть $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Если f и g непрерывны в точке a, то функции $f \pm g$, fg и f/g (если $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a.*

Теорема 1.30. *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in D_f$, а функция $g : D_g \to \mathbb{R}$, $f(D_f) \subset D_g$, непрерывна в точке $b = f(a)$. Тогда композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.*

1.3.2. Глобальные свойства

Выше несколько раз встречался термин «локальный». Обычно локальными называют свойства функции, относящиеся к некоторой окрестности точки. Свойства, относящиеся ко всей области определения, называют глобальными. Здесь рассматриваются глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке. Они имеют большое значение для дальнейшего построения теории.

Определение 1.53. *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $X \subset D$. Будем говорить, что f* ***непрерывна на множестве*** *X, если она непрерывна в каждой точке множества X.*

Символом $C(D)$ обозначим класс всех функций, непрерывных на множестве D.

Две теоремы Вейерштрасса

Докажем две важные теоремы, имеющие значение не только в математическом анализе. Они (и их обобщения) будут неоднократно встречаться в различных математических дисциплинах.

Теорема 1.31 (Вейерштрасса). *Если функция $f \in C[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$ (рис. 1.16, а).*

Доказательство. Для каждой точки $x \in [a, b]$ существует такая окрестность U_x этой точки, что $f(U_x \cap [a, b])$ — ограниченное множество. В силу леммы 1.8 из покрытия $\{U_x\}_{x\in[a,b]}$ сегмента $[a,b]$ интервалами можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1},\ldots,U_{x_n}$. Итак,

$$f\left([a,b]\right)\subset\bigcup_{k=1}^{n} f\left(U_{x_k}\cap[a,b]\right),$$

а объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено. □

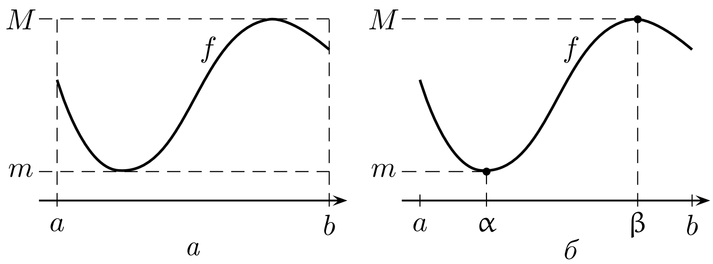

Рис. 1.16

В следующей теореме и до конца текущего пункта используется стандартное обозначение

$$m=\inf f\left([a,b]\right),\quad M=\sup f\left([a,b]\right).$$

Теорема 1.32 (Вейерштрасса). *Если $f\in C[a,b]$, то существуют такие точки $\alpha,\beta\in[a,b]$, что $f(\alpha)=m$ и $f(\beta)=M$ (рис. 1.16, б).*

Доказательство. По определению точной нижней границы для любого $n\in\mathbb{N}$ существует такая точка $x_n\in[a,b]$, что

$$m\leqslant f\left(x_n\right)<m+\frac{1}{n},$$

откуда $f\left(x_n\right)\to m$. Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ по лемме 1.11 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to\alpha\in[a,b]$. В силу непрерывности $f\left(x_{n_k}\right)\to f\left(\alpha\right)$. В силу единственности предела $f\left(\alpha\right)=m$.

Существование β доказывается аналогично. □

Теоремы о промежуточных значениях

Общий смысл следующих двух теорем состоит в точном выражении интуитивно ясного свойства непрерывных функций на отрезке: принимать вместе с любыми двумя значениями все промежуточные.

Теорема 1.33 (Больцано – Коши). *Если функция $f\in C[a,b]$ и на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, то существует точка $x_0\in(a,b)$, для которой $f\left(x_0\right)=0$ (рис. 1.17, а).*

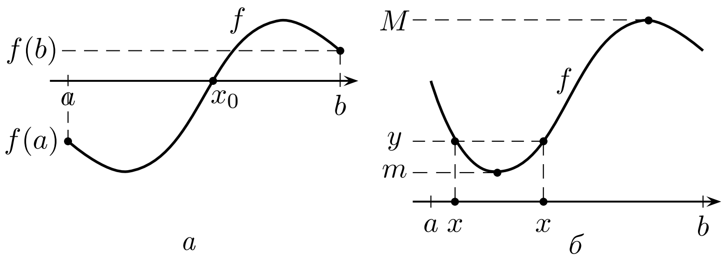

Рис. 1.17

Доказательство. Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$ и обозначим через $[a_1, b_1]$ ту из половин $[a_0, b_0]$, на концах которой f принимает значения разных знаков и т. д. По индукции построим последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ стягивающихся сегментов, на концах каждого из которых f принимает значения разных знаков (если на каком-то шаге в точке деления f обращается в 0, то все доказано). По лемме 1.7 Кантора существует точка x_0, принадлежащая всем сегментам.

Пусть x'_n — тот из концов $[a_n, b_n]$, для которого $f(x'_n) > 0$, а x''_n — для которого $f(x''_n) < 0$. Тогда в силу непрерывности $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \geqslant 0$ и $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) \leqslant 0$, следовательно, $f(x_0) = 0$. $\square$

Теорема 1.34 (Больцано – Коши). *Если $f \in C[a, b]$, то для любого $y \in [m, M]$ существует $x \in [a, b]$ со свойством $f(x) = y$ (рис. 1.17, б).*

Доказательство. Если $m = M$, то доказывать нечего. Если $m < M$, то найдем точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ так, чтобы $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ (см. теорему 1.32), и к функции $g(x) = f(x) - y$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ применим теорему 1.33. $\square$

Отметим, что теоремы 1.31–1.34 допускают общую формулировку.

Теорема 1.35 (о непрерывном образе отрезка). *Если $f \in C[a, b]$, то $f([a, b]) = [m, M]$.*

В качестве упражнения докажите это утверждение самостоятельно. Кроме того, проверьте, что все теоремы 1.31–1.34 вытекают из теоремы 1.35.

Равномерная непрерывность

Напомним, что означает непрерывность функции $f : D \to \mathbb{R}$ на множестве D (см. определение 1.53):

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что в этом определении δ зависит как от ε, так и от выбора точки $x \in D$. Может случиться так, что при фиксированном ε ни одно δ не подходит для всех точек $x \in D$. Простым примером служит функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$.

Указанную зависимость δ от $x \in D$ можно устранить, передвигая квантор $\forall x \in D$ правее квантора $\exists \delta > 0$, получая при этом следующее новое понятие.

Определение 1.54. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется* ***равномерно непрерывной*** *на множестве D, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (1.46)$$

Конечно, если функция равномерно непрерывна на D, то она непрерывна на D. Обратное утверждение неверно — это показывает функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$. Легко привести и пример непрерывной ограниченной функции, не являющейся равномерно непрерывной: $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in (0, 1)$.

Теорема 1.36 (Кантора). *Если функция $f \in C[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x'_n,\, x''_n \in [a, b] \quad |x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Из ограниченной последовательности $\{x'_n\} \subset [a, b]$ по лемме 1.11 можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x'_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Тогда $x''_{n_k} \to x_0$. В силу непрерывности функции f в точке $x_0 \in [a, b]$ должно быть

$$\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

что невозможно. $\square$

Для ограниченной функции $f : D \to \mathbb{R}$ и подмножества $X \subset D$ ее области определения введем обозначение

$$\omega_f(X) := \sup f(X) - \inf f(X). \quad (1.47)$$

Эта величина называется **колебанием функции f на множестве** X. Запись $\omega_f(X) = +\infty$ будет означать, что функция f неограничена на X.

Из теоремы 1.36 вытекает следующее утверждение, которое будет полезно при рассмотрении определенного интеграла.

Теорема 1.37. *Если $f \in C[a, b]$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, [x_1, x_2] \subset [a, b] \quad x_2 - x_1 < \delta \Longrightarrow \omega_f([x_1, x_2]) < \varepsilon.$$

Покажите самостоятельно, что это утверждение является простым следствием теоремы 1.36.

Модуль непрерывности и классы Гельдера

Модуль непрерывности ограниченной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$\omega(\delta, f) := \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| < \delta, \ x_1, x_2 \in [a, b]\}. \tag{1.48}$$

Эту величину удобно использовать для оценки разностей значений функции:

$$|x_1 - x_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \omega(\delta, f).$$

Кроме того, по скорости убывания модуля непрерывности при $\delta \to +0$ можно количественно классифицировать свойство непрерывности функции. Простейшую классификацию задают **классы Гельдера**

$$H^\alpha := \{f : \omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha), \ \delta \to 0\} \tag{1.49}$$

(при $\alpha = 1$ этот класс называют также **классом Липшица**).

Упражнение 1.15. Доказать следующие утверждения:

1) условие $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta, f) = 0$ равносильно равномерной непрерывности функции f;

2) если $\omega(\delta, f) = o(\delta)$ при $\delta \to 0$, то f — тождественная постоянная;

3) при $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ справедливы строгие включения

$$H^1 \subset H^\alpha \subset H^\beta \subset C[a, b].$$

Утверждение 2) из последнего упражнения показывает, что классы Гельдера (1.49) естественно рассматривать лишь при $0 < \alpha \leqslant 1$, так как при $\alpha > 1$ класс H^α содержит только постоянные функции.

1.3.3. Непрерывность и монотонность

В этом пункте рассматриваются следующие вопросы:

1) при каких условиях непрерывная функция имеет обратную;

2) что можно сказать о непрерывности обратной функции, если последняя существует?

Изучение этих вопросов имеет большое значение для установления основных свойств таких элементарных функций, как степенная, показательная, логарифмическая, а также тригонометрических и обратных к ним.

Вспомогательные утверждения

Начнем со следующего очевидного (проверьте, что это действительно так) утверждения, в котором функция не предполагается непрерывной.

Лемма 1.12. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, строго монотонна, то она является биекцией D на $f(D)$.*

Гораздо более интересным является то, что для непрерывных функций на отрезке верно и обратное.

Лемма 1.13. *Если функция $f \in C[a,b]$ инъективна, то она строго монотонна.*

Доказательство. Пусть, например, $f(a) < f(b)$. Покажем, что тогда f строго возрастает на $[a,b]$. Заметим сначала, что

$$f(a) < f(x) < f(b), \quad x \in (a,b).$$

В самом деле, если $f(x) < f(a)$, то на (x,b) функция f должна принимать значение $f(a)$, а если $f(b) < f(x)$, то на (a,x) функция f должна принимать значение $f(b)$ (рис. 1.18).

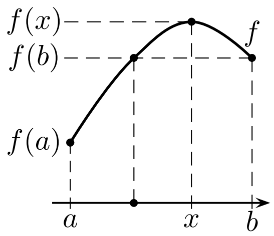

Рис. 1.18

Если теперь $a < x_1 < x_2 < b$, то, повторяя это же рассуждение на отрезке $[a, x_2]$, получим $f(x_1) < f(x_2)$ и f строго возрастает. $\square$

Лемма 1.14. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ строго монотонна. Тогда*[1]

$$f \in C[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad f([a,b]) = [f(a), f(b)]^*.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, случай строго возрастающей функции. Утверждение «$\Longrightarrow$» вытекает из теоремы 1.35, так как

$$\sup f([a,b]) = f(b) \quad \text{и} \quad \inf f([a,b]) = f(a).$$

Для доказательства обратного утверждения «$\Longleftarrow$» предположим, что функция f разрывна в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$. По теореме 1.27 для монотонной функции существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$, поэтому ее разрывность в точке x_0 означает, что

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0).$$

[1]Напомним (см. (1.11)), что «$*$» ставит концы промежутков в правильном порядке.

Следовательно, все числа из невырожденного интервала

$$(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)) \subset [f(a), f(b)],$$

за исключением одного, не являются значениями функции f (рис. 1.19) — противоречие.

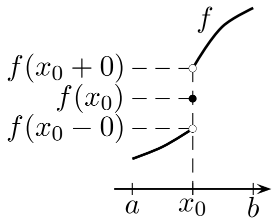

Рис. 1.19

Случай, когда функция f разрывна в одном из концов отрезка $[a, b]$, рассматривается аналогично (предлагается сделать это самостоятельно).

Случай убывающей функции сводится к уже доказанному с помощью функции $-f$. $\square$

Свойства обратной функции

Здесь $\langle a, b\rangle$ будет обозначать любой промежуток (возможны случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$). Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ не задана на концах промежутка $\langle a, b\rangle$, то условимся понимать $f(a)$ как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, а $f(b)$ — как $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Это соглашение используется в следующей теореме.

Теорема 1.38. *Функция $f \in C\langle a, b\rangle$ взаимно однозначна тогда и только тогда, когда она строго монотонна.*

Если f строго монотонна, то обратная функция f^{-1} также строго монотонна (в том же смысле, что и f), а также непрерывна на $\langle f(a), f(b)\rangle^*$.

Доказательство. Сначала пусть $\langle a, b\rangle = [a, b]$. Первая часть теоремы вытекает непосредственно из лемм 1.12 и 1.13. Строгая монотонность обратной функции очевидна, а ее непрерывность вытекает из леммы 1.14.

Если, например, $\langle a, b\rangle = (a, b]$, то надо взять последовательность $a_n \downarrow a$ и применить уже доказанное к отрезку $[a_n, b]$. Аналогично рассматриваются другие виды промежутков. $\square$

Классификация разрывов

$a \in D$ — точка ее области определения, которая является предельной точкой для D_{a+} и D_{a-} (см. (1.43)). Предположим, что функция f разрывна в точке a.

Если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Тогда говорят, что a — **точка устранимого разрыва** для функции f (если переопределить ее значение в точке a, взяв его равным $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то новая функция будет непрерывной в точке a).

Если же предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, то возможны два случая.

1) Существуют оба односторонних предела $f(a \pm 0)$, но они не равны. Такие точки называются **разрывами 1-го рода** или **скачками**.

2) По крайней мере один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует. В этом случае a называется **разрывом 2-го рода**.

Для монотонной функции возможны только скачки, причем их не может быть очень много.

Теорема 1.39. *Монотонная функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ может иметь разрывы только 1-го рода, причем множество ее разрывов не более чем счетно.*

Доказательство. То, что точки разрыва являются скачками, вытекает из теоремы 1.27.

Пусть X — множество точек разрыва и $x \in X$, тогда

$$I_x := (f(x-0), f(x+0))^* \neq \varnothing,$$

причем любые два таких интервала не пересекаются. Фиксируя точку $r_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$, получим взаимно однозначное отображение $x \mapsto r_x$ множества X на некоторое подмножество в $\mathbb{Q}$. $\square$

1.3.4. Элементарные функции

Степени

Напомним, что при $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ степень a^n определяется индуктивно:

$$a^0 := 1, \quad a^n := a \cdot a^{n-1},$$

а на показатели $n \in \mathbb{Z}$ она распространяется равенством

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}, \quad n < 0,\ a \neq 0.$$

При этом выполнены основные свойства степени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.50}$$

Определим теперь понятие степени положительного числа для любых показателей. При $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $f_n(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$f_n \in C(\mathbb{R}_+)$ (как произведение непрерывных функций) и возрастает, так как при $0 < x_1 < x_2$ выполнены неравенства

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1) \sum_{k=0}^{n-1} x_2^k x_1^{n-k-1} > 0.$$

Кроме того, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, поэтому

$$f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+.$$

Отсюда и из теоремы 1.38 вытекает существование обратной функции f_n^{-1}, которая также возрастает и непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

Для $a \in \mathbb{R}_+$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$a^{1/n} := f_n^{-1}(a), \quad a^{-1/n} := \left(a^{1/n}\right)^{-1}.$$

Отметим ряд свойств дробных степеней: если $a > 0$, то

$$a^{-1/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.51}$$

$$(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.52}$$

$$(a^{ml})^{1/(nl)} = (a^{1/n})^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n, l \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$

Теперь можно определить степень с любым рациональным показателем: если $a > 0$ и $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, то положим

$$a^r := (a^{1/n})^m. \tag{1.54}$$

Это определение корректно (не зависит от способа записи показателя в виде дроби), что следует из (1.53).

Докажем, что свойство (1.50) сохраняется и для рациональных показателей, т. е.

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}, \quad a > 0, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}. \tag{1.55}$$

В самом деле, если $r_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, то

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} \overset{(1.53)}{=} a^{\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}} \cdot a^{\frac{m_2 n_1}{n_2 n_1}} \overset{(1.52)}{=} \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2} \cdot \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_2 n_1} \overset{(1.50)}{=}$$

$$\overset{(1.50)}{=} \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} \overset{(1.52)}{=} a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{r_1 + r_2}.$$

Далее отметим, что

$$a^r > 1 \quad \text{при} \quad a > 1,\ r > 0. \tag{1.56}$$

Действительно, если $r = \dfrac{m}{n} > 0$, то $a^{1/n} > 1$ и $a^{m/n} > 1$, так как функция f_n^{-1} возрастает.

Отсюда следует, что функция $r \mapsto a^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) возрастает при $a > 1$: если $r_1 < r_2$, то $a^{r_2} = a^{r_1+(r_2-r_1)} = a^{r_1} \cdot a^{r_2-r_1} > a^{r_1}$.

Показательная функция

Теперь можно определить степень с любым показателем: если $a > 1$ и $x \in \mathbb{R}$, то положим

$$a^x := \sup\left\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leqslant x\right\}.$$

Это определение корректно, так как множество $\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$ ограничено сверху: если $r_0 > x$ фиксировано, то при $r \leqslant x$ будет $a^r \leqslant a^{r_0}$.

Кроме того, отметим, что в случае рационального числа x степень a^x совпадает с ее старым определением — это следует из возрастания функции $r \mapsto a^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

Если $0 < a < 1$, то определим $a^x := (1/a)^{-x}$. Наконец, пусть $1^x := 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Для фиксированного числа $a > 0$ функция

$$x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.57}$$

называется **показательной** с основанием a (рис. 1.20).

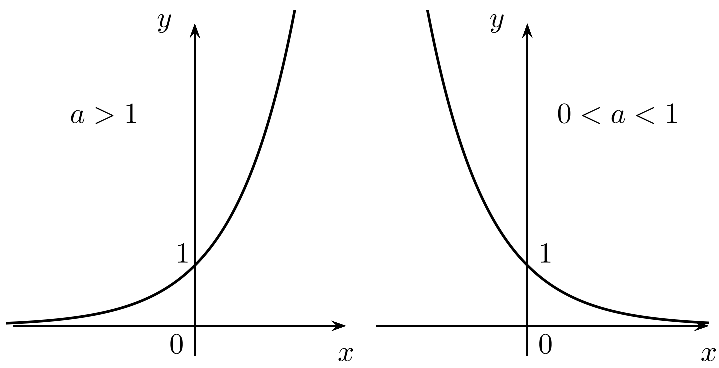

Рис. 1.20. График функции $f(x) = a^x$

Теорема 1.40. *Пусть $0 < a \neq 1$. Показательная функция $a \mapsto a^x$ с основанием a обладает следующими свойствами:*

1) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
2) *строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$;*
3) *непрерывна на $\mathbb{R}$;*

4) *если* $a > 1$, *то* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$;

5) *если* $0 < a < 1$, *то* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$.

1) Зафиксируем $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и возьмем $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $r_1 \leqslant x_1$ и $r_2 \leqslant x_2$. Тогда $r_1 + r_2 \leqslant x_1 + x_2$ и

$$a^{x_1+x_2} \geqslant a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}.$$

Перейдем к точной верхней грани сначала по $r_1 \leqslant x_1$, а затем по $r_2 \leqslant x_2$, получая неравенство $a^{x_1+x_2} \geqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.

Для доказательства противоположного неравенства возьмем $r \in \mathbb{Q}$, $r \leqslant x_1 + x_2$ и найдем $r_1 \in \mathbb{Q}$ так, чтобы $r - x_2 \leqslant r_1 \leqslant x_1$. Тогда рациональное число $r_2 = r - r_1$ удовлетворяет неравенству $r_2 \leqslant x_2$, поэтому

$$a^r = a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2} \leqslant a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Перейдя к точной верхней грани по $r \leqslant x_1 + x_2$, получим неравенство $a^{x_1+x_2} \leqslant a^{x_1+x_2}$.

2) В силу (1.56) $a^r > 1$ при $r > 0$, следовательно, $a^x > 1$ при $x > 0$. Отсюда при $x_1 < x_2$

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1} - 1\right) > 0.$$

3) Сначала докажем непрерывность в точке $x_0 = 0$. По определению легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ (см. пример 1.6). Отсюда $\lim\limits_{x\to+0} a^x = 1$ и $\lim\limits_{x\to-0} a^x = \lim\limits_{x\to+0} 1/a^x = 1$.

В общем случае

$$\lim_{x\to x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\left(a^{x-x_0} - 1\right) = 0.$$

4) Это свойство следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$.

5) В случае $0 < a < 1$ свойства показательной функции вытекают из ее определения и уже доказанного для $a > 1$. $\square$

Логарифмическая функция

Пусть $a > 0$, причем $a \neq 1$. Из теоремы 1.40 вытекает, что показательная функция $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, с основанием a отображает $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_+$ взаимно однозначно. Поэтому у нее есть обратная функция $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, которая называется **логарифмической** с основанием a. Значение этой функции в точке $x \in \mathbb{R}_+$ обозначим, как обычно, $\log_a x$. Таким образом, логарифмическая (с основанием a) функция действует по правилу

$$x \mapsto \log_a x, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1.58}$$

Из определения сразу следуют равенства

$$a^{\log_a x} = x, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad \log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

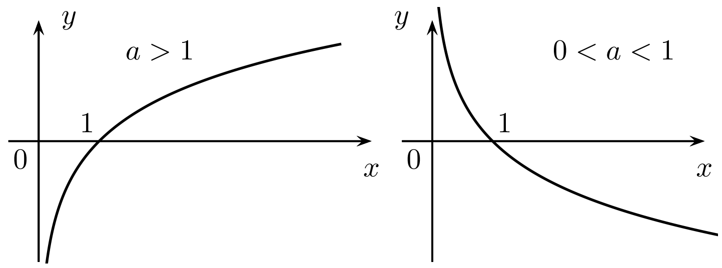

Рис. 1.21. График функции $f(x) = \log_a x$

Основные свойства логарифмической функции приведены в следующей теореме (рис. 1.21).

Теорема 1.41. *Пусть $0 < a \neq 1$. Логарифмическая функция с основанием a обладает следующими свойствами:*

1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$;
2) *строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$;*
3) *непрерывна на $\mathbb{R}_+$;*
4) *если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$;*
5) *если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$.*

Доказательство. Для 1) возьмем любые $x_1, x_2 > 0$, и пусть $y_1 = \log_a x_1$, $y_1 = \log_a x_2$. Последнее означает, что $x_1 = a^{y_1}$ и $x_2 = a^{y_2}$. Поэтому в силу свойства 2) теоремы 1.40

$$x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_1} = a^{y_1 + y_2}.$$

Взяв логарифмы от крайних частей этого равенства, получим

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Свойства 2) и 3) следуют из теоремы 1.38 и соответствующих свойств показательной функции из теоремы 1.40. $\square$

Степенная функция

Если $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$, то функция

$$x \mapsto x^{\alpha} := e^{\alpha \ln x}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

называется **степенной** с показателем α.

Степенная функция является непрерывной на всей области определения (как композиция непрерывных функций) и монотонной (возрастающей при $\alpha > 0$ и убывающей при $\alpha < 0$, рис. 1.22).

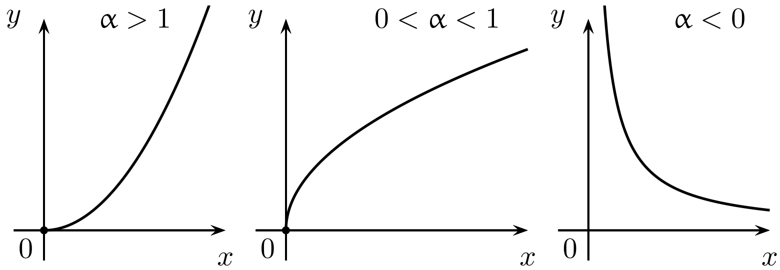

Рис. 1.22. График функции $f(x) = x^{\alpha}$

Три замечательных предела

Дополним теорему 1.24 еще тремя пределами, которые будут использованы при изучении основных элементарных функций — показательной, логарифмической и степенной.

Теорема 1.42. *Справедливы следующие утверждения:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \tag{1.59}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0; \tag{1.60}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.61}$$

Доказательство. Для доказательства (1.59) рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{при } x \neq 0, \\ e & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

которая непрерывна в точке 0. Поэтому по теореме 1.30 о непрерывности композиции

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Положим $t = t(x) = a^x - 1$, тогда $x = \log_a(1+t)$ и $\lim\limits_{x\to 0} t = 0$. Используя теорему 1.20 о пределе композиции и равенство (1.59), получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a.$$

Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Здесь снова была использована теорема 1.20 и равенства (1.59), (1.60). □

1.4. Дифференциальное исчисление

1.4.1. Производная и дифференцируемость

Фраза «функция f задана в окрестности точки $a \in \mathbb{R}$» будет всегда означать, что некоторая окрестность U_a точки a содержится в области определения функции f.

Производная

Определение 1.55. *Пусть функция f задана в окрестности точки a. Если существует предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{1.62}$$

то он называется производной функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.

Геометрически выражение под знаком предела равно тангенсу угла наклона между прямой, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $A_h(a+h, f(a+h))$ графика функции f, и осью Ox (рис. 1.23). Таким образом, существование предела (1.62) означает, что указанная прямая при $h \to 0$ стремится занять некоторое предельное положение — прямой, проходящей через точку $(a, f(a))$ на графике функции, с угловым коэффициентом $f'(a)$. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ее принято называть **касательной** к графику функции f в точке $(a, f(a))$.

Таким образом, по этому соглашению $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной (и в этом состоит геометрический смысл производной).

К понятию производной приводят многие задачи естествознания. Рассмотрим две из них.

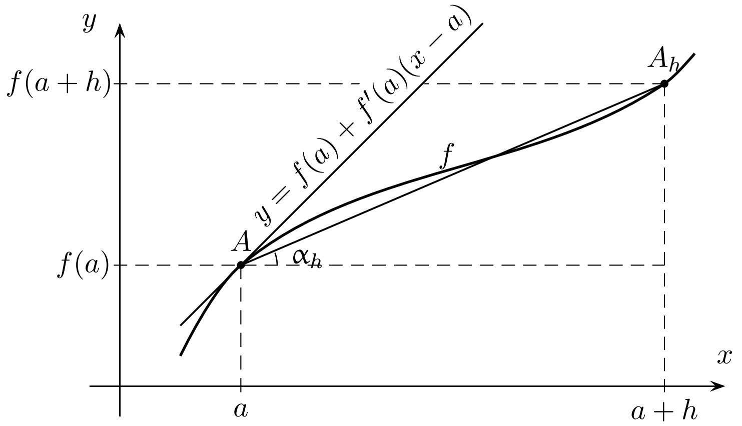

Рис. 1.23

Пусть материальная точка неравномерно движется по прямой и функция $s : t \mapsto s(t)$, $0 < t \leqslant T$, задает длину пути, пройденного точкой за время t. Если зафиксировать малое число $h > 0$, то отношение

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

отвечает нашим представлениям о средней скорости точки за промежуток времени $[t, t+h]$. Поэтому предел такого отношения при $h \to 0$ естественно принять за значение мгновенной скорости точки в момент времени t. Этот пример наводит на мысль использовать производную $f'(a)$ функции f как скорость изменения этой функции в точке a.

Другая задача — об определении плотности неоднородного стержня. Пусть функция $m : [0, l] \to \mathbb{R}_+$ задает массу неоднородного прямолинейного материального стержня, т. е. при $x \in (0, l]$ значение $m(x)$ равно массе части стержня длины x, считая от его левого конца. Тогда отношение

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h}$$

является средней плотностью части стержня от x до $x + h$. Для получения плотности стержня в точке x нужно устремить h к 0.

Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос об определении ускорения при движении материальной точки по прямой. И снова придем к необходимости использования предельных переходов, подобных тому, который участвует в определении производной.

Дифференцируемость

Геометрический и физический смысл производной был рассмотрен ранее. Выясним теперь, в чем состоит ее математическая суть.

Определение 1.56. *Функция f, заданная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существует такое $A \in \mathbb{R}$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(h), \quad h \to 0. \tag{1.63}$$

Если обозначить $x = a + h$, то соотношение (1.63) можно записать в виде

$$f(x) - f(a) = A(x-a) + o(x-a), \quad x \to a.$$

Другими словами, дифференцируемость функции f означает, что ее приращение $f(a+h) - f(a)$ асимптотически линейно в точке a: чем ближе h к 0, тем точнее линейная функция Ah приближает разность $f(a+h) - f(a)$.

Понятие дифференцируемости непосредственно связано с существованием производной.

Теорема 1.43. *Следующие условия равносильны:*
1) *f дифференцируема в точке a;*
2) *существует производная $f'(a)$.*

Если выполнено одно из этих условий, то число A в определении дифференцируемости совпадает с $f'(a)$.

Доказательство. При $h \to 0$ соотношение

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

означает, что

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = o(1).$$

Умножая обе части на h, получим

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o(h) \quad \text{или} \quad f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h),$$

и из 2) следует 1). По этой цепочке можно пройти и обратно, заменив здесь $f'(a)$ на A. $\square$

Из этой теоремы, в частности, следует, что математический смысл существования производной состоит в возможности асимптотической линеаризации приращения функции.

В связи с близостью понятий дифференцируемости и существования производной процесс нахождения производной обычно называют **дифференцированием**.

Определение 1.57. *Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}$, то функция*

$$df(a) : h \mapsto f'(a)h \tag{1.64}$$

называется ***дифференциалом*** *для f в этой точке.*

Чтобы уравновесить определение (1.64), дифференциал линейной функции $f_0(x) = x$ обозначают dx (т. е. $dx(h) = h$ при всех h) и называют **дифференциалом независимой переменной**. Таким образом,

$$df(a) = f'(a)dx \quad \text{или} \quad f'(a) = \frac{df(a)}{dx}.$$

Смысл дифференциала состоит в том, что он является главной частью приращения функции

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + o(h),$$

что приводит к равенству

$$f(a+h) - f(a) \approx df(a)h = f'(a)h,$$

которое можно использовать для приближенного вычисления $f(a+h)$ при достаточно малых h.

Производные элементарных функций

Используем теперь замечательные пределы из теорем 1.24 и 1.42 для вычисления производных основных элементарных функций.

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \sum\limits_{k=0}^{n-1} (x+h)^k x^{n-k-1}}{h} = nx^{n-1}. \quad \square$$

2) $(a^x)' = a^x \ln a$ при $a > 0$.

Доказательство. Действительно, используя равенство (1.60), получим

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a. \quad \square$$

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

Доказательство. Здесь надо воспользоваться равенством (1.59) и теоремой 1.20 о пределе композиции:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\log_a (1 + h/x)}{h/x} = \frac{1}{x \ln a}. \quad \square$$

4) $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. В силу равенства (1.41) и теоремы 1.20 о пределе композиции

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x. \quad \square$$

Остальные элементарные функции будут рассмотрены ниже.

Дифференцирование и операции над функциями

Для изучения характера взаимодействия понятия производной с операциями над функциями будем часто использовать следующее простое, но важное утверждение.

Лемма 1.15. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Это следует непосредственно из определения

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a) = o(1)$$

при $x \to a$. $\square$

Как показывает пример функции $f(x) = |x|$, $a = 0$, обратное утверждение неверно.

Теорема 1.44. *Пусть функции $f, g : D \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $a \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции λf, $f+g$, fg и $\dfrac{f}{g}$ (при дополнительном условии $g(a) \neq 0$) дифференцируемы в точке a и справедливы равенства*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Доказательство. Остановимся подробно только на обосновании формулы для производной отношения, остальные утверждения предлагается рассмотреть самостоятельно.

Преобразуем разностное отношение, пределом которого является производная отношения:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{[f(x) - f(a)]g(a) - f(a)[g(x) - g(a)]}{g(x)g(a)(x-a)} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\dfrac{g(x) - g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)}.$$

Предельный переход в этом равенстве и непрерывность функции g в точке a (последнее вытекает из леммы 1.15) приводит к нужной формуле. $\square$

Теорема 1.45. *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in D_f$, а функция $g : D_g \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $b = f(a)$, причем $f(D_f) \subset D_g$. Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a). \tag{1.65}$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ — произвольная последовательность. Разобьем натуральный ряд на две последовательности $\mathbb{N} = \{n_k\} \cup \{m_k\}$ так, что

$$f(x_{n_k}) - f(a) = 0, \quad f(x_{m_k}) - f(a) \neq 0.$$

Тогда если $\{n_k\}$ содержит бесконечно много элементов, то $f'(a) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Пусть теперь в $\{n_k\}$ лишь конечное число элементов. Тогда поскольку $f(x_{m_k}) \to f(a)$ по лемме 1.15, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{x_{m_k} - a} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{m_k})) - g(f(a))}{f(x_{m_k}) - f(a)} \frac{f(x_{m_k}) - f(a)}{x_{m_k} - a} =$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a). \quad \square$$

Теорема 1.46. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет обратную, непрерывна в некоторой окрестности точки $a \in D$ и дифференцируема в точке $a \in D$, причем $f'(a) \neq 0$.*

Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Доказательство. Пусть f непрерывна на интервале $(\alpha, \beta) \subset D$, причем $a \in (\alpha, \beta)$. Тогда по теореме 1.38 из существования обратной функции следует, что f строго монотонна на (α, β).

По той же теореме 1.38 обратная функция f^{-1} определена и непрерывна в окрестности $\big(f(\alpha), f(\beta)\big)^*$ точки $b = f(a)$.

Пусть $y_n \to b$, $y_n \neq b$, тогда $y_n \in \big(f(\alpha), f(\beta)\big)^*$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и существует такое $x_n \in (\alpha, \beta)$, $x_n \neq a$, что $f(x_n) = y_n$ и $f^{-1}(y_n) = x_n$. При этом $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Запишем

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}.$$

Совершая здесь предельный переход, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы (см. также теорему 1.17). $\square$

Производные тригонометрических функций

Дополним таблицу производных элементарных функций из подп. 1.4.1 формулами для производных тригонометрических функций и обратных им.

1) $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. По теореме 1.45 о производной композиции получим

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x. \quad \square$$

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство. Здесь также используем теорему 1.45:

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \square$$

3) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

Доказательство. Пусть $y = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$, тогда $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\cos y = +\sqrt{1-x^2}$. Применим теперь теорему 1.46 о производной обратной функции:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \square$$

4) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Это вытекает из предыдущей формулы и равенства $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. $\square$

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. Формула получается с помощью правила дифференцирования частного из теоремы 1.44. $\square$

6) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Здесь надо использовать теорему 1.46 и равенство $1 + \operatorname{tg}^2 y = 1/\cos^2 y$ (где $y = \operatorname{arctg} x$):

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \square$$

Производные высших порядков

Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на некотором множестве $X \subset D$ (т. е. дифференцируема в каждой точке $x \in X$), то можно рассмотреть новую функцию

$$f' : X \to \mathbb{R}$$

и поставить вопрос о существовании производной у нее и т. д.

Производные высших порядков определяются индуктивно:

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a).$$

Подчеркнем, что для существования n-й производной в точке a необходимо потребовать наличия всех производных $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$ в некоторой окрестности точки a.

По индукции нетрудно установить следующие формулы для производных элементарных функций, справедливые при любом $n \in \mathbb{N}$:

$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}; \tag{1.66}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}; \tag{1.67}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x; \tag{1.68}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right); \tag{1.69}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right). \tag{1.70}$$

1.4.2. Теоремы о дифференцируемых функциях

Экстремумы и лемма Ферма

Определение 1.58. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки a. Тогда a называется точкой*

локального максимума, *если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$;*
локального минимума, *если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$;*
строгого локального максимума, *если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \quad f(x) < f(a)$;*
строгого локального минимума, *если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in \overset{\circ}{U}_a \quad f(x) > f(a)$.*

Общее название для всех видов максимума и минимума — **экстремумы**. Еще раз подчеркнем, что неравенства в определениях экстремумов выполняются лишь в некоторой достаточно малой окрестности экстремума.

Вполне типичный вид графика функции в окрестности экстремума представлен на рис. 1.24.

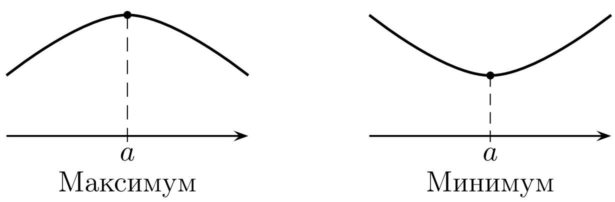

Рис. 1.24. Экстремумы

Лемма 1.16 (Ферма). *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда если a является точкой экстремума, то $f'(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть, например, a — точка минимума (для максимумов рассуждение аналогичное). Заметим, что

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x<a \quad \text{и} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x>a,$$

поэтому

$$0 \leqslant \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \lim_{x\to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Следовательно, $f'(a) = 0$. $\square$

Лемма Ферма дает лишь необходимое условие экстремума, и оно не является достаточным (в качестве примера можно рассмотреть функцию $f(x) = x^3$ в окрестности точки $a = 0$). Поэтому для проверки на экстремум нужны дополнительные исследования.

Геометрически утверждение $f'(a) = 0$ означает, что касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума параллельна оси Ox, а физически это означает, что скорость изменения функции f в точке a равна нулю. Поэтому в случае $f'(a) = 0$ говорят обычно, что a — **стационарная точка**[1] функции f.

Формула конечных приращений

Теорема 1.47 (Ролля). *Пусть функция $f \in C[a,b]$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Если f — тождественная постоянная, то доказывать нечего. Если f не является тождественно постоянной, то по крайней мере одно из значений $M = \sup f([a,b])$ или $m = \inf f([a,b])$ принимается (по теореме 1.32) в некоторой точке $\xi \in (a,b)$, и эта точка является экстремумом функции f. В силу леммы 1.16 $f'(\xi) = 0$. $\square$

Теорема 1.48 (Лагранжа). *Пусть функция $f \in C[a,b]$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{1.71}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x \in [a,b],$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 1.47. Поэтому существует точка $\xi \in (a,b)$, для которой

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0. \quad \square$$

[1] Используется также термин «критическая точка», который представляется гораздо менее естественным.

Геометрически утверждение теоремы 1.48 означает, что на интервале (a, b) найдется такая точка ξ, что касательная к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна отрезку, соединяющему точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика (рис. 1.25).

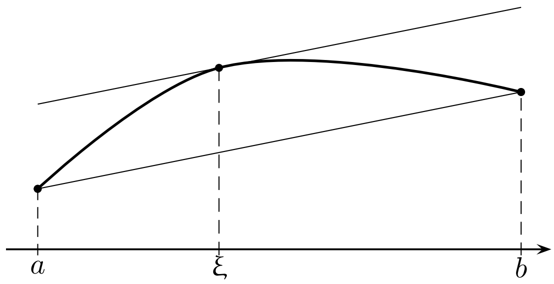

Рис. 1.25

Доказанная теорема чрезвычайно важна и часто используется. Ее смысл состоит в том, что она выражает приращение функции через производную, предвосхищая стратегию использования производной для исследования поведения функции. Равенство 1.71 называют формулой конечных приращений.

Теорема 1.48 является первой из семейства так называемых теорем о среднем значении, которые, уточняя форму (1.71) теоремы Лагранжа, приводят к основным техническим средствам математического анализа — формулам Тейлора и Ньютона – Лейбница.

Следующее утверждение обобщает теорему 1.48 на случай двух функций.

Теорема 1.49 (Коши). *Пусть функции $f, g \in C[a, b]$ дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$.*

Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1.72}$$

Доказательство. Доказательство такое же, как и в предыдущей теореме, но с функцией

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right), \quad x \in [a, b]. \quad \square$$

Конечно, если $g(x) \equiv x$, то из теоремы 1.49 снова получим теорему 1.48.

1.4.3. Правила Лопиталя

Рассмотрим способы раскрытия неопределенностей, т. е. вычисления пределов отношений, когда и числитель, и знаменатель являются одновременно или бесконечно большими, или бесконечно малыми.

Неопределенность вида 0/0

Теорема 1.50 (0/0-правило Лопиталя). *Пусть функции f и g дифференцируемы в проколотой окрестности точки a, причем $g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0. \tag{1.73}$$

Тогда если существует предел отношения производных в точке a, то в этой точке существует предел отношения функций и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Доопределим функции f и g в точке a равенством $f(a) = g(a) = 0$ и применим к ним теорему 1.49 для каждого $x \in U_a^\circ$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

где $\xi_x \in (a, x)^*$. Так как $\lim\limits_{x\to a} \xi_x = a$, то утверждение следует из теоремы 1.21.

Отметим, что в теореме 1.50 вместо базы $x \to a$, по которой берется предел, можно взять также базы $x \to a \pm 0$ или $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, которые рассматривались в подп. 1.2.5.

Для баз $x \to a \pm 0$ доказательство не меняется. Для $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$ рассмотрим другую пару функций

$$f\left(\frac{1}{x}\right), \quad g\left(\frac{1}{x}\right)$$

в проколотой окрестности нуля. К ней можно применить уже доказанную теорему 1.50 и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(1/x) \cdot \left(-1/x^2\right)}{g'(1/x) \cdot \left(-1/x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это доказывает утверждение теоремы. $\square$

Неопределенность вида ∞/∞

Аналогичное утверждение справедливо и для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, но доказательство этого сложнее.

Теорема 1.51 (∞/∞-правило Лопиталя). *Теорема 1.50 сохраняет силу при замене условия (1.73) на*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty. \tag{1.74}$$

Доказательство. Возьмем число $\delta > 0$ (его выбор будет указан ниже) и $a < x < x_0 = a + \delta$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \cdot \left[\frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)} - 1\right],$$

где $\xi_x \in (x, x_0)$ определяется по теореме 1.49.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < |l| + 1 \quad \text{при} \quad a < \xi < x_0 = a + \delta.$$

Здесь $l = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

В силу условия (1.74)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x_0)}{f(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{g(x_0)}{g(x)} = 0$$

и найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$\left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\right| \cdot \left|\frac{1 - g(x_0)/g(x)}{1 - f(x_0)/f(x)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $a < x < x_1 = a + \delta_1$. Поэтому

$$|f(x)/g(x) - l| < \varepsilon \quad \text{при} \quad a < x < a + \min\{\delta, \delta_1\}.$$

Точно так же рассматривается предел слева. $\square$

В теореме 1.51 вместо $x \to a$ можно взять базы $x \to a \pm 0$ или $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Другие виды неопределенностей

Кроме неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞ возможны и другие, например $0\cdot\infty$, 1^∞, $\infty - \infty$. Для их раскрытия также можно использовать правила Лопиталя, предварительно преобразовав исследуемые выражения, например

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty}, \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1}.$$

Иногда вместо термина «правило Лопиталя» используется термин «правило Лопиталя – Бернулли».

1.4.4. Формула Тейлора

Асимптотическая формула Тейлора

Рассмотрим задачу о локальном представлении функции в виде многочлена n-го порядка

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a.$$

При $n = 1$ такая задача приводит к понятию дифференцируемости.

Легко показать (убедитесь в этом самостоятельно), что алгебраический многочлен можно записать с помощью его производных в некоторой точке

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Естественно рассмотреть многочлен такого типа для произвольной функции:

$$T_n(x, a; f) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1.75}$$

Будем называть (1.75) **полиномом Тейлора** n-го порядка для функции f в точке a.

Для того чтобы записать полином Тейлора n-го порядка, необходимо существование $f^{(n)}(a)$ (тогда производные $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$ должны существовать в некоторой окрестности точки a).

Разность

$$r_n(x) := f(x) - T_n(x, a\,; f) \tag{1.76}$$

будем называть n-м **остатком Тейлора** для f в точке a.

Теорема 1.52 (формула Тейлора с остатком Пеано). *Если функция f дифференцируема n раз в точке a, то*

$$r_n(x) = o\left((x-a)^n\right), \quad x \to a.$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ утверждение следует из определения 1.56 дифференцируемости и существования производной (см. теорему 1.43).

Предположим, что утверждение верно при $n-1$ для любой функции, удовлетворяющей предположениям. Заметим, что справедливо равенство

$$T_n'(x, a\,; f) = T_{n-1}(x, a\,; f'),$$

проверяемое непосредственным дифференцированием полинома Тейлора.

С помощью этого равенства, используя правило Лопиталя (теорема 1.50), получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(x,a\,;f)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T_n'(x,a\,;f)}{n(x-a)^{n-1}}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T_{n-1}(x,a\,;f')}{n(x-a)^{n-1}}=0$$

в силу предположения индукции, примененного к производной f'. $\square$

Асимптотика элементарных функций

Применение теоремы 1.52 к основным элементарным функциям приводит к следующим асимптотическим соотношениям при $x\to 0$:

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k+o\,(x^n)\,;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,x^k+o\,(x^n)\,;$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,x^k+o\,(x^n)\,;$$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\,x^{2k-1}+o\left(x^{2n}\right);$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\,x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Конечно, здесь были использованы формулы (1.66)–(1.70) для производных элементарных функций.

Общая форма остатка Тейлора

Приведем другую форму остатка в формуле Тейлора, которая будет использоваться при изучении поведения остатка Тейлора $r_n(x)$ при $n\to\infty$.

Теорема 1.53 (общая форма остатка Тейлора). *Пусть функция f имеет $(n+1)$ производную в некоторой окрестности U_a точки $a\in\mathbb{R}$. Пусть еще задана функция φ, дифференцируемая в U_a, причем $\varphi'(x)\neq 0$.*

Тогда для любого $x\in U_a$ существует такая точка $\xi\in(a,x)^*$, что

$$r_n(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \tag{1.77}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - T_n(x, t\,; f),$$

тогда

$$F'(t) = \left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применим к паре функций F и φ на $[a, x]^*$ теорему 1.49, согласно которой существует точка $\xi \in (a, x)^*$ со свойством

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Осталось подставить сюда выражение для $F'(\xi)$ и заметить, что $F(x) - F(a) = -r_n(x)$. □

Доказательство теоремы 1.53 показывает, что ее предположения относительно функции f можно ослабить. Для их описания введем классы $C^n[a, b]$, которые будут использоваться и в дальнейшем.

Пусть $C^n[a, b]$ обозначает класс[1] функций, имеющих непрерывные производные до порядка n включительно в каждой точке $x \in [a, b]$. При этом в определении производной в крайних точках a и b следует рассматривать соответствующий односторонний предел.

Теорема 1.54. *Пусть функция $f \in C^n[a, x]^*$ имеет $(n+1)$-ю производную на интервале $(a, x)^*$. Пусть еще задана функция $\varphi \in C[a, x]^*$, дифференцируемая на $(a, x)^*$, причем $\varphi'(x) \neq 0$.*

Тогда для некоторого $\xi \in (a, x)^*$ выполнено (1.77).

Выбирая конкретную функцию φ, получим некоторые специальные формы остатка Тейлора.

Пусть $\varphi(t) = x - t$, тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a) \quad (\textbf{форма Коши}). \tag{1.78}$$

Если $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, то

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\textbf{форма Лагранжа}). \tag{1.79}$$

[1]Здесь и в дальнейшем термин «класс» используется как еще один синоним термина «множество».

Поведение остатков при $\mathbf{n} \to \infty$

Рассмотрим поведение остатков Тейлора для основных элементарных функций при $n \to \infty$.

Теорема 1.55. *Справедливы следующие соотношения:*

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k\right), \quad |x| < 1;$$

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \quad |x| < 1;$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\, x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для степенной функции рассмотрим остаток формулы Тейлора в форме Коши (1.78):

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n}(x-\xi)^n x,$$

где $\xi \in (0,x)^*$. Отсюда следует, что

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1 - \frac{1-|x|}{1-0} \leqslant |x|\,. \tag{1.80}$$

Используя (1.80), оценим остаток

$$|r_n(x)| \leqslant \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\,\ldots\,\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\xi)^{\alpha}\,|x|^{n+1}.$$

При увеличении n на единицу правая часть последнего неравенства умножается на $\left|\left(1-\dfrac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. Так как $|x| < 1$, то найдется такое n_0, что $\left|\left(1-\dfrac{\alpha}{n+1}\right)x\right| < q < 1$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно, $|r_n(x)| \leqslant |r_{n_0}(x)|\, q^{n-n_0}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Для логарифмической функции также используем форму Коши (1.78) для остатка

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(x-\xi)^n x}{(1+\xi)^{n+1}},$$

где $\xi \in (0,x)^*$. Так как $|1+\xi| \geqslant 1-|\xi| \geqslant 1-|x|$, то из неравенства (1.80) получим $|r_n(x)| \leqslant |x|^{n+1}(1-|x|)^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для показательной функции, а также для синуса и косинуса надо использовать форму Лагранжа. Рассуждения здесь одни и те же, поэтому рассмотрим только показательную функцию. Для нее в силу (1.79)

$$|r_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad \square$$

В следующем упражнении рассматривается интересный пример функции, для которой последовательность ее полиномов Тейлора не сходится к значениям функции.

Упражнение 1.16. Доказать, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $f^{(n)}(0) = 0$.

Понятие о сходимости числовых рядов

Если задана последовательность $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.81}$$

называют **числовым рядом**. Но пока это лишь символ, не имеющий определенного смысла, так как мы не знаем, как можно складывать бесконечно много слагаемых.

С каждым числовым рядом свяжем последовательность сумм

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

которые называются его **частичными суммами**.

Определение 1.59. *Ряд (1.81) называется **сходящимся**, если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае число s называем ***суммой ряда*** *и пишем* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется **расходящимся**.

Например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится (см. пример 1.7), а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^k$ сходится при $|q| < 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}$.

В терминах сходимости рядов удобно переформулировать предыдущие результаты о разложениях элементарных функций по формуле Тейлора.

Теорема 1.56. *Справедливы следующие утверждения:*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k, \quad |x| < 1;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \quad |x| < 1;$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

На самом деле язык рядов является чрезвычайно удобным при исследовании многих математических закономерностей. Поэтому в гл. 1.9 теории рядов будет уделено достаточно много внимания, учитывая их возможные применения в различных разделах математики.

1.4.5. Монотонность и экстремумы

Рассмотрим теперь, как дифференциальное исчисление может использоваться в прикладных вопросах математического анализа. Основной задачей здесь будет изучение характера поведения функций.

Производная и монотонность

Изучим условия, позволяющие с помощью производной определять промежутки монотонности (см. подп. 1.2.5) функции.

Теорема 1.57. *Пусть функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на* (a, b). *Тогда*

1) $f'(x) > 0$ *на* $(a, b) \Longrightarrow f$ *строго возрастает на* (a, b);
2) $f'(x) \geqslant 0$ *на* $(a, b) \Longleftrightarrow f$ *возрастает на* (a, b);
3) $f'(x) < 0$ *на* $(a, b) \Longrightarrow f$ *строго убывает на* (a, b);
4) $f'(x) \leqslant 0$ *на* $(a, b) \Longleftrightarrow f$ *убывает на* (a, b).

Доказательство. Утверждения «$\Longrightarrow$» во всех случаях вытекают из формулы Лагранжа (теорема 1.48). Обратные утверждения в случаях 2) и 4) вытекают непосредственно из определения производной. □

Отметим, что утверждения, обратные к 1) и 3) в теореме 1.57, неверны. Для случая 1) это показывает пример функции $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

Производная и экстремумы

В лемме 1.16 было получено необходимое условие экстремума дифференцируемой функции (равенство $f'(a) = 0$). Но оно не является достаточным. Приведем ряд достаточных условий для экстремумов и укажем способы определения вида экстремума.

Условимся говорить, что функция f, определенная в некоторой окрестности точки a, **меняет знак при переходе через точку** a с «$+$» на «$-$» (или с «$-$» на «$+$»), если существует такая окрестность U_a, что при $x \in U_a^\circ$ выполнено $\operatorname{sign} f(x) = -\operatorname{sign}(x - a)$ (соответственно $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x - a)$).

Теорема 1.58. *Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности U_a точки a и дифференцируема в U_a°. Тогда если производная f' меняет знак при переходе через a, то a — точка экстремума, причем*

1) *a — строгий минимум, если f' меняет знак «с $-$ на $+$»;*
2) *a — строгий максимум, если f' меняет знак «с $+$ на $-$».*

Доказательство. Пусть, например, f' меняет знак с «$-$» на «$+$». Тогда для некоторой окрестности U_a° по теореме 1.48

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) > 0, \quad \xi \in (x, a) \cap U_a,$$

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) > 0 \quad \xi \in (a, x) \cap U_a. \quad \square$$

Теорема 1.59. *Пусть функция f дифференцируема в точке a n раз, $n \in \mathbb{N}$, причем*

$$f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Тогда

1) *если n четное, то a — строгий максимум при $f^{(n)}(a) < 0$ и a — строгий минимум при $f^{(n)}(a) > 0$;*
2) *если n нечетное, то a не является точкой экстремума.*

Доказательство. По формуле Тейлора с остатком Пеано (теорема 1.52)

$$f(x) - f(a) = \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right](x-a)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Поэтому найдется такая окрестность U_a, что

$$\operatorname{sign}\left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right] = \operatorname{sign} f^{(n)}(a), \quad x \in U_a^\circ.$$

Отсюда вытекает, что

$$\operatorname{sign}\left[f(x) - f(a)\right] = \operatorname{sign} f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

т. е. разность $f(x) - f(a)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(a)(x-a)^n$. Последнее выражение при четном n не меняет знак при переходе через точку a, а при нечетном n — меняет. □

Поиск глобальных экстремумов

Пусть функция $f \in C[a,b]$. Рассмотрим задачу нахождения величин

$$m = \inf f\left([a,b]\right), \quad M = \sup f\left([a,b]\right),$$

которые существуют по теореме 1.31.

Если f дифференцируема на (a,b), то удобно пользоваться следующим алгоритмом:

1) найти все стационарные точки функции, т. е. решить уравнение $f'(x) = 0$;

2) найти значения функции в стационарных точках, а также $f(a)$ и $f(b)$;

3) среди найденных значений функции выбрать наименьшее и наибольшее — это и будут m и M.

В п. 2) вместо значений во всех стационарных точках достаточно искать их только в точках экстремума (так поступают, если проверка на экстремум не является затруднительной).

Выгода в использовании такого алгоритма состоит в том, что, как правило, приходится вычислять значения функции в небольшом количестве точек.

1.4.6. Выпуклые функции

Определение выпуклости

Понятие выпуклости — одно из важнейших в математике. Оно широко используется во многих математических дисциплинах и играет важную роль в прикладных задачах. Ознакомимся с этим понятием с точки зрения анализа функций действительного переменного.

Определение 1.60. *Функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *называется* ***выпуклой*** *на* (a, b), *если для любых* $a < x_0 < x_1 < b$ *и любого* $\lambda \in (0, 1)$ *выполнено*

$$f\left((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\right) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \tag{1.82}$$

Если (1.82) *— строгое, то* f *называется* ***строго выпуклой*** *на* (a, b).

Геометрически выпуклость означает, что для любых точек $x_0, x_1 \in (a, b)$ отрезок, соединяющий точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ графика функции f, лежит не ниже этого графика на (x_0, x_1) (рис. 1.26).

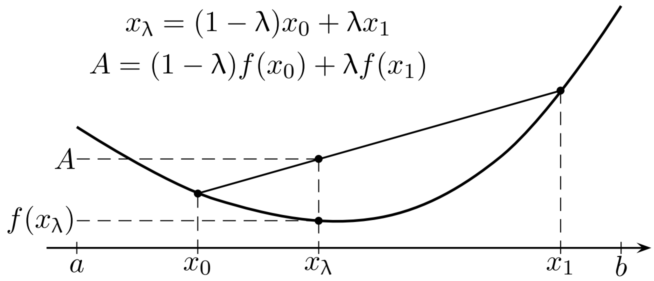

Рис. 1.26

Если в определении выпуклости функции знаки неравенств изменить на противоположные, то получим двойственные определения.

Определение 1.61. *Функция* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *называется* ***вогнутой*** *на* (a, b), *если для любых* $a < x_0 < x_1 < b$ *и любого* $\lambda \in (0, 1)$ *выполнено*

$$f\left((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\right) \geqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \tag{1.83}$$

Если неравенство (1.83) *— строгое, то* f *называется* ***строго вогнутой*** *на* (a, b) *(рис. 1.27).*

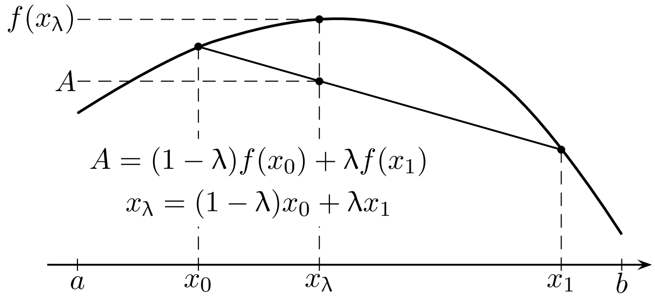

Рис. 1.27

Ясно, что достаточно изучать либо выпуклые функции, либо вогнутые, так как изучение одних сводится к изучению других. Ниже рассмотрим только выпуклые функции.

Придадим условию (1.82) из определения несколько иную форму. Обозначим $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$, тогда

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \tag{1.84}$$

Исключая λ из (1.82), получим

$$f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1). \tag{1.85}$$

Перепишем это неравенство в виде

$$\left[\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

и сгруппируем значения функций с одинаковыми коэффициентами:

$$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] \leqslant \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \left[f(x_1) - f(x)\right].$$

Сокращая на знаменатели и деля обе части на $(x_1 - x)(x - x_0)$, получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \tag{1.86}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} \tag{1.87}$$

при любых $a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b$. Геометрическая интерпретация этих неравенств видна на рис. 1.28.

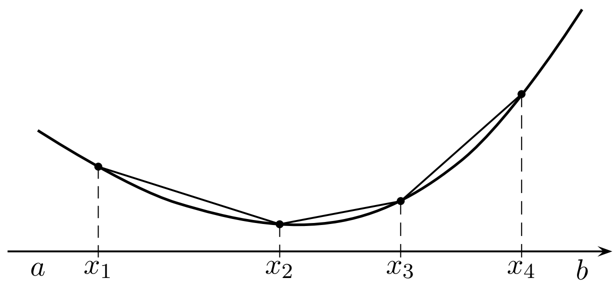

Рис. 1.28

Преобразуем далее неравенство (1.85) другим способом, записывая его сначала в виде

$$f(x) \leqslant \left[1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right] f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

а затем в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0) + \left[1 - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right] f(x_1).$$

Сгруппировав здесь, как и при доказательстве (1.86), значения функции с одинаковыми коэффициентами, придем к неравенствам

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \tag{1.88}$$

геометрический смысл которых можно уяснить из рис. 1.29.

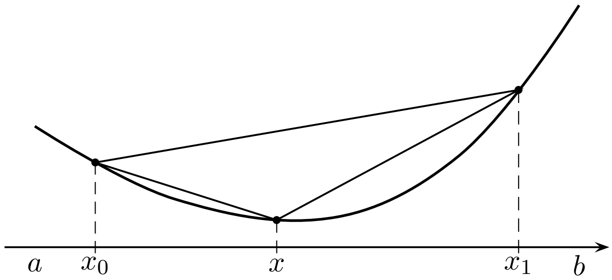

Рис. 1.29

Для случая строгой выпуклости эквивалентные неравенства (1.82)–(1.88) являются строгими.

Лемма 1.17. *Если функция f выпукла (строго выпукла) на (a, b), то для любого фиксированного $x \in (a, b)$ функция*

$$t \mapsto \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad t \in (a, b), \quad t \neq x,$$

возрастает (строго возрастает).

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из неравенств (1.87). □

Свойства выпуклых функций

Односторонние пределы

$$f'_{\pm}(a) := \lim_{x \to a \pm 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

будем называть **односторонними производными** функции в точке a ($f'_{-}(a)$ — **левая производная**, $f'_{+}(a)$ — **правая производная**).

Из теоремы 1.25 следует, что существование $f'(a)$ равносильно существованию обеих односторонних производных $f'_{\pm}(a)$ и их равенству.

Кроме того, из существования односторонней производной вытекает соответствующая односторонняя непрерывность.

Теорема 1.60. *Если функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпукла (строго выпукла) на (a, b), то*

1) для любого $x \in (a, b)$ существуют односторонние производные $f'_\pm(x)$;

2) для любых $a < x_1 < x_2 < b$ выполнены неравенства

$$f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2),$$

в частности, односторонние производные $f'_\pm$ возрастают (строго возрастают) на (a, b);

3) производная $f'(x)$ существует всюду на (a, b), кроме, быть может, не более чем счетного множества точек, и f' возрастает (строго возрастает) на множестве существования;

4) f непрерывна на (a, b).

Доказательство. 1) Существование односторонних производных $f'_\pm(x)$ следует непосредственно из леммы 1.17.

2) Неравенство $f'_-(x_1) \leqslant f'_+(x_1)$ вытекает из (1.86).

Для доказательства неравенства $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$ с помощью (1.87) запишем

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leqslant \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{-h}$$

с достаточно малым $h > 0$ (в (1.87) надо заменить x_2 на $x_1 + h$, x_3 на $x_2 - h$, x_4 на x_2 соответственно) и совершим предельный переход при $h \to +0$.

3) По теореме 1.39 возрастающая функция f'_- имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода. Если $x \in (a, b)$ — точка непрерывности для f'_- и $h > 0$, то в силу уже доказанного утверждения 2)

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(x + h),$$

и при $h \to 0$ получим $f'_-(x) = f'_+(x)$, т. е. x — точка дифференцируемости.

4) Непрерывность f слева и справа в каждой точке интервала (a, b) вытекает из односторонней дифференцируемости. □

Отметим, что выпуклая функция не обязана быть дифференцируемой всюду. Это можно видеть на примере строго выпуклой функции $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, не имеющей производной в точке 0.

Условия выпуклости

Выясним теперь, каким образом можно проверить, выпукла ли функция.

Теорема 1.61. *Если $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на (a, b), то*
1) f выпукла на (a, b) $\iff$ f' возрастает на (a, b);
2) f строго выпукла на (a, b) $\iff$ f' строго возрастает на (a, b).

Доказательство. Пусть f строго выпукла на (a, b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Нужно показать, что $f'(x_1) < f'(x_2)$. Возьмем вспомогательную точку $x \in (x_1, x_2)$ и для достаточно малых $h > 0$ запишем неравенство (1.87) для пяти точек $a < x_1 - h < x_1 < x < x_2 < x_2 + h$:

$$\frac{f(x_1 - h) - f(x_1)}{-h} \leqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h}.$$

Перейдем здесь к пределу при $h \to +0$:

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leqslant f'(x_2).$$

Точно так же получим возрастание производной у выпуклой функции.

Пусть теперь f' (строго) возрастает на (a, b). Обозначим для краткости $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ и запишем разность

$$\Delta = (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda)$$

в виде

$$\begin{aligned} \Delta = (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - [(1 - \lambda) + \lambda]f(x_\lambda) = \\ = \lambda[f(x_1) - f(x_\lambda)] - (1 - \lambda)[f(x_\lambda) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

По формуле Лагранжа (1.71) найдутся точки $\xi_0 \in (x_0, x_\lambda)$ и $\xi_1 \in (x_\lambda, x_1)$, для которых

$$\Delta = \lambda(x_1 - x_\lambda)f'(\xi_1) - (1 - \lambda)(x_\lambda - x_0)f'(\xi_0).$$

Нетрудно заметить, что

$$x_1 - x_\lambda = (1 - \lambda)(x_1 - x_0), \quad x_\lambda - x_0 = \lambda(x_1 - x_0),$$

поэтому Δ можно переписать в виде

$$\Delta = \lambda(1 - \lambda)(x_1 - x_0)[f'(\xi_1) - f'(\xi_0)].$$

Осталось воспользоваться (строгим) возрастанием производной. $\square$

Теорема 1.62. *Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема на (a, b). Тогда*

1) *f выпукла на (a, b) $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geqslant 0$ на (a, b);*
2) *$f''(x) > 0$ на (a, b) $\Longrightarrow f$ строго выпукла на (a, b).*

Доказательство проведите самостоятельно с использованием теорем 1.61 и 1.57.

Обратное к утверждению 2) теоремы 1.62 неверно. В этом можно убедиться на примере строго выпуклой функции $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, производная которой в точке 0 обращается в нуль.

Рекомендуется в качестве упражнения сформулировать и доказать аналоги всех утверждений этого пункта для вогнутых функций.

Упражнение 1.17. Докажите, что знак выпуклости степенной функции $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $x > 0$, зависит от показателя α следующим образом:

а) если $\alpha > 1$, то f_α строго выпукла на $(0, +\infty)$;

б) если $0 < \alpha < 1$, то f_α строго вогнута на $(0, +\infty)$;

в) если $\alpha < 0$, то f_α строго выпукла на $(0, +\infty)$.

Упражнение 1.18. Докажите, что показательная функция $f_a(x) = a^x$ является строго выпуклой на $\mathbb{R}$, знак выпуклости логарифмической функции $f_a(x) = \log_a x$, $x > 0$, зависит от основания $0 < a \neq 1$ следующим образом:

а) если $a > 1$, то f_a строго вогнута на $(0, +\infty)$;

б) если $0 < a < 1$, то f_a строго выпукла на $(0, +\infty)$.

Упражнение 1.19. Исследуйте на выпуклость функции $\sin x$, $\cos x$ и обратные им.

Некоторые классические неравенства

Следующая теорема дает обобщение неравенства (1.82) из определения выпуклой функции. В доказательстве используется следующая терминология: если набор чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad 0 < \lambda_k < 1, \ k = 1, \ldots, n, \tag{1.89}$$

то $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ называется **выпуклой комбинацией** точек x_k, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 1.63 (неравенство Йенсена). *Если функция f выпукла на интервале (a, b), то для любых точек $x_k \in (a, b)$, $k = 1, \ldots, n$, и чисел λ_k, удовлетворяющих условию (1.89), выполнено неравенство*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{1.90}$$

Доказательство. Проведем индукцию по n, начиная со случая $n = 2$, который является определением выпуклости.

Далее для выпуклой комбинации из $(n+1)$ точки в силу предположения индукции получим

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f\left((1 - \lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k). \quad \square$$

В терминах выпуклых комбинаций неравенство Йенсена (1.90) имеет простую трактовку: значение выпуклой функции от любой выпуклой комбинации точек не превосходит соответствующей (с теми же коэффициентами) выпуклой комбинации значений функции в этих точках.

Примером применения неравенства Йенсена может служить **неравенство Юнга**

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \quad x_k>0, \quad \lambda_k>0, \quad \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1. \tag{1.91}$$

Для доказательства (1.91) надо использовать вогнутость функции $\ln x$:

$$\ln\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln x_k = \ln\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k}.$$

При $\lambda_k = 1/n$, $k=1,\ldots,n$, из неравенства Юнга получим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad x_k>0.$$

Далее с помощью неравенства Юнга докажем два важных и часто используемых неравенства. Если $p>1$, то число p', определяемое равенством

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{1.92}$$

называется **сопряженным** к p. Очевидно, что $p'=\dfrac{p}{p-1}$.

Теорема 1.64 (неравенство Гельдера). *Пусть $p>1$. Тогда для любых $x_k, y_k \geqslant 0$, $k=1,\ldots,n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k x_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p'}\right)^{1/p'}. \tag{1.93}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (1.93) при дополнительном предположении, что

$$X := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} = 1, \quad Y := \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{p'}\right)^{1/p'} = 1. \tag{1.94}$$

Запишем неравенство Юнга при $n = 2$, $\lambda_1 = 1/p$, $\lambda_2 = 1/p'$:

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{p'},$$

возьмем здесь $a = x_k^p$ и $b = y_k^{p'}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и сложим полученные неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} y_k x_k \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} x_k^p + \frac{1}{p'} \sum_{k=1}^{n} y_k^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

в силу (1.94).

Чтобы избавиться от предположения (1.94), надо применить уже доказанный случай к наборам x_k/X и y_k/Y, для которых условие (1.94) выполнено. $\square$

При $p = 2$ неравенство (1.93) называют **неравенством Коши** или **Коши – Буняковского – Шварца**.

Теорема 1.65 (неравенство Минковского). *Пусть $p \geqslant 1$. Тогда для любых $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}. \tag{1.95}$$

Доказательство. При $p = 1$ доказательство сразу следует из неравенства треугольника.

Пусть теперь $p > 1$. Сначала преобразуем выражение

$$S = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \, |x_k + y_k|^{p-1},$$

а затем применим к каждому слагаемому неравенство (1.93):

$$S \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p'} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p'}.$$

Теперь надо вынести за скобки общий множитель справа и разделить на него обе части неравенства. $\square$

1.5. Интегральное исчисление

1.5.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Класс первообразных

Введем понятие, обратное, в определенном смысле, понятию производной функции. Пусть функции F и f заданы на интервале (a, b).

Определение 1.62. *Функция F называется* ***первообразной*** *для f на (a, b), если F дифференцируема на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x). \tag{1.96}$$

Подчеркнем, что зависимость понятия первообразной от рассматриваемого интервала (a, b) может оказаться существенной. Например, для любого интервала, не содержащего точку 0, функция $|x|$ является первообразной для функции $\operatorname{sign} x$ на этом интервале. С другой стороны, на любом интервале, содержащем точку 0, функция $\operatorname{sign} x$ не имеет первообразной.

В приведенном примере условие (1.96) не выполняется во всех точках. Поэтому полезно слегка расширить понятие первообразной.

Определение 1.63. *Функция F называется* ***обобщенной первообразной*** *для f на (a, b), если выполнены следующие условия:*

1) *F дифференцируема всюду на (a, b), кроме, быть может, конечного множества точек $A \subset (a, b)$;*

2) *для любого $x \in (a, b) \setminus A$ выполнено равенство (1.96);*

3) *F непрерывна на (a, b).*

На любом интервале, содержащем точку 0, функция $1/x$ не имеет даже обобщенной первообразной на нем. Это происходит потому, что естественный кандидат для этого — функция $\ln |x|$ — не является непрерывной в точке 0.

Далее чаще будем иметь дело с первообразной, чем с обобщенной первообразной. Тем не менее рекомендуем следить за тем, остается ли справедливым то или иное утверждение для обобщенных первообразных.

Если функция f имеет первообразную F на (a, b), то для любой постоянной $C \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto F(x) + C$, $x \in (a, b)$, также является первообразной для f на (a, b).

Обратное тоже верно. Действительно, пусть F и Φ — две первообразные для f на (a, b). Обозначим $R(x) = F(x) - \Phi(x)$, тогда $R'(x) = 0$ на (a, b) и по теореме 1.48 (формула Лагранжа)

$$R(x) - R(x_0) = R'(\xi)(x - x_0) = 0$$

и $R(x) \equiv R(x_0)$. Другими словами, любые две первообразные функции f отличаются на постоянную функцию.

Таким образом, класс всех первообразных функции f на (a, b) задается формулой $F + C$, где F — какая-нибудь первообразная для f на (a, b), а C — любая постоянная функция.

Определение 1.64. *Класс всех первообразных функции f на интервале (a, b) называется* ***неопределенным интегралом*** *этой функции на (a, b) и обозначается*

$$\int f(x)\,dx. \tag{1.97}$$

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F + C,$$

где F — какая-нибудь первообразная для функции f, а C — любая постоянная функция.

Свойства неопределенного интеграла

Под производной неопределенного интеграла будем понимать производную любой функции из этого класса. Тогда справедливо равенство

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f.$$

Кроме того, далее часто будет использоваться равенство неопределенных интегралов, понимаемое как совпадение соответствующих множеств. Наконец, под линейной комбинацией неопределенных интегралов будем понимать множество соответствующих линейных комбинаций первообразных.

Упражнение 1.20. Пользуясь определением первообразной и свойством линейности операции дифференцирования (теорема 1.44), докажите следующие утверждения:

1) если функция f дифференцируема на (a, b), то ее производная f' имеет первообразную на (a, b) и

$$\int f'(x)\,dx = f + C;$$

2) если функции f и g имеют первообразные на (a, b), то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, также имеет первообразную на (a, b) и

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$$

На некоторое время оставим в стороне вопрос о том, при каких условиях функция имеет первообразную (позже вернемся к этому очень важному вопросу), а сейчас изучим основные технические методы нахождения неопределенного интеграла.

Обычно для процесса нахождения неопределенного интеграла используется термин «интегрирование».

Таблица неопределенных интегралов

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1);$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right| + C.$$

Основные методы интегрирования

Общих методов интегрирования немного, рассмотрим важнейшие из них. Они связаны с правилами дифференцирования сложной функции и произведения.

Теорема 1.66 (формула интегрирования по частям). *Пусть функции $u, v \in C^1(a,b)$. Тогда uv' и $u'v$ имеют первообразные на (a,b) и*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = uv - \int u'(x)v(x)\,dx. \tag{1.98}$$

Доказательство. Существование первообразных для функций uv' и $u'v$ рассмотрим в следующей главе, где будет доказано, что любая непрерывная функция имеет первообразную.

Формула (1.98) вытекает непосредственно из правила дифференцирования произведения (теорема 1.44). □

Теорема 1.67 (формула замены переменной). *Пусть функция F является первообразной для f на (a,b) и функция $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$, причем $\varphi((\alpha,\beta)) \subset (a,b)$. Тогда $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ имеет первообразную на (α,β) и*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F\circ\varphi + C. \tag{1.99}$$

Доказательство сразу следует из правила дифференцирования сложной функции (теорема 1.45). □

Формулу (1.99) чаще записывают в следующем виде:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx.$$

Применять ее можно двумя способами: слева направо и справа налево.

При применении слева направо ее называют формулой подстановки. При этом, определив первообразную для f, необходимо вернуться к переменной t.

При использовании этого равенства справа налево его называют формулой замены переменной. Тогда, найдя первообразную для $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, следует вернуться к переменной x.

Отметим, что операция нахождения неопределенного интеграла не так проста, как операция вычисления производной. Это происходит потому, что первообразная элементарной функции не обязана быть элементарной. Примерами могут служить такие простые функции, как

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad e^{-x^2}.$$

При этом под элементарными функциями понимаются те, которые получаются из функций

$$x^{\alpha}, \quad \log_a x, \quad a^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x$$

с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций.

Ряд классов элементарных функций, для которых первообразная также является элементарной, подробно рассматривается на практических занятиях по математическому анализу.

1.5.2. Определенный интеграл Римана

Задачи, приводящие к конструкции интеграла

Сначала рассмотрим три задачи, имеющие различные цели, в каждой из которых появляется некоторая общая конструкция.

Задача нахождения первообразной. Пусть требуется вычислить значения первообразной F в точке $x \in (a, b)$ для функции f. Для этого отметим некоторые точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$ и запишем

$$F(x) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Точки ξ_k определяются по формуле Лагранжа (1.71), которая не дает способа их вычисления, а утверждает лишь существование. Поэтому можно ξ_k взять наудачу. Но тогда, чтобы нивелировать случайность в их выборе, нам выгоднее более мелко разбивать интервал, так как точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будут определяться точнее.

Задача определения длины пути. Пусть точка движется по числовой оси с мгновенной скоростью $v(t)$ и $s(t)$ — ее координата в момент времени t. Чтобы вычислить путь, пройденный за промежуток времени $[0, T]$, разобьем его на части точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Считая среднюю скорость на малом промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ примерно постоянной и используя в качестве ее приближенного значения $v(\tau_k)$, где $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, получим приближенное значение длины пути

$$s = \sum_{k=1}^{n} v\left(\tau_k\right)\left(t_k - t_{k-1}\right).$$

Такой способ рассуждений кажется тем точнее, чем мельче разбивается отрезок $[0, T]$.

Задача определения площади криволинейной трапеции. Пусть на отрезке задана положительная функция $f \in C[a, b]$. Для вычисления площади S криволинейной трапеции

$$\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$ и приближенно заменим S (рис. 1.30) суммой площадей прямоугольников (рис. 1.31):

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right),$$

где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Интуитивное представление о площади требует измельчения разбиения отрезка $[a, b]$ для того, чтобы последнее равенство было точнее. Примерно такой способ вычисления площади впервые применил Архимед (метод исчерпывания Архимеда), который рассматривал случай $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$.

Определение интеграла Римана

Пусть задан отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, причем $a < b$. Прежде чем ввести понятие интеграла, договоримся о нескольких новых терминах, которые будут использоваться систематически.

Разбиением отрезка называется любой упорядоченный набор различных точек из этого отрезка, включающий его концы (рис. 1.32):

$$\Pi := \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}. \tag{1.100}$$

Рангом разбиения называется число

$$\lambda = \lambda_\Pi := \max_{1 \leqslant k \leqslant n}\left(x_k - x_{k-1}\right),$$

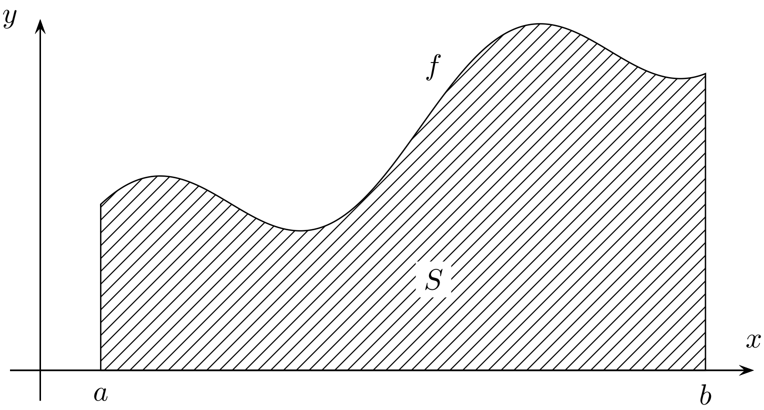

Рис. 1.30. Площадь криволинейной трапеции

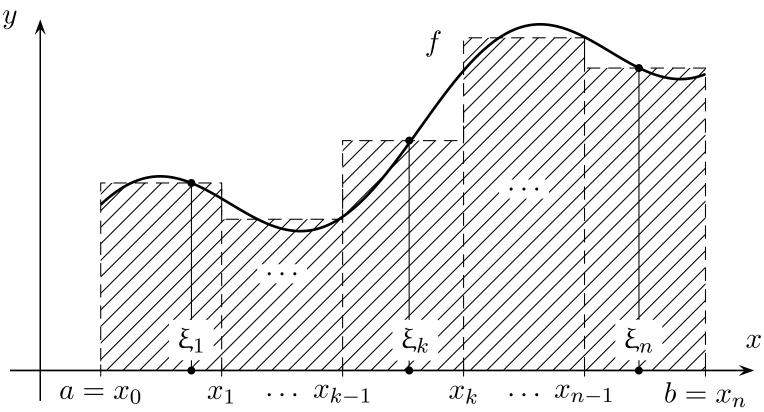

Рис. 1.31. Приближенное вычисление площади S

характеризующее степень измельчения отрезка при его разбиении.

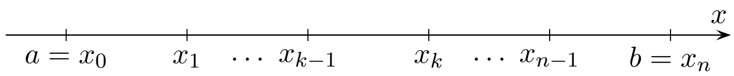

Рис. 1.32. Разбиение

Разбиение Π отрезка $[a, b]$ дает его представление в виде объединения

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$, будем называть **частичными**. Ранг разбиения характеризует степень измельчения отрезка точками разбиения.

Если задано разбиение Π отрезка $[a, b]$ и на каждом частичном отрезке зафиксирована точка

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\,, \quad k = 1, \dots, n,$$

то обозначим $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и пару (Π, ξ) назовем **разбиением с отмеченными точками** (рис. 1.33).

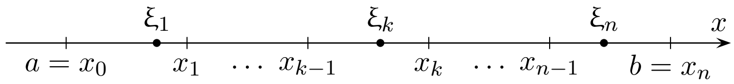

Рис. 1.33. Разбиение с отмеченными точками

Если задана функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиение (Π, ξ) отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками, то сумма

$$s = s\,(\Pi, \xi) = s_f\,(\Pi, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) \tag{1.101}$$

называется **интегральной суммой** Римана функции f, соответствующей разбиению (Π, ξ) с отмеченными точками.

Определение 1.65. *Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Число I называется **пределом интегральных сумм**, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,(\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s_f(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{1.102}$$

*Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s$. Число I называется **определенным интегралом Римана** функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f\,dx. \tag{1.103}$$

В случае существования интеграла будем говорить также, что функция f **интегрируема (по Риману)** на $[a, b]$. Класс всех интегрируемых на $[a, b]$ функций обозначим $R[a, b]$.

В обозначении определенного интеграла (1.103) a называется **нижним пределом интегрирования**, b — **верхним пределом интегрирования**, f — **подынтегральной функцией** и $f(x)\,dx$ — **подынтегральным выражением**.

Отметим, что если функция не является ограниченной на $[a, b]$, то при фиксированном разбиении интегральная сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора одной из отмеченных точек. Поэтому в таком случае предела интегральных сумм не существует и неограниченные функции не входят в класс $R[a, b]$.

Другими словами, ограниченность функции f на $[a, b]$ — необходимое условие интегрируемости, но достаточным условием оно не является. Например, для функции Дирихле (1.4) при любом фиксированном разбиении Π отрезка $[0, 1]$ будет $s(\Pi, \xi) = 1$, если $\xi_k \in \mathbb{Q}$ и $s(\Pi, \xi) = 0$, если $\xi_k \notin \mathbb{Q}$. Следовательно, ограниченная функция Дирихле не является интегрируемой на отрезке $[0, 1]$.

1.5.3. Условия существования интеграла

Определение 1.65 является весьма сложным для того, чтобы использовать его для проверки существования интеграла. В этом пункте рассмотрим условия, которые позволят по свойствам функции проверять, является ли она интегрируемой.

Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a, b]$.

Определение 1.66. *Если* Π *— произвольное разбиение отрезка* $[a, b]$*, то величины*

$$s_*(\Pi) := \inf_{\xi} s(\Pi, \xi), \quad s^*(\Pi) := \sup_{\xi} s(\Pi, \xi) \tag{1.104}$$

называются соответственно ***нижней*** *и* ***верхней суммами Дарбу*** *для функции* f*, отвечающими заданному разбиению* Π*.*

В определении 1.66 точные грани берутся по всевозможным наборам ξ отмеченных точек. При заданном разбиении Π суммы Дарбу показывают возможную степень разброса интегральных сумм, получаемую за счет свободы в выборе отмеченных точек ξ_k (ниже этому высказыванию будет придан точный смысл). Подчеркнем, что суммы Дарбу определены корректно лишь для ограниченных функций.

Суммы Дарбу не являются, вообще говоря, интегральными суммами. Но если функция непрерывна на $[a, b]$, то с помощью теоремы Вейерштрасса о достижении точных границ (теорема 1.32) можно показать, что суммы Дарбу являются интегральными суммами, соответствующими некоторому выбору отмеченных точек.

Нетрудно показать, что суммы Дарбу можно записать в виде, близком к интегральным суммам:

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1}\right), \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1}\right), \tag{1.105}$$

где

$$m_k := \inf f\left([x_{k-1}, x_k]\right), \quad M_k := \sup f\left([x_{k-1}, x_k]\right). \tag{1.106}$$

Введем колебание функции f на k-м частичном отрезке

$$\omega_k := M_k - m_k \tag{1.107}$$

(см. (1.47)). Обозначения (1.106) и (1.107) используются систематически.

Запись $\Pi \subset \Pi'$ всегда будет означать, что множество точек разбиения Π содержится во множестве точек разбиения Π'.

Лемма 1.18. *Пусть функция f ограничена на $[a, b]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ) выполнены неравенства $s_*(\Pi) \leqslant s(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi)$;*

2) *если $\Pi \subset \Pi'$, то $s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi')$ и $s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi)$;*

3) *для любых разбиений Π и Π' выполнены неравенства*

$$s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi'). \tag{1.108}$$

Доказательство. Свойство 1) вытекает непосредственно из определения 1.66.

Свойство 2) достаточно доказать в предположении, что разбиение Π' получается из разбиения Π добавлением одной точки $\overline{x} \in [x_{l-1}, x_l]$ с некоторым $1 \leqslant l \leqslant n$. Общий случай получается индукцией по добавленным точкам.

Рассмотрим, к примеру, нижние суммы Дарбу. Если $m_l' = \inf f\left([x_{l-1}, \overline{x}]\right)$ и $m_l'' = \inf f\left([\overline{x}, x_l]\right)$, то

$$s_*(\Pi') - s_*(\Pi) = m_l'\left(\overline{x} - x_{l-1}\right) + m_l''\left(x_l - \overline{x}\right) - m_l\left(x_l - x_{l-1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant m_l\left(\overline{x} - x_{l-1} + x_l - \overline{x} - x_l + x_{l-1}\right) = 0,$$

поскольку $m_l' \geqslant m_l$ и $m_l'' \geqslant m_l$.

Для доказательства свойства 3) рассмотрим новое разбиение $\Pi \cup \Pi'$ и используем уже доказанное свойство 2):

$$s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi \cup \Pi') \leqslant s^*(\Pi \cup \Pi') \leqslant s^*(\Pi'). \quad \square$$

Отметим, что если $\Pi \subset \Pi'$, то

$$s_*(\Pi') - s_*(\Pi) \leqslant \Omega l, \quad s^*(\Pi) - s^*(\Pi') \leqslant \Omega l, \tag{1.109}$$

где l — сумма длин частичных отрезков разбиения Π, содержащих точки из Π', и Ω — колебание функции на отрезке $[a, b]$.

Интегралы Дарбу

Определение 1.67. *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то числа*

$$I_* := \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* := \inf_{\Pi} s^*(\Pi) \tag{1.110}$$

называются соответственно ***нижним*** *и* ***верхним интегралами Дарбу*** *функции f на отрезке $[a, b]$.*

Лемма 1.19. *Если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то для любых разбиений Π и Π' выполнены неравенства*

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

Доказательство. Это сразу следует из утверждения 3) леммы 1.18 — в неравенстве (1.108) надо перейти сначала к точной верхней грани по всем разбиениям Π, приходя к неравенству

$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant s^*(\Pi').$$

Затем в этом неравенстве необходимо перейти к точной нижней грани по всем разбиениям Π'. $\square$

Лемма 1.20. *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то*

$$I_* = \lim_{\lambda\to 0} s_*(\Pi), \quad I^* = \lim_{\lambda\to 0} s^*(\Pi).$$

Доказательство. Докажем, например, первое равенство (второе докажите самостоятельно). Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разбиение Π_ε так, чтобы $s_*(\Pi_\varepsilon) > I_* - \varepsilon/2$. Пусть разбиение Π_ε содержит n_ε точек (не считая точки a и b). Положим $\delta = \varepsilon/(2n_\varepsilon\Omega)$ и возьмем любое разбиение Π, для которого $\lambda(\Pi) < \delta$. Тогда

$$0 \leqslant I_* - s_*(\Pi) = I_* - s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) + s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) - s_*(\Pi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (s_*(\Pi \cup \Pi_\varepsilon) - s_*(\Pi)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Omega\lambda(\Pi)n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Условия интегрируемости

Следующая теорема показывает область применения сумм и интегралов Дарбу — с их помощью можно проверять, интегрируема функция или нет.

Теорема 1.68 (критерий интегрируемости). *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то следующие условия равносильны:*

1) *f интегрируема на $[a,b]$;*
2) $\lim\limits_{\lambda\to 0} (s^*(\Pi) - s_*(\Pi)) = 0$;
3) $I_* = I^*$.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть I — интеграл функции f. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы для любого разбиения с отмеченными точками (Π, ξ), $\lambda(\Pi) < \delta$, выполнялись неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2} < s(\Pi, \xi) - I < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдя здесь к точным верхней и нижней граням по ξ, получим неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant s^*(\Pi) - I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_*(\Pi) - I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого разбиения Π с $\lambda(\Pi) < \delta$. Из этих неравенств вытекает, что

$$-\varepsilon \leqslant s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что выполнено условие 2).

2) $\Longrightarrow$ 3). Это утверждение вытекает непосредственно из леммы 1.19:

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(\Pi) \to 0.$$

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $I = I_* = I^*$ — общее значение интегралов Дарбу. Тогда неравенства

$$s(\Pi, \xi) - I \leqslant s^*(\Pi) - I^*, \quad s(\Pi, \xi) - I \geqslant s_*(\Pi) - I_*$$

вместе с леммой 1.20 дают условие 1). Теорема доказана полностью. $\square$

Условие 2) теоремы 1.68 можно переписать в виде

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \left(x_k - x_{k-1}\right) = 0. \tag{1.111}$$

(см. обозначение (1.107)). Поэтому обычно его называют условием интегрируемости в терминах колебаний.

Теорема 1.69 (классы интегрируемых функций). 1) *Если функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

2) *Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$.*

3) *Функция, монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. 1) Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — точки разрыва функции f. Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta_1 = \varepsilon/(8\Omega N)$ (Ω — колебание функции f на $[a, b]$, см. (1.47)) и пусть U_i — δ_1-окрестность точки x_i, $i = 1, \ldots, N$, а $X = [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{N} U_k$. Ясно, что X является объединением конечного числа отрезков. Так как f непрерывна на каждом из отрезков, образующих X, то она равномерно непрерывна на каждом из них и, значит, равномерно непрерывна на X. Поэтому найдется такое $\delta_2 > 0$, что для любого отрезка $\Delta \subset X$ с длиной, не превосходящей δ_2, выполнено неравенство

$$\omega(\Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, и пусть Π — любое разбиение, для которого $\lambda(\Pi) < \delta$. Пусть также

$$A = \{k : 1 \leqslant k \leqslant n, [x_{k-1}, x_k] \subset X\}, \quad B = \{1, \ldots, n\} \setminus A.$$

Тогда
$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k\in A} + \sum_{k\in B} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k\in A} (x_k - x_{k-1}) + \Omega \sum_{k\in B} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Omega (\delta + 2\delta_1 + \delta) N = \varepsilon.$$

Утверждение 2) вытекает непосредственно из уже доказанного утверждения 1).

3) Для $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon/\Omega$. Тогда если $\lambda(\Pi) < \delta$, то
$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}) < \delta \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \delta\Omega = \varepsilon. \quad \square$$

Все утверждения теоремы 1.69 доказаны.

1.5.4. Свойства определенного интеграла

Далее рассмотрим ряд простейших свойств определенного интеграла Римана, которые регулярно применяются при его использовании в теории и на практике.

Линейность, аддитивность и монотонность

Первое свойство связывает интеграл и арифметические операции над функциями.

Теорема 1.70 (линейность интеграла). *Если функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, то для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.112}$$

Доказательство. Интегрируемость линейной комбинации вытекает из критерия интегрируемости (см. теорему 1.68) и неравенства
$$\omega_{\alpha f+\beta g}(\Delta) \leqslant |\alpha|\, \omega_f(\Delta) + |\beta|\, \omega_g(\Delta)$$
для колебаний на любом отрезке $\Delta \subset [a, b]$, которое легко доказывается (см. обозначение (1.47)).

Для доказательства (1.112) достаточно записать интегральные суммы для линейной комбинации $\alpha f + \beta g$ и перейти к пределу в равенстве:
$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)] (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad \square$$

Одна из задач, приводящих к понятию интеграла, — задача вычисления площади криволинейной трапеции (см. подп. 1.5.2). Важнейшим свойством площади является то, что при разбиении трапеции на части ее общая площадь равна сумме площадей этих частей. Поэтому нужно проследить за тем, чтобы подобное свойство имелось и у интеграла.

Теорема 1.71 (аддитивность интеграла). 1) *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ она интегрируема на $[\alpha, \beta]$.*

2) *Если $c \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.113}$$

Доказательство. Если Π — любое разбиение $[\alpha, \beta]$, то его можно «достроить» до разбиения Π' отрезка $[a, b]$ с тем же рангом. Следовательно,

$$s^*(\Pi, [\alpha, \beta]) - s_*(\Pi, [\alpha, \beta]) \leqslant s^*(\Pi', [a, b]) - s_*(\Pi', [a, b]),$$

и утверждение 1) следует из критерия интегрируемости.

Для доказательства равенства (1.113) надо записать интегральные суммы, включив точку c в разбиение

$$\Pi = \{a = x_0 < \ \ldots < x_i = c < \ \ldots < x_n = b\}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{i} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

и интегральные суммы сходятся к соответствующим интегралам из (1.113). $\square$

Сейчас удобно ввести следующее соглашение.

Определение 1.68. *Если $a > b$ и функция f интегрируема на $[b, a]$, то положим*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Кроме того, пусть

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

При таком соглашении равенство (1.113) остается справедливым при любом расположении точек a, b и c относительно друг друга, лишь бы f была интегрируема на отрезке, содержащем все эти точки.

Одним из важнейших свойств интеграла является возможность получения оценок для него. Первичным в этом смысле служит следующее свойство монотонности.

Теорема 1.72 (монотонность интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, причем $f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in [a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.114}$$

Доказательство. Доказательство получается предельным переходом в неравенстве

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right). \quad \square$$

Теоремы о среднем значении

Свойство монотонности является принципиальным, несмотря на его простоту. Оно дает возможность оценивать определенные интегралы. Исходя из этого свойства выведем ряд так называемых теорем о среднем значении, которые позволят успешно проводить оценки интегралов.

Теорема 1.73. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда*
1) *если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0;$$

2) *если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a, b]$, то*

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a);$$

3) *$|f|$ интегрируема на $[a, b]$ и справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Первые два утверждения вытекают непосредственно из предыдущей теоремы. Интегрируемость модуля вытекает из критерия интегрируемости (теорема 1.68 и (1.111)) и неравенства

$$\omega_{|f|}(\Delta) \leqslant \omega_f(\Delta)$$

(см. (1.47)). Наконец, предельный переход в неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})$$

дает неравенство утверждения 3). □

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то по теореме 1.71 она интегрируема также на любом отрезке $[a, x] \subset [a, b]$, $x \in [a, b]$. Следовательно, в таком случае определена новая функция

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b], \tag{1.115}$$

которая называется **интегралом с переменным верхним пределом** для функции f. Из теоремы 1.73 можно вывести свойство непрерывности этой функции.

Теорема 1.74. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то ее интеграл с переменным верхним пределом (1.115) непрерывен на $[a, b]$.*

Доказательство. Поскольку $f \in R[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$ и существует такое M, что $|f| \leqslant M$ на $[a, b]$. Поэтому, используя теорему 1.71, для любых $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ получим

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_a^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt - \int_a^{x_1} f(t)\,dt\right| \leqslant M(x_2 - x_1).$$

Таким образом, доказано, что $F \in H^1$ (определение класса Липшица H^1 см. в (1.49)). □

Теорема 1.75 (первая теорема о среднем). *Пусть функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, g сохраняет знак на $[a, b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $x \in [a, b]$. Тогда существует такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $f \in C[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть, например, $g(x) \geqslant 0$. Тогда для любого разбиения (Π, ξ) с отмеченными точками выполнено неравенства

$$m\sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) g\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n} g\left(\xi_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Перейдя здесь к пределу, получим

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Если интеграл от функции g равен нулю, можно взять любое μ. Иначе обе части последнего неравенства можно разделить на интеграл от g.

В случае когда f непрерывна на $[a,b]$, надо воспользоваться теоремой Больцано – Коши о промежуточных значениях (см. теорему 1.34). □

Следствие 1.1. *Если $f \in C[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Доказательство. В теореме 1.75 надо взять $g(x) \equiv 1$. □

Теорема 1.76 (вторая теорема о среднем). *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда*

1) *если функция g неотрицательна и убывает на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx;$$

2) *если функция g неотрицательна и возрастает на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx;$$

3) *если функция g монотонна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx. \tag{1.116}$$

Доказательство. 1) Для доказательства возьмем любое разбиение Π и рассмотрим

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\left[g(x) - g(x_{k-1})\right]\,dx \equiv S_1 + S_2.$$

Вторая из этих сумм S_2 оценивается следующим образом:

$$|S_2| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\,(x_k - x_{k-1}) \to 0,$$

если $\lambda(\Pi) \to 0$ ($M = \sup f([a,b])$). Здесь были использованы утверждение 2) теоремы 1.69 и критерий интегрируемости (теорема 1.68).

Для оценки первой суммы S_1 преобразуем ее, применяя свойство аддитивности (теорема 1.71) и обозначение (1.115):

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\left[F(x_k) - F(x_{k-1})\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})F(x_{k-1}) =$$

$$= F(b)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right] - F(a)g(a) =$$

$$= F(b)g(x_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k)\left[g(x_{k-1}) - g(x_k)\right].$$

Отсюда и из предположений о функции g вытекают неравенства

$$mg(a) \leqslant S_1 \leqslant Mg(a),$$

где $m = \inf F([a,b])$; $M = \sup F([a,b])$. Кроме того, так как $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_2 = 0$, то, перейдя к пределу в последнем неравенстве, получим

$$mg(a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из непрерывности F (теорема 1.74) и теоремы Больцано – Коши о промежуточных значениях (теорема 1.34).

2) Это утверждение доказывается точно так же, как и 1).

3) Если, например, функция g убывает, то надо применить 1) к функции $g - g(b)$ вместо g:

$$\int\limits_a^b f(x)\left[g(x) - g(b)\right]\,dx = \left[g(a) - g(b)\right]\int\limits_a^\xi f(x)\,dx.$$

Отсюда с помощью свойства аддитивности интеграла (теорема 1.71) выведем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx + g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx - g(b)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx =$$

$$= g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \quad \square$$

Равенство (1.116) называется **формулой Бонне**.

1.5.5. Формула Ньютона – Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда по теореме 1.71 определен непрерывный по теореме 1.74 интеграл с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

Лемма 1.21. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$. Тогда ее интеграл с переменным верхним пределом F имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Доказательство. Конечно, если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то в формулировке леммы речь идет об односторонней производной функции F.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы при $|t - x_0| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда если $0 < h < \delta$, то

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt < \varepsilon.$$

Здесь последовательно использовались свойства аддитивности (теорема 1.71), линейности (теорема 1.70), неравенства 3) и 2) теоремы 1.73.

При $-\delta < h < 0$ рассуждение такое же. □

Теорема 1.77. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то у нее существует первообразная на (a, b). Любая первообразная для f имеет вид*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt + C, \quad x \in [a, b],$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство вытекает непосредственно из леммы 1.21 и описания класса первообразных, которое было дано в подп. 1.5.1. □

Основная теорема интегрального исчисления

Теорема 1.78 (формула Ньютона – Лейбница). *Если $f \in C[a, b]$, то для любой ее первообразной Φ справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)\Big|_a^b. \tag{1.117}$$

Доказательство. По теореме 1.77 для любой первообразной Φ найдется такая постоянная C, что

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt + C, \quad x \in [a, b].$$

Для определения значения C положим $x = a$, тогда $C = \Phi(a)$ и

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt + \Phi(a), \quad x \in [a, b].$$

Положим здесь $x = b$ и получим (1.117). $\square$

Отметим, что если функция f ограничена и имеет лишь конечное число точек разрыва на $[a, b]$, то она имеет обобщенную первообразную в смысле определения 1.63 — определенный интеграл с переменным верхним пределом, который непрерывен по теореме 1.74. Для таких функций и теорема 1.77, и формула Ньютона – Лейбница (1.117) сохраняют силу с теми же доказательствами.

Формула Ньютона – Лейбница (1.117) является основной для интегрального исчисления, так как она связывает понятия первообразной и определенного интеграла. Она имеет также огромное число приложений.

1.5.6. Основные методы интегрирования

Интегрирование по частям

Теорема 1.79 (интегрирование по частям). *Если функции u и v непрерывны и имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{1.118}$$

Доказательство. В силу формулы дифференцирования произведения (см. теорему 1.44)

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Поэтому, используя формулу Ньютона – Лейбница и свойство линейности интеграла (1.112), получим

$$uv\Big|_a^b = \int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b uv'\,dx + \int\limits_a^b u'v\,dx. \quad \square$$

Как первое приложение формулы Ньютона – Лейбница укажем новую форму остатка для формулы Тейлора.

Теорема 1.80 (формула Тейлора). *Пусть функция f имеет $n+1$ непрерывную производную на отрезке $[a, x]^*$. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{1.119}$$

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Теперь последний интеграл надо проинтегрировать по частям n раз. $\square$

Замена переменной

Теорема 1.81 (замена переменной). *Пусть функция* $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, *причем* $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ *и* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. *Тогда если функция* f *непрерывна на* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.120}$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для f. Она существует по теореме 1.77. По формуле Ньютона – Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Кроме того, по формуле дифференцирования композиции (1.65) функция $F \circ \varphi$ является первообразной для $f \circ \varphi \cdot \varphi'$, и снова по формуле Ньютона – Лейбница

$$F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Из этих двух равенств вытекает (1.120). □

1.5.7. Приложения определенного интеграла

Достаточно общие определения таких геометрических величин, как «длина», «площадь», «объем», пока не были даны. Тем не менее исходя из интуитивных представлений о них можно вывести некоторые формулы, выражающие эти понятия с помощью определенного интеграла и используемые в качестве первичных определений. Позже вопросы измерения величин будут рассмотрены систематически, и новые определения не будут противоречить старым.

Длина кривой

Пусть $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$. Тогда отображение

$$t \mapsto (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

динамически описывает кривую на плоскости (рис. 1.34).

Образ Γ отрезка $[\alpha, \beta]$ при таком отображении будем называть гладкой кривой, а пару функций (φ, ψ) — параметризацией этой кривой.

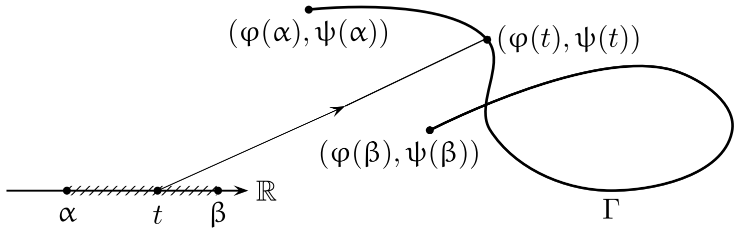

Рис. 1.34. Кривая и параметризация

Зададим произвольно разбиение $\Pi = \{\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и найдем длину ломаной, вписанной в кривую в точках $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$:

$$l(\Pi) := \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right]^2 + \left[\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})\right]^2 \right)^{1/2}.$$

Эта величина дает приближенное значение длины кривой, которое тем ближе к длине кривой (по нашим представлениям), чем меньше ранг разбиения. Преобразуем величину $l(\Pi)$:

$$l(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left[\varphi'(\tau_k)\right]^2 + \left[\psi'(\tau'_k)\right]^2 \right)^{1/2} (t_k - t_{k-1}),$$

где $\tau_k, \tau'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ — некоторые отмеченные точки, определяемые по формуле Лагранжа. В таком виде $l(\Pi)$ напоминает интегральную сумму

$$s(\Pi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} \left([\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k)]^2 \right)^{1/2} (t_k - t_{k-1})$$

для интеграла

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, dt.$$

С помощью элементарного неравенства $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$ легко оценить разность

$$|s(\Pi, \tau) - l(\Pi)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \left[\psi'(\tau_k)\right]^2 - \left[\psi'(\tau'_k)\right]^2 \right|^{1/2} (t_k - t_{k-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \{2M(\psi')\,\omega(\lambda_\Pi, \psi')\}^{1/2} (\beta - \alpha) \to 0, \quad \lambda_\Pi \to 0.$$

Здесь $M(\psi') = \sup \psi'([\alpha, \beta])$ и $\omega(\delta, \psi')$ — модуль непрерывности (см. (1.48)).

Таким образом, придем к формуле для вычисления длины плоской кривой:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\, dt. \tag{1.121}$$

В частности, длина графика функции $f \in C^1[a, b]$ вычисляется так:

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx. \tag{1.122}$$

Аналогично предыдущему можно определить длину пространственной кривой, задаваемой функциями $\varphi, \psi, \chi \in C^1[\alpha, \beta]$, как

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\chi'(t)\right]^2}\, dt. \tag{1.123}$$

Площадь криволинейной трапеции

Пусть $f \in C[a, b]$ — неотрицательная функция и

$$T := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}.$$

Тогда площадь криволинейной трапеции T можно определить равенством

$$S(T) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx. \tag{1.124}$$

Соображения, приводящие к этой формуле, описывались в подп. 1.5.2. Отметим, что если отказаться от требования неотрицательности функции f, то приходится считаться с тем, что площади из нижней полуплоскости отрицательны.

Если заданы две функции $f_1, f_2 \in C[a, b]$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при всех $x \in [a, b]$, то площадь множества

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\right\}$$

определяется равенством

$$S(T) = \int\limits_{a}^{b} \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx.$$

Упражнение 1.21. 1) Полярные координаты точки $(x, y) \neq (0, 0)$ на плоскости связаны с декартовыми равенствами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.125}$$

Площадь криволинейного сектора

$$\{(\rho, \varphi) : \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}$$

($\rho \in C[\alpha, \beta]$ — положительная функция) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

2) Площадь поверхности, полученной вращением графика положительной функции $f \in C^1[a, b]$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

3) Пусть $f \in C[a, b]$ — положительная функция. Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции

$$\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\, dx.$$

4) Более общий случай получается, если известна площадь сечения $S(t)$ тела плоскостью $x = t$ и $S \in C[a, b]$. Тогда

$$V = \int\limits_{a}^{b} S(x)\, dx.$$

1.5.8. Несобственные интегралы

Покажем, каким образом можно расширить понятие интеграла, чтобы придать смысл интегралам от неограниченных функций и по неограниченному промежутку. Поскольку в обоих случаях суть будет одна и та же, оба варианта рассмотрим одновременно.

Определение и свойства несобственного интеграла

Пусть на промежутке $[a, \omega)$ задана функция f. Здесь для ω возможны два варианта: $\omega \in \mathbb{R}$ или $\omega = +\infty$. Условимся символ ω называть **особенностью** функции, если $\omega = +\infty$ или $\omega \in \mathbb{R}$ и f не является ограниченной в любой окрестности точки ω.

Определение 1.69. *Если для любого $b \in (a, \omega)$ функция f интегрируема на $[a, b]$ и существует*

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int_a^b f(x)\, dx,$$

*то говорят, что f **интегрируема в несобственном смысле** на $[a, \omega)$, а этот предел называется **несобственным интегралом** f на $[a, \omega)$ и обозначается*

$$\int_a^\omega f(x)\, dx. \tag{1.126}$$

В этом случае также говорят, что несобственный интеграл сходится.

Отметим, что если $\omega \in \mathbb{R}$ и функция f интегрируема на $[a, \omega]$, то она интегрируема на $[a, \omega]$ также в несобственном смысле. Это вытекает из того, что f ограничена на $[a, \omega]$, и в силу утверждения 3) теоремы 1.73

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int_b^\omega f(x)\, dx = 0.$$

В частности, не возникнет путаницы из-за того, что одно и то же обозначение используется для интеграла Римана и для несобственного интеграла.

Класс функций, интегрируемых в несобственном смысле на $[a, \omega]$, обозначим $R_*[a, \omega)$. Предыдущее замечание можно переформулировать так: если $\omega \in \mathbb{R}$, то

$$R[a, \omega] \subset R_*[a, \omega).$$

Для несобственного интеграла сохраняют силу основные свойства определенного интеграла.

Теорема 1.82. 1) *Несобственный интеграл обладает свойствами линейности, аддитивности и монотонности.*

2) *Если функции $u, v \in C^1[a, \omega)$ и существует предел $\lim\limits_{x \to \omega - 0} u(x)v(x)$, то функции $u'v$, uv' принадлежат или не принадлежат классу $R_*[a, \omega)$ одновременно. В случае когда $u'v, uv' \in R_*[a, \omega)$, справедливо равенство*

$$\int_a^\omega u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\omega - 0} - \int_a^\omega u'(x)v(x)\, dx.$$

3) *Если* $f \in R_*[a,\omega)$, *функция* $\varphi \in C^1[\alpha,\gamma)$ *строго монотонна,* $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\gamma-0}\varphi(t)=\omega$, *то* $(f\circ\varphi)\cdot\varphi' \in R_*[\alpha,\gamma)$ *и*

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\gamma f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Все утверждения вытекают непосредственно из определения несобственного интеграла и соответствующих свойств интеграла Римана (см. теоремы 1.70–1.72, 1.79, 1.81). Проверьте это самостоятельно. □

Другие виды особенностей

Выше было дано определение несобственного интеграла, если правый конец промежутка был особенностью функции. Изменения, которые следует сделать для рассмотрения случая, когда левый конец является особенностью, очевидны.

Если функция имеет несколько особенностей на промежутке интегрирования, то при определении интеграла следует исходить из принципа разделения особенностей. Например, левый интеграл в равенстве

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

существует, если существуют оба интеграла справа. Аналогично если f не является ограниченной в любой окрестности внутренней точки $\omega \in (a,b)$ промежутка интегрирования, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^\omega f(x)\,dx + \int\limits_\omega^b f(x)\,dx.$$

Так же поступают, когда на (a,b) имеется любое конечное число особенностей функции.

Иногда, впрочем, используют следующий способ определения несобственного интеграла с внутренней особенностью: если $\omega \in (a,b)$ — особенность функции, то полагают

$$v.\,p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{\omega-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{\omega+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Такой несобственный интеграл называют интегралом в смысле **главного значения по Коши**. Его использование всегда оговаривается особо.

Условия сходимости несобственного интеграла

Определение сходимости несобственного интеграла (1.126) означает существование предела слева в точке ω для интеграла с переменным верхним пределом от f. Поэтому из критерия Коши существования предела функции сразу вытекает критерий сходимости для несобственного интеграла.

Теорема 1.83 (критерий Коши). *Пусть функция $f \in R[a,b)$ при любом $b \in (a,\omega)$. Тогда сходимость несобственного интеграла равносильна условию*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b_\varepsilon \in (a,\omega) \quad \forall\, b_1, b_2 \in (b_\varepsilon, \omega) \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Определение 1.70. *Будем говорить, что несобственный интеграл (1.126)* ***сходится абсолютно****, если сходится интеграл*

$$\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx. \tag{1.127}$$

Несобственный интеграл (1.126) ***сходится условно****, если интеграл (1.126) сходится, а интеграл (1.127) расходится.*

Из утверждения 3) теоремы 1.73 и из теоремы 1.83 следует, что абсолютная сходимость несобственного интеграла влечет его сходимость. Обратное утверждение неверно (приведите пример самостоятельно).

Проверка абсолютной сходимости осуществляется весьма просто с помощью следующей теоремы, которая напоминает критерий сходимости монотонной последовательности (теорема 1.10).

Теорема 1.84. *Пусть функция f неотрицательна и $f \in R[a,b]$ при любом $b \in (a,\omega)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится;*

2) *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ *ограничена на* (a,ω).

Доказательство. В самом деле, так как f неотрицательна, то функция F возрастает и существование предела $\lim\limits_{x\to\omega-0} F(x)$ равносильно ее ограниченности (см. теорему 1.27). $\square$

Теорема 1.85 (признак сравнения). *Пусть $f, g \in R[a,b]$ при любом $b \in (a,\omega)$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,\omega)$. Тогда*

1) *из сходимости интеграла* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *и неравенство*

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\omega g(x)\,dx;$$

2) *из расходимости интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$.

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы. □

Другими словами, теорему можно переформулировать так: интеграл (1.126) от неотрицательной функции сходится, если эта функция не слишком велика.

Для условной сходимости значение имеют не только размеры функции, но и распределение ее положительных и отрицательных значений, поэтому условия сходимости более сложны.

Теорема 1.86 (признак Абеля – Дирихле). *Пусть* $f \in R[a,b]$ *при любом* $b \in (a,\omega)$ *и* g *неотрицательна и монотонна на* $[a,\omega)$. *Тогда для сходимости интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)\,dx$ *достаточно выполнения любой пары условий:*

1) $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится;*

2) g *ограничена на* (a,ω)

или

1)′ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *ограничена на* (a,ω);

2)′ $\lim\limits_{x\to\omega-0} g(x) = 0$.

Доказательство. В обоих случаях будем использовать критерий Коши (теорема 1.83) и формулы Бонне (теорема 1.76): если $a < b_1 < b_2 < \omega$, то существует точка $\xi \in (b_1,b_2)$, для которой

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} fg\,dx = g(b_1)\int\limits_{b_1}^{\xi} f\,dx + g(b_2)\int\limits_{\xi}^{b_2} f\,dx.$$

Рассмотрим, например, случай $\omega \in \mathbb{R}$. Если выполнены условия 1) и 2), то пусть $|g(x)| \leqslant M_g$ $(x \in (a, \omega))$ и $\delta > 0$ выбрано для $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\left| \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M_g} \quad \text{при} \quad (\omega - \delta < \beta_1 < \beta_2 < \omega).$$

Тогда при $\omega - \delta < b_1 < b_2 < \omega$

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} fg\, dx \right| \leqslant M_g \left| \int\limits_{b_1}^{\xi} f\, dx \right| + M_g \left| \int\limits_{\xi}^{b_2} f\, dx \right| < \varepsilon.$$

Аналогично рассуждаем при условиях 1)$'$, 2)$'$. $\Box$

Интегральный признак Коши сходимости рядов

В подп. 1.4.4 было введено понятие сходимости числовых рядов. Между сходимостью таких рядов и несобственных интегралов существуют тесные связи. Например, в гл. 1.9 рассматриваются утверждения, подобные теореме 1.86 для числовых рядов.

Здесь мы продемонстрируем эти связи на примере 1.87 теоремы, дающей новый признак сходимости несобственных интегралов от регулярных функций.

Теорема 1.87 (интегральный признак Коши). *Пусть функция f положительна и убывает на $[1, \infty)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится;*

2) *несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\, dx$ сходится.*

Доказательство. Необходимо просуммировать очевидные неравенства

$$\int\limits_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k) \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\, dx, \quad k = 2, \ldots, n,$$

получая при этом

$$\int\limits_{2}^{n+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int\limits_{1}^{n} f(x)\, dx,$$

и утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.84. $\Box$

Рассуждение, проведенное при доказательстве теоремы 1.87, дает возможность оценить при ее условиях скорость убывания остатков ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ в случае его сходимости:

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1.128}$$

Точно так же можно оценивать рост частных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ в случае его расходимости:

$$\int\limits_{2}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx. \tag{1.129}$$

В следующем упражнении 1.22 предлагается использовать этот способ оценивания остатков и частных сумм для получения асимптотик некоторых часто встречающихся рядов.

Упражнение 1.22. Показать, что

1) ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

расходится при $\alpha < 1$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

2) ряд $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

расходится при $\alpha < 1$ и

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} \sim \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

1.6. Функции на метрических пространствах

1.6.1. Метрические пространства

Понятие метрического пространства — одно из важнейших в математике: между его элементами можно измерять расстояние.

Расстояние

Пусть X — произвольное множество.

Определение 1.71. *Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется* ***метрикой*** *на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены следующие условия:*
1) $d(x, y) \geqslant 0,\ \ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(симметричность);*
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(неравенство треугольника).*

Число $d(x, y)$ называется **расстоянием** между x и y. Пара (X, d) называется **метрическим пространством**.

Примером метрического пространства может служить множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с расстоянием

$$d(x, y) = |x - y|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1.130}$$

Это метрическое пространство обозначается так же, как и множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Далее вводится большое число новых понятий для любого метрического пространства, которые в частном случае множества действительных чисел $\mathbb{R}$ уже вводились ранее. Полезно проследить, что в таком частном случае новые понятия совпадают со старыми.

Упражнение 1.23. Доказать, что для любых $x, y, z \in X$ справедливо неравенство

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z).$$

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $Y \subset X$ — его непустое подмножество. Тогда (Y, d) также является метрическим пространством, сужение метрики $d : X \times X \to \mathbb{R}$ на $Y \times Y$ будет метрикой на Y. Это новое метрическое пространство называется **подпространством** метрического пространства (X, d).

Открытые множества

Определение 1.72. *Если $x \in X$ и $r > 0$, то множество*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \tag{1.131}$$

*(рис. 1.35, а) называется **открытым шаром**. При этом x — центр шара, r — его радиус.*

Понятия, связанные с метрическим пространством, иллюстрируются в тексте рисунками, использующими в качестве модели плоскость $\mathbb{R}^2$ с обычным расстоянием на ней (более подробно это метрическое пространство изучается в подп. 1.6.3 как частный случай евклидовых пространств $\mathbb{R}^d$).

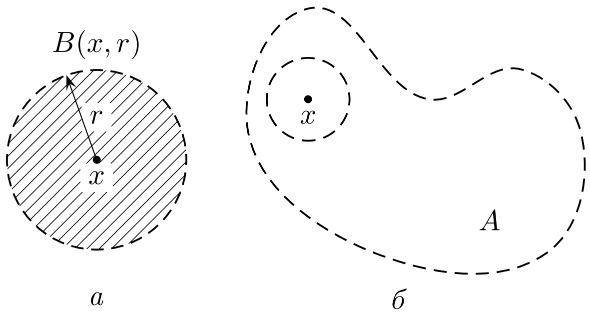

Рис. 1.35. Шар $B(x,r)$ (*а*), открытое множество (*б*)

Определение 1.73. *Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве X называется **открытым**, если для любой точки $x \in A$ существует открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в A (рис. 1.35, б).*

Теорема 1.88. *Семейство открытых множеств в метрическом пространстве обладает следующими свойствами:*

1) *множества X и $\varnothing$ открыты;*

2) *объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ любого семейства открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ открыто;*

3) *пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ любого конечного числа открытых множеств G_k, $k = 1, \ldots, n$, открыто.*

Доказательство. Свойство 1) следует непосредственно из определения.

Свойство 2) вытекает из транзитивности операции включения множеств: если $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств и $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha := G$, то $x \in G_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 \in A$. Так как G_{α_0} открыто, то найдется такое $r > 0$, что

$$B(x,r) \subset G_{\alpha_0} \subset G.$$

3) Если $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ — конечный набор открытых множеств и $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$, то для каждого $k = 1, \ldots, n$ точка $x \in G_k$ и существует такое $r_k > 0$, что $B(x,r_k) \subset G_k$. Положим $r = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} r_k > 0$. Тогда $B(x,r) \subset B(x,r_k) \subset G_k$ для каждого $k = 1, \ldots, n$ и $B(x,r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$. $\square$

Определение 1.74. ***Окрестностью*** *точки $x \in X$ в метрическом пространстве (X, d) называется любое открытое множество, содержащее точку x.*

Если $G \subset X$ — окрестность точки $x \in X$, то множество $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется ***проколотой*** *окрестностью этой точки.*

Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки. Окрестности точки $x \in X$ будем обозначать, как правило, U_x, V_x.

Определение 1.75. *Точка называется* ***внутренней*** *для множества $A \subset X$, если существует окрестность этой точки, содержащаяся в A. Множество всех внутренних точек множества A называется его* ***внутренностью*** *и обозначается $\operatorname{int} A$.*

Упражнение 1.24. Доказать следующие утверждения:

1) шар $B(x, r)$ — открытое множество;

2) множество в метрическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью;

3) внутренность $\operatorname{int} A$ — это наибольшее (по включению) открытое множество, содержащееся в A (другими словами, это означает, что $\operatorname{int} A$ является объединением всех открытых множеств, содержащихся в A).

Замкнутые множества

Определение 1.76. *Точка $x \in X$ называется* ***предельной*** *для множества $A \subset X$, если в любой проколотой окрестности этой точки есть точки из A.*

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки x есть точки из A, отличные от x. Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежность точки x множеству A.

Множество всех предельных точек для A обозначается A'.

Точка множества, которая не является предельной для него, называется **изолированной** точкой множества.

Упражнение 1.25. Доказать следующие утверждения:

1) точка $x \in X$ в метрическом пространстве является предельной для множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность различных точек $\{x_n\} \subset A$, что

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0$$

(т. е. $\{x_n\}$ сходится к x — см. определение 1.80);

2) точка $x \in X$ в метрическом пространстве является предельной для множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x бесконечно много точек из A.

Определение 1.77. *Множество называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

Теорема 1.89 (принцип двойственности). *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *множество A замкнуто;*

2) *его дополнение A^c открыто.*

Доказательство. Оба утверждения будут доказаны от противного.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть множество A замкнуто, но некоторая точка $x \in A^c$ дополнения не является внутренней для него. Тогда в любой окрестности x есть точки из A, не совпадающие с x (так как $x \in A^c$). Поэтому x — предельная точка для A и должно быть $x \in A$, хотя это не так.

2) $\Longrightarrow$ 1). Обратно, если A^c открыто, но некоторая точка x, предельная для A, не принадлежит A, то $x \in A^c$ и она должна быть внутренней для A^c. Тогда x не является предельной для A. □

Теорема 1.90 (свойства замкнутых множеств). *Пусть $A \subset X$. Тогда*

1) *X и $\varnothing$ замкнуты;*

2) *если $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любое семейство замкнутых множеств, то их пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ замкнуто;*

3) *если $\{F_k\}_{k=1}^n$ — любое конечное семейство замкнутых множеств, то их объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ замкнуто.*

Доказательство. Все утверждения вытекают непосредственно из предыдущей теоремы и правил де Моргана (см. подп. 1.1.2). □

Определение 1.78. ***Замыканием*** *множества A называется множество $\overline{A} = A \cup A'$.*

Покажем, что замыкание $\overline{A}$ является замкнутым множеством. В самом деле, если x — предельная точка для $\overline{A}$, то для любого $r > 0$ существует точка $y \in \overline{A} \cap B(x, r)$, $y \neq x$. Существует $\varepsilon > 0$, для которого $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$. Если $y \notin A$, то $y \in A'$ и в шаре $B(x, \varepsilon)$ есть точка из A. Итак, в любом шаре $B(x, r)$ есть точка из A, отличная от x. Это означает, что $x \in A'$, поэтому $x \in \overline{A}$ и $\overline{A}$ замкнуто.

Упражнение 1.26. Показать, что замыкание множества совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих его. Другими словами, замыкание множества — наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее данное множество.

Граница множества

Определение 1.79. ***Границей*** *множества A в метрическом пространстве называется множество*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}. \qquad (1.132)$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются ***граничными*** *точками для него.*

Упражнение 1.27. Доказать, что точка x является граничной для множества A тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из A^c. В частности, для любого множества A

$$\partial A \cap (\operatorname{int} A) = \varnothing. \qquad (1.133)$$

Теорема 1.91 (свойства границы). *Пусть $A \subset X$. Тогда*
1) $\partial A = \partial A^c$;
2) $A = (\partial A \cap A) \cup (\operatorname{int} A)$;
3) $\overline{A} = \partial A \cup (\operatorname{int} A)$;
4) *A замкнуто* $\iff \partial A \subset A$;
5) *A открыто* $\iff A \cap \partial A = \varnothing$.

Доказательство. 1) Это свойство очевидно, так как A и A^c входят в определение границы (1.132) равноправно.

2) Включение $(\partial A \cap A) \cup (\operatorname{int} A) \subset A$ очевидно.

Обратно, если точка $x \in A$ не является внутренней для A, то в любой ее окрестности есть точки из дополнения A^c и $x \in \overline{A^c}$. Следовательно, $x \in \partial A$ и $A \subset (\partial A \cap A) \cup (\operatorname{int} A)$.

3) Ясно, что $\partial A \subset \overline{A}$ и $\operatorname{int} A \subset \overline{A}$, поэтому $\partial A \cup (\operatorname{int} A) \subset \overline{A}$.

Для доказательства обратного включения в силу 2) достаточно доказать, что $A' \subset \partial A \cup (\operatorname{int} A)$. Пусть $x \in A'$, тогда либо $x \in \operatorname{int} A$, либо в любой окрестности этой точки есть точки из A^c и $x \in \overline{A^c}$. Следовательно, $x \in \overline{A} \cap \overline{A^c} = \partial A$.

4) Если A замкнуто, то по определению границы $\partial A \subset \overline{A} = A$. Обратное утверждение вытекает из 3): если $\partial A \subset A$, то $\overline{A} = \partial A \cup (\operatorname{int} A) \subset A$. Итак, $\overline{A} \subset A$ и A замкнуто.

5) Это утверждение следует сразу из (1.133) и 2). $\square$

Полные метрические пространства

Определение 1.80. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ точек метрического пространства X называется* ***сходящейся*** *(в X) к $a \in X$, если*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0. \qquad (1.134)$$

Кратко это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Условие (1.134) можно переписать в терминах окрестностей следующим образом:

$$\forall\, U_a \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant N \quad a_n \in U_a.$$

Определение 1.81. *Последовательность $\{a_n\} \subset X$ точек метрического пространства X называется* ***фундаментальной*** *или* ***последовательностью Коши****, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad d\,(a_n, a_m) < \varepsilon. \tag{1.135}$$

Ясно, что сходящаяся последовательность является фундаментальной (это проверяется, как в случае $\mathbb{R}$). Но обратное, вообще говоря, неверно. Например, если $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$ — интервал с обычным расстоянием, то последовательность $\{1/n\}$ фундаментальна, но не является сходящейся в X.

Определение 1.82. *Если любая фундаментальная последовательность элементов метрического пространства является сходящейся, то оно называется* ***полным***.

Критерий Коши (теорема 1.9) теперь может быть сформулирован так: метрическое пространство $\mathbb{R}$ полно.

Определение 1.83. *Если $x \in X$ и $r > 0$, то множество*

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\} \tag{1.136}$$

называется ***замкнутым шаром*** *с центром в точке x радиуса r (рис. 1.36).*

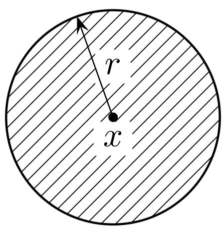

Рис. 1.36

Упражнение 1.28. Доказать, что $\overline{B}(x, r)$ — замкнутое множество.

Теорема 1.92. *Следующие условия равносильны:*
1) *X является полным пространством;*
2) *для любой последовательности замкнутых шаров*

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \ldots \supset \overline{B}_n \supset \ldots \quad (\overline{B}_n = \overline{B}\,(x_n, r_n)), \quad r_n \to 0,$$

существует единственная точка $x \in X$, принадлежащая всем шарам.

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как

$$d(x_n, x_m) < r_n \quad \text{при} \quad m > n \geqslant 1,$$

то последовательность центров $\{x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты X существует $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Так как $x_m \in \overline{B}(x_n, r_n)$ при $m \geqslant n$, а шар $\overline{B}(x_n, r_n)$ замкнут, то $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$ для каждого n.

Единственность точки x, принадлежащей всем шарам, вытекает из того, что $d(x, x') \leqslant 2r_n \to 0$, если точки x и x' принадлежат всем шарам B_n.

2) $\Longrightarrow$ 1). Если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то найдется такая последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$d(x_n, x_{n_k}) < 2^{-k} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_k.$$

Пусть $\overline{B}_k = \overline{B}\left(x_{n_k}, 2^{1-k}\right)$. Так как при $d\left(x, x_{n_{k+1}}\right) \leqslant 2^{-k}$ выполнено неравенство

$$d(x, x_{n_k}) \leqslant d\left(x, x_{n_{k+1}}\right) + d\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) \leqslant 2^{1-k},$$

то $\overline{B}_{k+1} \subset \overline{B}_k$ $(k \geqslant 1)$. В силу условия 2) существует $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$. Тогда при $n \geqslant n_k$

$$d(x, x_n) \leqslant d(x, x_{n_k}) + d(x_n, x_{n_k}) \leqslant 2^{1-k} + 2^{-k} = 3 \cdot 2^{-k}$$

и $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

Ограниченные множества

Определение 1.84. *Непустое множество в метрическом пространстве называется* ***ограниченным****, если оно содержится в некотором шаре.*

Определение 1.85. ***Диаметром*** *ограниченного непустого множества $A \subset X$ называется*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Определение 1.86. *Если $x \in X$ и $A \subset X$, то число*

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y) \tag{1.137}$$

называется ***расстоянием*** *от элемента x до множества A.*

Упражнение 1.29. Доказать следующие утверждения:
1) для любых $x \in X$ и $r > 0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{diam} B(x, r) \leqslant \operatorname{diam} \overline{B}(x, r) \leqslant 2r;$$

2) $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{A}$.

1.6.2. Непрерывные функции

Непрерывность

Пусть X и Y — метрические пространства, $D \subset X$, $a \in D'$ (предельная точка для D) и задана функция $f : D \to Y$.

Определение 1.87. *Пределом функции f в точке a называется элемент $b \in Y$, удовлетворяющий условию*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < d_X(x,a) < \delta \implies d_Y(f(x),b) < \varepsilon. \tag{1.138}$$

Кратко это записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Как и в случае $X = Y = \mathbb{R}$, легко убедиться, что предел функции определяется однозначно.

Нетрудно показать также, что условие (1.138) равносильно следующему условию, которое записывается в терминах окрестностей:

$$\forall\, V_b \quad \exists\, U_a \quad f\,(U_a^\circ \cap D) \subset V_b. \tag{1.139}$$

Определение 1.88. *Функция $f : D \to Y$ называется* ***непрерывной в точке*** *$a \in D$, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad d_X(x,a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{1.140}$$

В терминах окрестностей (1.140) можно переписать так:

$$\forall\, V_{f(a)} \quad \exists\, U_a \quad f\,(U_a \cap D) \subset V_{f(a)}. \tag{1.141}$$

Если a — предельная точка для D, то непрерывность f в точке a означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если же a — изолированная точка для D, то условие непрерывности выполнено автоматически для любой функции, заданной в этой точке.

Глобальный критерий непрерывности

Напомним (см. определение 1.53), что функция называется непрерывной на множестве (подмножестве области определения), если она непрерывна в каждой точке этого множества. Это определение можно теперь использовать для любого метрического пространства.

Если X и Y — метрические пространства, то символом $C(X,Y)$ обозначим класс всех функций $f : X \to Y$, непрерывных в каждой точке метрического пространства X. Если пространство Y ясно из контекста, то будем писать просто $C(X)$.

Условимся говорить, что множество $A \subset X$ **открыто относительно** множества $D \subset X$, если существует такое открытое множество $G \subset X$, что $A = G \cap D$.

Другими словами, это означает, что хотя множество A может не быть открытым, однако оно «вырезается» из D некоторым открытым множеством. Конечно, если D открыто, то быть открытым относительно D и просто открытым — одно и то же.

Следующая теорема дает глобальный критерий непрерывности. Интересным является то, что этот критерий не использует понятие предела.

Теорема 1.93. *Следующие условия равносильны:*

1) *функция $f : D \to Y$ непрерывна на множестве D;*

2) *для любого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V)$ открыт относительно D.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть f непрерывна на D и пусть множество $V \subset Y$ открыто, $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Для каждой точки $x \in f^{-1}(V)$ найдется окрестность U_x такая, что $f(U_x \cap D) \subset V$ или $U_x \cap D \subset f^{-1}(V)$. Таким образом,

$$\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x\right) \bigcap D \subset f^{-1}(V).$$

Так как обратное включение очевидно, то

$$\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x\right) \bigcap D = f^{-1}(V).$$

2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $x \in D$ и V_y — окрестность точки $y = f(x)$. Тогда $f^{-1}(V_y) = U_x \cap D$, U_x содержит x и $f(U_x \cap D) = V_y$. $\square$

Компактные множества

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется **открытым покрытием** множества A, если все множества G_α $(\alpha \in I)$ открыты и

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Другими словами, каждая точка из A принадлежит по крайней мере одному из множеств G_α.

Определение 1.89. *Множество в метрическом пространстве называется* ***компактным****, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.*

Упражнение 1.30. Доказать следующие утверждения:

1) сегмент $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является компактным;

2) замкнутое подмножество компакта является компактным;

3) свойство множества быть компактным — его внутреннее свойство: оно не зависит от объемлющего пространства, другими словами, если $Y \subset X$ — подпространство метрического пространства X, то $K \subset Y$ компактно в Y тогда и только тогда, когда K компактно в X;

4) свойство множества быть замкнутым таковым не является: незамкнутое подмножество $Y \subset X$ метрического пространства X замкнуто, как множество в подпространстве Y.

Теорема 1.94. *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если $K \subset X$— компактно и $x_0 \in X$ — любой фиксированный элемент, то семейство шаров $\{B(x_0, n)\}_{n=1}^{\infty}$ образует открытое покрытие K (оно покрывает даже все X). Из него можно выделить конечное подпокрытие $\{B(x_0, n_k)\}_{k=1}^{m}$. Тогда $K \subset B(x_0, n)$, где $n = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$.

Чтобы доказать замкнутость K, докажем, что его дополнение K^c открыто. Если $x \in K^c$, то

$$\forall\, y \in K \quad \exists\, r_y > 0 \quad B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \varnothing.$$

Из открытого покрытия $\{B(y, r_y)\}_{y \in K}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{B(y_k, r_{y_k})\}_{k=1}^{m}$. Тогда если $r = \min\{r_{y_1}, \ldots, r_{y_m}\} > 0$, то $B(x, r) \subset K^c$ и x — внутренняя точка для K^c. $\square$

Непрерывные образы множеств

Пусть X, Y — метрические пространства.

Теорема 1.95. *Если функция $f : X \to Y$ непрерывна на X, то для любого компакта $K \subset X$ его образ $f(K)$ компактен.*

Доказательство. Если $\{V\}$ — открытое покрытие образа $f(K)$, то по теореме 1.93 $\{f^{-1}(V)\}$ будет открытым покрытием K, из которого можно выделить конечное подпокрытие $f^{-1}(V_1), \ldots, f^{-1}(V_m)$. Тогда $V_1, \ldots, V_m$ — конечное подпокрытие $f(K)$. $\square$

Отметим, что в случае $X = Y = \mathbb{R}$ получим обобщение теорем Вейерштрасса (см. теоремы 1.31 и 1.32): непрерывный образ компакта ограничен и замкнут (по теореме 1.94), следовательно, содержит свои точные верхнюю и нижнюю границы.

Определение 1.90. *Множество A в метрическом пространстве X*

называется ***связным****, если не существует таких открытых множеств* $G_1 \subset X$ *и* $G_2 \subset X$*, что*

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Связность множества означает, что его нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в непересекающихся открытых множествах.

Теорема 1.96. *Пусть функция* $f : X \to Y$ *непрерывна на* X*. Тогда для любого связного множества* $A \subset X$ *его образ* $f(A)$ *связен.*

Доказательство. Пусть A связно, но $f(A) \subset V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 открыты, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ и $f(A) \cap V_k \neq \varnothing$ $(k = 1, 2)$. Тогда $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ открыты (по теореме 1.93), не пересекаются и

$$A \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2), \quad A \cap f^{-1}(V_k) \neq \varnothing \quad (k = 1, 2),$$

что невозможно, так как A связно. □

Отметим, что в случае $X = Y = \mathbb{R}$ получим обобщение теорем Больцано – Коши (см. теоремы 1.33 и 1.34) — связными множествами в $\mathbb{R}$ являются промежутки и только они (см. п. 4) упражнения 1.31).

Линейно связные и выпуклые множества

Определение 1.91. ***Путем*** *в метрическом пространстве* X *называется любое непрерывное отображение* $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ *отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *в* X*. Образ* $\gamma([\alpha, \beta])$ *называется* ***следом пути****,* $a = \gamma(\alpha)$ *и* $b = \gamma(\beta)$ *— соответственно* ***начало*** *и* ***конец*** *пути* γ *(рис. 1.37).*

В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

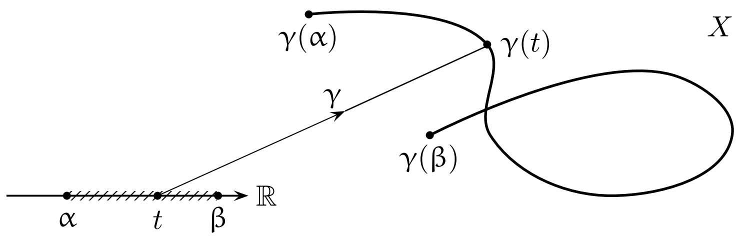

Рис. 1.37. Путь

Определение 1.92. *Множество* A *в метрическом пространстве* X *называется* ***линейно связным****, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого лежит в* A*.*

Определение 1.93. *Множество A в векторном пространстве*[2] *X называется **выпуклым**, если для любых точек $a, b \in A$ **отрезок***

$$[a, b] = \{x \in X : x = (1 - t)a + tb, \quad t \in [0, 1]\},$$

соединяющий эти точки, содержится в A.

Упражнение 1.31. Доказать следующие утверждения:
1) линейно связное множество является связным;
2) множество

$$\left\{\left(x, \sin\frac{\pi}{x}\right) : x \in (0, +\infty)\right\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$$

в $\mathbb{R}^2$ связно, но не является линейно связным (рис. 1.38);

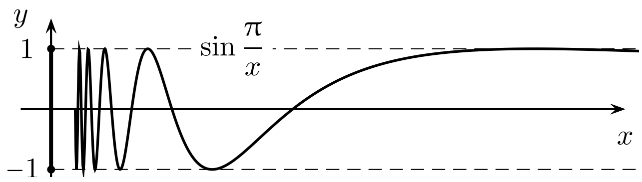

Рис. 1.38. Связное, но не линейно связное множество

3) непрерывный образ линейно связного множества линейно связен;

4) на числовой прямой $\mathbb{R}$ понятия связности и линейной связности совпадают и связными в $\mathbb{R}$ являются промежутки $\langle a, b\rangle$ и только они;

5) для открытого множества $G \subset \mathbb{R}^d$ понятия связности и линейной связности совпадают (т. е. в этом случае утверждение 1) упражнения обратимо);

6) выпуклое множество в векторном метрическом пространстве является линейно связным.

Равномерная непрерывность

Пусть X, Y — метрические пространства, $D \subset X$.

Определение 1.94. *Функция $f : D \to Y$ называется **равномерно непрерывной** на D, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x', x'' \in D \quad d_X(x', x'') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \quad (1.142)$$

Конечно, из равномерной непрерывности функции на множестве вытекает ее непрерывность на этом множестве.

Теорема 1.97 (Кантора). *Пусть $K \subset X$ — компакт и функция $f : K \to Y$ непрерывна на K. Тогда она равномерно непрерывна на K.*

[2]Понятие векторного (или линейного) пространства подробно изучается в курсе алгебры, поэтому будем свободно использовать его.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in K$ найдем $r_x > 0$ так, чтобы
$$f\left(B(x, r_x) \cap K\right) \subset B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Если обозначить
$$B_x = B\left(x, \frac{r_x}{2}\right),$$
то $\{B_x\}_{x \in K}$ — открытое покрытие компакта K и из него можно выделить конечное подпокрытие $B_{x_1}, \ldots, B_{x_m}$.

Пусть $2\delta = \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_m}\} > 0$. Тогда если $x, x' \in K$ и $d(x, x') < \delta$, то $x \in B_{x_j}$ при некотором $1 \leqslant j \leqslant m$ и $x' \in B\left(x_j, r_j\right)$, поэтому
$$d\left(f(x_j), f(x)\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d\left(f(x_j), f(x')\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$
и, следовательно, $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$. $\square$

Топологические пространства

Большая часть понятий, рассмотренных в этой главе, допускает гораздо более общую трактовку. Именно для определения всех понятий, кроме приведенных в подп. 1.6.1, 1.6.1 и 1.6.2, важно не то, что действие происходит в метрическом пространстве. Существенно лишь то, что метрика позволяет определить открытые множества и система всех открытых множеств обладает свойствами, сформулированными в теореме 1.88.

Пусть X — произвольное множество и τ — некоторое семейство его подмножеств.

Определение 1.95. *τ называется* ***топологией*** *на X, если*

1) множества X и $\varnothing$ принадлежат τ;

2) для любого семейства множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $G_\alpha \in \tau$ их объединение $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ принадлежит τ;

3) любое пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ конечного числа множеств $G_k \in \tau$ принадлежит τ.

Пара (X, τ) в таком случае называется ***топологическим пространством****.*

Определение 1.96. *Элементы топологии τ называются* ***открытыми*** *(τ-открытыми) множествами в X.*

Определение 1.97. *Если (X, τ) — топологическое пространство и $Y \subset X$, то*
$$\theta = \{G \cap Y : G \in \tau\} \quad —$$
топология на Y, которая называется ***индуцированной*** *топологией.*

*В этом случае говорят также, что (Y, θ) — **подпространство** топологического пространства (X, τ).*

Окрестностью точки $x \in X$ в топологическом пространстве называется любое открытое множество, содержащее эту точку.

Доказательства всех результатов, за исключением тех, которые приведены в подп. 1.6.1 и 1.6.1, остаются справедливыми для любых топологических пространств.

Исключение составляет лишь утверждение о единственности предела последовательности в топологическом пространстве — нельзя гарантировать его единственность.

Топологическое пространство называется **хаусдорфовым**, если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

В хаусдорфовом пространстве предел последовательности определяется однозначно.

1.6.3. Евклидово пространство

Линейное нормированное пространство

Определение 1.98. *Пусть X — векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. **Нормой** на X называется функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ со свойствами:*

1) $\|x\| \geqslant 0$ для любого $x \in X$ и $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для любых $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (однородность);

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

*Пара $(X, \|\cdot\|)$ в таком случае называется **линейным нормированным пространством**.*

Каждое линейное нормированное пространство становится метрическим пространством, если в нем ввести метрику с помощью равенства

$$d(x, y) = \|x - y\|. \tag{1.143}$$

Нетрудно убедиться, что все требования определения 1.71 выполнены (проверьте это самостоятельно).

Евклидовы пространства

Определение 1.99. *Если $d \in \mathbb{N}$, то d-**мерным евклидовым пространством** называется множество*

$$\mathbb{R}^d := \{x = (x_1, \ldots, x_d) : x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, d\} \tag{1.144}$$

всех упорядоченных наборов из d действительных чисел, являющееся векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно операций

$$x+y=(x_1+y_1,\,\ldots,x_d+y_d)\,,\quad \lambda x=(\lambda x_1,\,\ldots,\lambda x_d)\,.$$

Конечно, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$ в случае $d=1$.

Евклидово пространство является нормированным, если норму ввести следующим равенством:

$$\|x\|=\|x\|_{\mathbb{R}^d}:=\left(\sum_{k=1}^{d}|x_k|^2\right)^{1/2}. \tag{1.145}$$

Проверка условий 1)–3) из определения нормы не представляет труда: первые два свойства очевидны, а третье вытекает из неравенства Минковского (см. неравенство 1.95 при $p=2$). Ниже будет приведено другое доказательство неравенства треугольника, связанное с происхождением нормы евклидова пространства.

Норму 1.145 будем называть **евклидовой**, чтобы отличать ее от других норм. Это не единственный способ введения нормы на евклидовых пространствах. Часто полезным является использование других норм. Примером может служить

$$\|x\|^*=\max_{1\leqslant k\leqslant d}|x_k|\,. \tag{1.146}$$

Эта норма (ее обычно называют **равномерной**) связана с евклидовой двусторонними неравенствами

$$\|x\|^*\leqslant\|x\|\leqslant\sqrt{d}\,\|x\|^*\,. \tag{1.147}$$

Далее для обозначения норм в $\mathbb{R}^d$ будем применять обозначения $|x|$ вместо $\|x\|$ и $|x|^*$ вместо $\|x\|^*$. Обозначение $|t|$ продолжим использовать и для абсолютной величины числа $t\in\mathbb{R}$. Но это не должно вызывать путаницы, необходимо лишь каждый раз внимательно следить за тем, какой объект находится под знаком модуля.

Определение 1.100. *Набор векторов $\{e_i\}_{i=1}^d$, где*

$$(e_i)_k=\begin{cases}1, & \text{если}\quad i=k,\\[2ex] 0, & \text{если}\quad i\neq k,\end{cases}$$

*называется **стандартным базисом** в $\mathbb{R}^d$.*

Любой вектор $x\in\mathbb{R}^d$ однозначно представим в виде линейной комбинации элементов базиса

$$x=\sum_{k=1}^{d}x_ke_k. \tag{1.148}$$

Скалярное произведение

Определение 1.101. *Если $x, y \in \mathbb{R}^d$, то их* ***скалярным произведением*** *называется*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k. \tag{1.149}$$

Лемма 1.22. *Скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ обладает следующими свойствами:*

1) $(x, y) = (y, x)$ *(симметричность);*
2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ *(линейность);*
3) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \iff x = 0$*;*
4) $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$*;*
5) $|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$ *(неравенство Коши*[1]*);*
6) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(неравенство треугольника).*

Доказательство. Первые четыре свойства вытекают непосредственно из определения 1.101.

Для доказательства неравенства Коши рассмотрим неотрицательный квадратный трехчлен

$$0 \leqslant \|x + \lambda y\|^2 = (x + \lambda y, x + \lambda y) = \|x\|^2 + 2\lambda(x, y) + \lambda^2 \|y\|^2 .$$

Его дискриминант неположителен, т. е.

$$D = 4(x, y)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0.$$

Перенесем отрицательное слагаемое в правую часть, поделим обе части на четыре и извлечем корень, получая нужное неравенство.

Последнее утверждение вытекает из неравенства Коши:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2 \|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 . \square$$

Отметим, что некоторые из утверждений леммы 1.101 уже были доказаны выше другим способом: неравенство Коши является частным случаем $p = 2$ неравенства Гельдера из теоремы 1.64, а неравенство треугольника получается из неравенства Минковского (см. теорему 1.65) также при $p = 2$.

Некоторые подмножества

Рассмотрим наиболее важные подмножества в евклидовых пространствах. В следующем определении понятия сегмента и интервала, введенные в подп. 1.1.4, обобщаются на случай евклидовых пространств.

[1] Иногда говорят «неравенство Коши – Буняковского».

Определение 1.102. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$, тогда*

1) *если $a_k \leqslant b_k$ $(k = 1, \ldots, d)$, то множество*

$$\overline{I} = \overline{I}_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \quad k = 1, \ldots, d\right\} \tag{1.150}$$

называется d***-мерным сегментом****;*

2) *если $a_k < b_k$ $(k = 1, \ldots, d)$, то множество*

$$I = I_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_k < x_k < b_k, \quad k = 1, \ldots, d\right\} \tag{1.151}$$

называется d***-мерным интервалом****;*

3) *множество*

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x = (1-t)a + tb, \quad t \in [0, 1]\right\} \tag{1.152}$$

называется ***отрезком*** *в $\mathbb{R}^d$, соединяющим точки a и b.*

Обратим внимание на то, что в случае $d = 1$ понятия отрезка и сегмента совпадают. Если же $d \geqslant 2$, то это различные понятия.

Множества из определения 1.102 в двумерном случае можно увидеть на рис. 1.39.

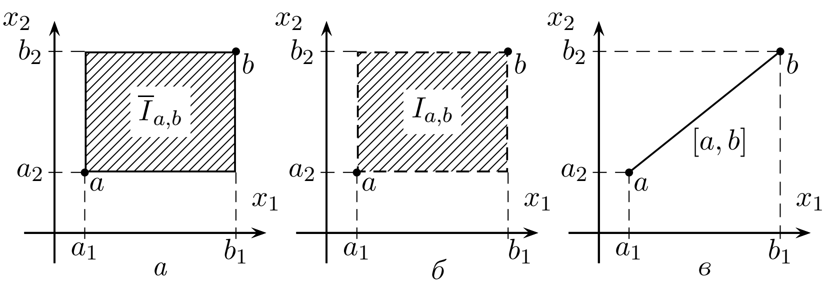

Рис. 1.39. Сегмент (*а*), интервал (*б*), отрезок (*в*)

Открытым кубом в $\mathbb{R}^d$ будем называть любой интервал (1.151), у которого все ребра имеют одинаковую длину, т. е.

$$b_k - a_k = l, \quad k = 1, \ldots, d, \tag{1.153}$$

для некоторого $l \geqslant 0$. Аналогично **замкнутый куб** — сегмент (1.150), удовлетворяющий условию (1.153).

Упражнение 1.32. Доказать следующие утверждения:

1) сегмент $\overline{I}$ замкнут и ограничен, интервал I открыт и ограничен;

2) $\operatorname{diam} \overline{I}_{a,b} = \operatorname{diam} I_{a,b} = |b - a|$;

3) замыкание интервала $I_{a,b}$ — сегмент $\overline{I}_{a,b}$, внутренность сегмента $\overline{I}_{a,b}$ совпадает с интервалом $I_{a,b}$;

4) отрезок $[a, b]$ замкнут и ограничен;

5) определение ограниченного множества не изменится, если в нем шар заменить на сегмент или интервал;

6) любая последовательность вложенных сегментов $\overline{I}_1 \supset \ldots \supset \overline{I}_n \supset \ldots$ имеет непустое пересечение.

Последовательности и функции

Так как $\mathbb{R}^d$ является нормированным и, следовательно, метрическим пространством, то для него определены следующие понятия:

1) сходимость последовательности (см. определение 1.80);

2) предел (см. определение 1.88) и непрерывность (см. определение 1.87) для функций, действующих из одного такого пространства в другое.

Рассмотрим некоторые специальные свойства $\mathbb{R}^d$.

Обратим внимание на то, что последовательности элементов $\mathbb{R}^d$ будут нумероваться верхним индексом (без скобок), а нижний индекс зарезервирован за номерами координат, которые всегда будут обозначаться буквой k, как выше.

Лемма 1.23. *Пусть $\{x^n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Следующие условия равносильны:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n = x_k$ для всех $k = 1, \ldots, d$.

$\mathbb{R}^d$ является полным пространством.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) сразу следует из неравенств (1.147). Полнота $\mathbb{R}^d$ вытекает из критерия Коши в $\mathbb{R}$ и из неравенств (1.147): из фундаментальности $\{x_n\}$ следует фундаментальность каждой координаты $\{x_k^n\}$, которые по теореме 1.9 сходятся. $\square$

Свойство 2) этой леммы называется **координатной сходимостью**, которая, таким образом, равносильна сходимости по норме.

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant k \leqslant d$. Определим функцию

$$\pi_k(x) = x_k, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.154}$$

которая называется k-й **проекцией** (проекцией на k-ю координату).

Упражнение 1.33. Доказать следующие утверждения:

1) пусть $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$ и a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, $b \in \mathbb{R}^{d_1}$, тогда следующие условия равносильны:

а) $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

б) для любой последовательности точек $\{x^n\} \subset D$, $x^n \to a$, $x^n \neq a$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) = b;$$

в) $b_k = \lim\limits_{x\to a} (\pi_k \circ f)(x)$ для всех $k = 1, \ldots, d_1$;

2) функция $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ не имеет предела в точке $(0,0)$;

3) пусть $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, $f, g : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, a — предельная точка множества $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, $u = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $v = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, тогда

$$\lim_{x\to a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha u + \beta v, \quad \lim_{x\to a} (f(x), g(x)) = (u, v);$$

если $d_1 = 1$ и $v \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{u}{v};$$

4) сформулировать и доказать аналоги двух последних упражнений для непрерывности;

5) пусть $d_0, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, функция $f : D_f \to \mathbb{R}^{d_1}$ непрерывна в точке $a \in D_f \subset \mathbb{R}^{d_0}$, функция $g : D_g \to \mathbb{R}^{d_2}$ непрерывна в точке $b = f(a)$, $f(D_f) \subset D_g$, тогда композиция $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}^{d_2}$ непрерывна в точке $a \in D_f$ (другими словами, композиция непрерывных функций непрерывна);

6) функции

$$\pi_k, \quad f(x) = (x_k)^\alpha \quad (\alpha > 0,\ k = 1, \ldots, d), \quad f(x) = |x|,$$

$$P(x) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{\nu_d=0}^{n_d} c_{\nu_1,\ldots,\nu_d} (x_1)^{\nu_1} \ldots (x_d)^{\nu_d}, \quad c_{\nu_1,\ldots,\nu_d} \in \mathbb{R},$$

непрерывны на $\mathbb{R}^d$.

Теорема Бореля – Лебега

По теореме 1.94 любое компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено. В случае евклидовых пространств справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1.98 (Бореля – Лебега). *Множество $K \subset \mathbb{R}^d$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Замкнутость и ограниченность компакта в случае любого метрического пространства была доказана в теореме 1.94.

Обратно пусть K замкнуто и ограничено. В силу п. 2) упражнения 1.30 и п. 1) упражнения 1.32 достаточно доказать, что сегмент компактен.

Предположим противное, т. е. из некоторого открытого покрытия S сегмента $\overline{I}$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Производя деление его ребер пополам, разобьем $\overline{I}$ на 2^d сегментов с непересекающимися внутренностями. Один из этих сегментов (обозначим его $\overline{I}_1$) тоже не покрывается конечным числом множеств из S. С сегментом $\overline{I}_1$ поступим точно так же (рис. 1.40).

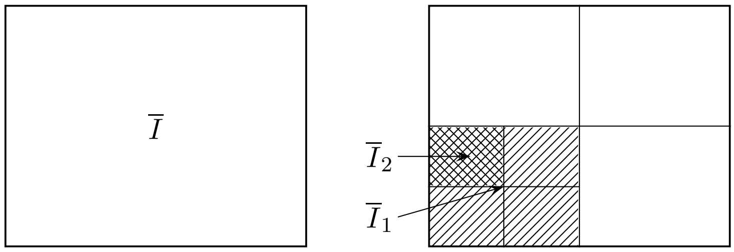

Рис. 1.40

Продолжая процесс по индукции, построим последовательность вложенных сегментов $\overline{I}_1 \supset \ldots \supset \overline{I}_n \supset \ldots$, каждый из которых не покрывается конечным числом множеств из S. В силу п. 6) упражнения 1.32 существует точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I}_n$. Эта точка принадлежит одному из множеств $G \in S$ и является для него внутренней. Поэтому существует шар $B(x, r) \subset G$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} \overline{I}_n = 0$ и $x \in G$, то $\overline{I}_n \subset G$ для достаточно больших n. Таким образом, $\overline{I}_n$ покрывается одним из множеств $G \in S$. Противоречие. $\square$

Следующее упражнение показывает, что лемма 1.9 Больцано – Вейерштрасса остается справедливой для любого евклидова пространства $\mathbb{R}^d$

Упражнение 1.34. Доказать, что любое бесконечное ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ имеет предельную точку.

1.7. Дифференциальное исчисление на $\mathbb{R}^d$

1.7.1. Производная и частные производные

Сведения из линейной алгебры

Пусть X и Y — векторные пространства[1] над полем $\mathbb{R}$.

Определение 1.103. *Отображение $A : X \to Y$ называется* ***линейным****, если*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \tag{1.155}$$

для любых $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

В дальнейшем для линейных отображений образ элемента x при отображении A будем записывать как Ax вместо $A(x)$.

Линейные отображения $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ будем называть **линейными формами** на $\mathbb{R}^d$ и множество всех таких линейных форм обозначать $L(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 1.24. 1) *$L(\mathbb{R}^d)$ является векторным пространством относительно естественных операций над отображениями*

$$(A + B)x := Ax + Bx, \quad (\alpha A)x := \alpha Ax;$$

2) *проекции $\{\pi_i\}_{i=1}^d$ из (1.154) образуют базис в $L(\mathbb{R}^d)$, связанный со стандартным базисом в $\mathbb{R}^d$ равенствами*

$$\pi_i(e_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = k, \\ 0, & \text{если } \ i \neq k, \end{cases}$$

и любая линейная форма $A \in L(\mathbb{R}^d)$ однозначно представима в виде

$$A = \sum_{k=1}^{d} a_k \pi_k,$$

где a_k — некоторые числа, $k = 1, \ldots, d$;

3) *для любого $A \in L(\mathbb{R}^d)$ существует такая постоянная $c > 0$, что*

$$|Ax - Ay| \leqslant c\,|x - y|\,.$$

Доказательство. 1) Это утверждение очевидно.

2) Если $x \in \mathbb{R}^d$, то $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$ (см. (1.148)), поэтому

$$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{d} x_k A e_k = \sum_{k=1}^{d} A e_k \pi_k(x),$$

[1] Определение векторного (или линейного) пространства дается в курсе алгебры

следовательно, $A = \sum_{k=1}^{d} Ae_k \pi_k$.

3) Так как $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$, то в силу неравенства Гельдера (1.93)

$$|Ax| = \left| A\left(\sum_{k=1}^{d} x_k e_k\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{d} x_k Ae_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} |Ae_k|^2\right)^{1/2} \cdot |x| = c\,|x|\,.$$

Поэтому в силу линейности A

$$|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leqslant c\,|x-y|\,. \quad \square$$

Определение 1.104. *Если $A \in L(\mathbb{R}^d)$ и $c \in \mathbb{R}$, то множество*

$$H = H_{A,c} := \left\{x \in \mathbb{R}^d : Ax = c\right\}$$

*называется **гиперплоскостью** в $\mathbb{R}^d$. Если $c = 0$, то гиперплоскость называется **однородной**.*

Ясно, что однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$ является $(d-1)$-мерным алгебраическим подпространством. Обратное также верно: каждое $(d-1)$-мерное подпространство в $\mathbb{R}^d$ является однородной гиперплоскостью.

Дифференцируемость и касательная гиперплоскость

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 1.105. *Функция f **дифференцируема** в точке a, если существует такое $A \in L(\mathbb{R}^d)$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{1.156}$$

*Отображение A называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Таким образом, производная функции многих переменных является линейным отображением, в отличие от одномерного случая, когда она была числом. Кажущееся различие объясняется так: в случае $d = 1$ можно отождествить линейные формы $A \in L(\mathbb{R}^1)$ с числами с помощью взаимно однозначного отображения $A \leftrightarrow A(1)$.

Пусть $\varphi(x) = f(a) + A(x-a)$, тогда условие (1.156) равносильно следующему соотношению:

$$f(x) = \varphi(x) + o(|x-a|), \quad x \to a.$$

Лемма 1.25. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D$. Тогда*

1) *производная $f'(a)$ определяется однозначно;*

2) *функция f непрерывна в точке a.*

Доказательство. 1) Если $A_1, A_2 \in L(\mathbb{R}^d)$ таковы, что

$$f(a+h) - f(a) = A_1 h + o(|h|) = A_2 h + o(|h|), \quad h \to 0,$$

то $A_1 h - A_2 h = o(|h|)$ при $h \to 0$. Положим $h = tx$, где $x \in \mathbb{R}^d$. Тогда при любом $x \neq 0$

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{|A_1(tx) - A_2(tx)|}{|tx|} = \frac{|A_1(x) - A_2(x)|}{|x|}.$$

Откуда $A_1(x) - A_2(x) = 0$ для всех $x \neq 0$. Кроме того, $A_1(0) = A_2(0) = 0$.

2) Это утверждение вытекает непосредственно из определения дифференцируемости (1.156) и п. 3) леммы 1.24. □

Упражнение 1.35. Определить множества точек дифференцируемости следующих функций и найти производные:

1) $f(x) = Ax + c$, где $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in L(\mathbb{R}^d)$, $c \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^d$;
3) $f(x) = |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Понятию дифференцируемости можно дать геометрическую интерпретацию. Пусть Γ_f — график функции. Рассмотрим гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$:

$$T = T_{f,a} := \left\{(x_1, \ldots, x_d, z) \in \mathbb{R}^{d+1} : z = \varphi(x)\right\}, \tag{1.157}$$

проходящую через точку $w_0 = (a, f(a)) \in \Gamma_f$. Тогда

$$\operatorname{dist}(w, \Gamma_f) = \inf_{v \in \Gamma_f} |w - v| \leqslant |f(x) - \varphi(x)| = o(|x-a|),$$

где $w = (x, \varphi(x))$ (рис. 1.41).

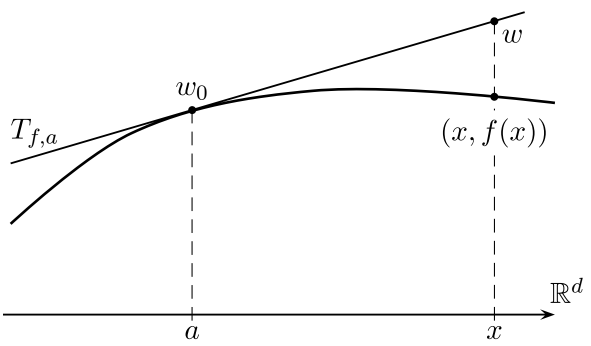

Рис. 1.41. Касательная гиперплоскость $T_{f,a}$

Это служит основанием для того, чтобы назвать $T_{f,a}$ **касательной гиперплоскостью** к графику функции Γ_f в точке $(a, f(a)) \in \Gamma_f$. Ее явное уравнение таково:

$$z = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Лемма 1.26. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $[a,b] \subset \operatorname{int} D$ и функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $[a,b]$. Тогда функция одной переменной*

$$\varphi(t) := f\left(a + t(b-a)\right), \quad t \in [0,1],$$

дифференцируема на $[0,1]$ и

$$\varphi'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a).$$

Доказательство. Если обозначить $x = a + t(b-a)$, то при $t \in (0,1)$ и $\varepsilon \to 0$

$$\varphi(t+\varepsilon) - \varphi(t) = f\left(x + \varepsilon(b-a)\right) - f(x) =$$
$$= f'(x)\left(\varepsilon(b-a)\right) + o(|\varepsilon(b-a)|) = \varepsilon\left[f'(x)\,(b-a) + o(1)\right].$$

Отсюда следует дифференцируемость φ и равенство для ее производной. □

Теорема 1.99 (формула Лагранжа). *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $[a,b] \subset \operatorname{int} D$ и функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $[a,b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{1.158}$$

Доказательство. К функции φ из леммы 1.26 надо применить формулу конечных приращений (теорема 1.48). □

Частные производные

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 1.106. *Если $1 \leqslant k \leqslant d$, то предел (рис. 1.42)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} \tag{1.159}$$

называется ***частной производной*** *функции f по k-й координате.*

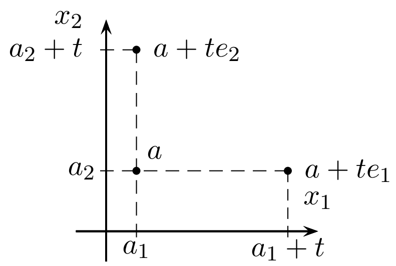

Рис. 1.42

Для частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ могут еще использоваться обозначения $D_k f(a)$ или $f'_{x_k}(a)$.

Проще говоря, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ — производная функции f по k-й переменной x_k в точке a_k при фиксированных значениях $x_i = a_i$, $i \neq k$ (понимаемая как обычная производная функции одной переменной). Это замечание используется на практике: при вычислении частной производной по x_k переменной является только x_k, а все остальные переменные $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d$ считаются постоянными параметрами.

Геометрически частная производная по k-й переменной — угловой коэффициент касательной к сечению графика функции гиперплоскостью $x_i = a_i$ $(k \neq i = 1, \ldots, d)$.

Лемма 1.27. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$. Тогда*

1) *если функция f дифференцируема в точке a, то она имеет все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, d$, и*

$$f'(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\pi_k; \tag{1.160}$$

2) *если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, d$, существуют в некоторой окрестности точки a и непрерывны в a, то функция f дифференцируема в a.*

Доказательство. 1) Для каждого $k = 1, \ldots, d$ положим $h = te_k$ в (1.156):

$$f(a + te_k) - f(a) = tf'(a)e_k + o(t), \quad t \to 0,$$

откуда

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = f'(a)e_k.$$

Представление (1.160) получается теперь так же, как и в доказательстве п. 2) леммы 1.24.

2) Обозначим для $k = 1, \ldots, d$ (рис. 1.43):

$$a^k = a + \sum_{i=1}^{k} h_i e_i, \quad g_k(t) = f(a^{k-1} + te_k).$$

Тогда $g_k'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a^{k-1} + te_k)$ и по теореме 1.48 (формула Лагранжа) для некоторых точек $\xi^k \in [a^{k-1}, a^k]$ справедливы равенства

$$f(a^k) - f(a^{k-1}) = g_k(h_k) - g_k(0) = g_k'(\tau_k)h_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi^k)h_k.$$

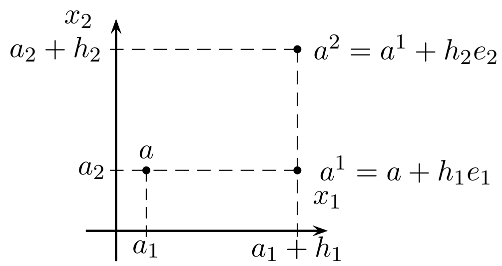

Рис. 1.43

Следовательно,

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^{d}\left[f(a^k)-f(a^{k-1})\right]=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi^k)h_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k+\sum_{k=1}^{d}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi^k)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right]h_k.$$

Второе слагаемое справа есть $o(|h|)$ в силу неравенства Коши (1.22) и непрерывности частных производных. □

Примеры из следующего упражнения показывают, что утверждение 2) леммы 1.27 без требования непрерывности частных производных неверно.

Упражнение 1.36. Исследовать на дифференцируемость в точке следующие функции и найти их частные производные в этой точке:

1) $f(x,y)=1$ при $xy=0$ и $f(x,y)=0$ при $xy\neq 0$;

2) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$.

Определение 1.107. *Пусть $G\subset\mathbb{R}^d$ — открытое множество. Будем обозначать $C^1(G)$ класс функций, все частные производные которых непрерывны на множестве G.*

Из утверждения 2) леммы 1.27 вытекает, что функции класса $C^1(G)$ дифференцируемы на G и непрерывны на G в силу 2) леммы 1.25.

Производные по направлению и градиент

Пусть $D\subset\mathbb{R}^d$, $a\in\operatorname{int}D$ и задана функция $f:D\to\mathbb{R}$.

Определение 1.108. *Пусть задан $v\in\mathbb{R}^d$, $|v|=1$ единичный вектор (рис. 1.44). **Производной по направлению** v функции f в точке a называется*

$$D_vf(a)=\frac{\partial f}{\partial v}(a):=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}. \tag{1.161}$$

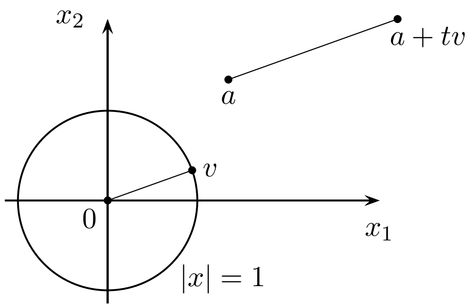

Рис. 1.44

Упражнение 1.37. Доказать следующие утверждения:

1) $D_{e_k} f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \ldots, d$;

2) если функция f дифференцируема в точке a, то она имеет в этой точке производную по любому направлению v и

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)v = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) v_k. \tag{1.162}$$

Определение 1.109. *Если функция f имеет в точке a все частные производные, то вектор*

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right) \tag{1.163}$$

называется ***градиентом*** *этой функции в точке a.*

Таким образом, равенство (1.162) можно переписать в терминах градиента

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (\nabla f(a), v)\,. \tag{1.164}$$

Следующая лемма раскрывает геометрический смысл градиента.

Лемма 1.28. *Пусть функция f имеет в точке a производную по любому направлению и $v_0 = \nabla f(a) \, |\nabla f(a)|^{-1}$. Тогда*

$$D_{v_0} f(a) = \sup_{|v|=1} D_v f(a) = |\nabla f(a)|\,. \tag{1.165}$$

Доказательство. В силу неравенства Коши (лемма 1.22)

$$D_v f(a) \leqslant |\nabla f(a)| \, |v| = |\nabla f(a)|\,.$$

Кроме того,

$$D_{v_0} f(a) = \left(\nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|} \right) = |\nabla f(a)|\,. \quad \square$$

Таким образом, направление градиента — направление наибольшего возрастания функции.

1.7.2. Формула Тейлора

Производные высших порядков

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \operatorname{int} D$ и задана функция $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 1.110. *Пусть задан набор $\{i_l\}_{l=1}^n$, $1 \leqslant i_l \leqslant d$.* ***Частная производная*** *функции f в точке a порядка n по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ определяется индуктивно:*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right)(a), \tag{1.166}$$

при этом предполагается, что все предыдущие производные $\dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}}(x)$, $j = 1, \ldots, n-1$, существуют в некоторой окрестности точки a.

Пример из следующего упражнения показывает, что частная производная зависит, вообще говоря, от порядка, в котором выполняется дифференцирование, т. е. от порядка индексов в наборе $\{i_j\}_{j=1}^n$.

Упражнение 1.38. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\[2ex] 0 & \text{при} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

в точке $(0, 0)$ имеет частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, но

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

При дополнительных предположениях все же можно утверждать, что частная производная не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 1.100 (Шварца). *Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant d$ и для функции $f : D \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки $a \in \operatorname{int} D$ существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, причем две последние непрерывны в точке a. Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть случай функции двух переменных. При $h \neq 0$ обозначим выражение

$$\Delta(h) = [f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2)] - [f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)]$$

и

$$\Delta_1(x_1) = f(x_1, a_2 + h) - f(x_1, a_2).$$

Дважды применяя одномерную формулу Лагранжа (теорема 1.48), получим

$$\Delta(h) = \Delta_1(a_1 + h) - \Delta_1(a_1) = \Delta_1'(a_1 + \theta_1 h)h =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2)\right] h = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + \theta_2 h)h^2$$

при некоторых $0 < \theta_1 < 1$ и $0 < \theta_2 < 1$.

С другой стороны, если

$$\Delta_2(x_2) = f(a_1 + h, x_2) - f(a_1, x_2),$$

то $\Delta(h) = \Delta_2(a_2 + h) - \Delta_2(a_2)$. Поэтому, рассуждая аналогично, получим

$$\Delta(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_3 h, a_2 + \theta_4 h)h^2$$

при некоторых $0 < \theta_3 < 1$ и $0 < \theta_4 < 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + \theta_2 h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_3 h, a_2 + \theta_4 h).$$

Отсюда при $h \to 0$ из непрерывности производных $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ получим требуемое. $\square$

Определение 1.111. *Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество. Класс $C^r(G)$ состоит из функций $f : G \to \mathbb{R}$, все частные производные которых порядка, не превосходящего r, существуют и непрерывны на G.*

При $r = 1$ это определение совпадает с определением 1.107.

В силу теоремы 1.100 для функции $f \in C^r(G)$ значение любой ее частной производной (порядка, не превосходящего r) не зависит от последовательности, в которой выполняются дифференцирования.

Мультииндексы

Введем обозначение $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. **Мультииндексом** будем называть любой вектор $\nu \in \mathbb{R}^d$, для которого $\nu_k \in \mathbb{N}_0$ $(k = 1, \ldots, d)$. Другими словами, мультииндекс — вектор с неотрицательными целочисленными координатами.

Длиной мультииндекса ν называется

$$|\nu| := \sum_{k=1}^{d} \nu_k. \tag{1.167}$$

Если $\nu \in \mathbb{N}_0^d$ — мультииндекс и $h \in \mathbb{R}^d$, то положим

$$h^\nu := \prod_{k=1}^{d} (h_k)^{\nu_k}, \quad \nu! := \prod_{k=1}^{d} \nu_k!. \tag{1.168}$$

Подобным образом определяются **дифференциальные мономы**

$$\mathbf{D}^\nu := \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\nu_k}. \tag{1.169}$$

Это обозначение используется для частных производных функций класса $C^r(G)$ — для них не важен порядок, в котором производится дифференцирование. Важно знать лишь то, сколько дифференцирований производилось по каждой переменной — на это указывают координаты мультииндекса.

Далее введем формальные дифференциальные операторы:

$$\mathbf{D}_h^r f(a) := \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k} h_k\right)^r f(a) = \sum_{k_1=1}^{d} \ldots \sum_{k_r=1}^{d} \frac{\partial^r f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_r}}(a) h_{k_1} \ldots h_{k_r}. \tag{1.170}$$

В случаях $r = 0, 1, 2$ они выглядят так:

$$\mathbf{D}_h^0 f(a) = f(a), \quad \mathbf{D}_h^1 f(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k,$$

$$\mathbf{D}_h^2 f(a) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

В предположении $f \in C^r(G)$ частные производные не зависят от порядка, в котором выполняется дифференцирование. Поэтому, группируя одинаковые слагаемые в сумме (1.170) и используя мультииндексные обозначения, его можно записать в виде

$$\mathbf{D}_h^r f(a) = \sum_{|\nu|=r} \frac{r!}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a) h^\nu. \tag{1.171}$$

Формула Тейлора

Обозначения, которые были введены в подп. 1.7.2, позволяют компактно записывать многомерный полином Тейлора:

$$T_n(x,a;f) := \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=1}^{d} (x_k - a_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^r f(a) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \mathbf{D}_{x-a}^r f(a) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{|\nu|=r} \frac{1}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a)(x-a)^\nu = \sum_{|\nu|\leqslant n} \frac{1}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a)(x-a)^\nu. \tag{1.172}$$

Формулой Тейлора будем называть равенство

$$f(x) = T_n(x,a;f) + R_n(x,a;f). \tag{1.173}$$

Величина $R_n(x,a;f)$, определяемая этим равенством, называется **остатком** формулы Тейлора.

Теорема 1.101 (формы остатков Тейлора). 1) *Если* $f \in C^n(U_a)$, *то*

$$R_n(x,a;f) = o\left(|x-a|^n\right), \quad x \to a \quad \text{— форма Пеано}.$$

.

2) *Если* $f \in C^{n+1}(U_a)$, *то для любого* $x \in U_a$, $[a,x] \subset U_a$, *существует* $\xi \in [a,x]$ *со свойством*

$$R_n(x,a;f) = \frac{1}{(n+1)!} \mathbf{D}_{x-a}^{n+1} f(\xi) \quad \text{— форма Лагранжа}.$$

.

3) *Если* $f \in C^{n+1}(U_a)$, *то для любого* $x \in U_a$, $[a,x] \subset U_a$,

$$R_n(x,a;f) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \mathbf{D}_{x-a}^{n+1} f(a + t(x-a))\, dt \quad \text{— интегральная форма}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i} R_n(x,a;f) = R_{n-1}\left(x,a;\frac{\partial f}{\partial x_i}\right). \tag{1.174}$$

В самом деле, в силу (1.172)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_n(x,a;f) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{|\nu|=r} \frac{1}{\nu!} \mathbf{D}^\nu f(a) \frac{\partial}{\partial x_i} (x-a)^\nu =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{|\nu|=r} \frac{\nu_i}{\nu!} \mathbf{D}^{\nu} f(a)(x_i - a_i)^{\nu_i - 1} \prod_{k=1, k\neq i}^{d} (x_k - a_k)^{\nu_k}.$$

Выполним здесь замену мультииндекса $\mu = \nu - e_i$, тогда $|\mu| = |\nu| - 1$ и

$$\mathbf{D}^{\nu} f(a) = \mathbf{D}^{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Поэтому справедливо равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_n(x, a; f) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|\mu|=r} \frac{1}{\mu!} \mathbf{D}^{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)(x - a)^{\mu}$$

или (что доказывает (1.174))

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_n(x, a; f) = T_{n-1} \left(x, a; \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Доказательство 1) проведем индукцией по n. База индукции (случай $n = 1$) вытекает из определения дифференцируемости (1.105) и леммы 1.27.

Далее предположим, что утверждение доказано для $(n - 1)$, и докажем его для n. Рассмотрим функцию одной переменной:

$$\varphi(t) = R_n(a + t(x - a), a; f).$$

Тогда по лемме 1.26, примененной к этой функции, с помощью (1.174) получим

$$R_n(x, a; f) = R_n(x, a; f) - R_n(a, a; f) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_k} R_n(a + t(x - a), a; f)(x_k - a_k)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{d} R_{n-1} \left(a + t(x - a), a; \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x_k - a_k)\, dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} R_{n-1} \left(a + \theta(x - a), a; \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x_k - a_k)$$

при некотором $\theta \in [0, 1]$ по первой теореме о среднем (теорема 1.75). Последнее выражение есть $o(|x - a|^n)$ в силу предположения индукции.

Для доказательства 2) и 3) надо применять одномерную формулу Тейлора с соответствующим видом остатка (см. равенства (1.79) и (1.119)) к функции

$$\varphi(t) = f\left(a + t(x - a)\right), \quad t \in [0, 1],$$

и использовать леммы 1.26 и 1.27, из которых вытекает, что при всех $r = 1, \ldots, n$
$$\varphi^{(r)}(t) = \mathbf{D}^r_{x-a} f(a + t(x-a)). \quad \square$$

1.7.3. Локальные экстремумы

Квадратичные формы

При исследовании функции на экстремум будут использоваться квадратичные формы. Напомним некоторые сведения о них из высшей алгебры.

Если $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$ — квадратная матрица, где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то функция

$$Q : h \mapsto \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^d, \tag{1.175}$$

называется **квадратичной формой** на $\mathbb{R}^d$, тогда $\{a_{ij}\}$ называется ее матрицей. Главные миноры матрицы — это определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $Q(h) > 0$ для всех $h \neq 0$. Квадратичная форма называется отрицательно определенной, если $Q(h) < 0$ для всех $h \neq 0$. Объединяющий термин — **знакоопределенная форма**.

Критерий знакоопределенности дает следующая теорема, доказательство которой имеется в курсах алгебры, поэтому здесь не приводится.

Теорема 1.102 (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$.*

Квадратичная форма Q является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$.

Лемма 1.29. *Если квадратичная форма Q является положительно определенной, то существует такое $\alpha > 0$, что для всех $h \in \mathbb{R}^d$ выполнено неравенство*
$$Q(h) \geqslant \alpha\, |h|^2 .$$

Доказательство. Единичная сфера в $\mathbb{R}^d$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\right\}$$

является замкнутым и ограниченным множеством (проверьте это). В силу теоремы 1.98 оно является компактным. Так как $Q \in C(S)$, то $Q(S)$ — компакт, и по теореме 1.95 Q достигает своей точной нижней грани на S в некоторой точке $h_0 \in S$:

$$\inf Q(S) = Q(h_0) = \alpha > 0.$$

Если $h \neq 0$, то $h\,|h|^{-1} \in S$ и

$$|h|^{-2}\, Q(h) = Q\left(\frac{h}{|h|}\right) \geqslant \alpha > 0. \quad \square$$

Экстремумы

Определение экстремумов фактически совпадает с определением 1.58 в одномерном случае. Отличие состоит лишь в том, что рассматриваемые окрестности — подмножества из $\mathbb{R}^d$.

Определение 1.112. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^d$. Тогда a называется точкой*

***локального максимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \leqslant f(a)$;*

***локального минимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a \quad f(x) \geqslant f(a)$;*

***строгого локального максимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) < f(a)$;*

***строгого локального минимума**, если $\exists\, U_a \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad f(x) > f(a)$.*

Общее название для всех видов максимума и минимума — **экстремумы**.

Следующая лемма дает необходимые условия экстремума и аналогична лемме Ферма (см. лемму 1.16).

Лемма 1.30. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ и $a \in \operatorname{int} D$ — точка локального экстремума. Тогда*

1) *если f имеет производную $D_v f(a)$ по некоторому направлению v, $|v| = 1$, то $D_v f(a) = 0$;*

2) *если f дифференцируема в точке a, то $\nabla f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$.*

Доказательство. 1) Функция одной переменной $\varphi(t) = f(a + tv)$, $|t| < \delta$, имеет в точке $t = 0$ локальный экстремум. По лемме 1.16

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = 0.$$

2) Это вытекает из утверждения 1) и леммы 1.27, так как сейчас $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $k = 1, \ldots, d$. $\square$

Эта лемма дает необходимые условия экстремума. Как и в случае функций одной переменной, если $f'(a) = 0$, то точка a называется **стационарной** точкой для функции.

Упражнение 1.39. На примере $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точке $(0, 0)$ убедитесь, что стационарная точка не обязана быть точкой экстремума.

Для получения достаточных условий рассмотрим квадратичную форму:

$$Q_{f,a}(h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^d. \tag{1.176}$$

Теорема 1.103 (достаточное условие экстремума). *Пусть a — стационарная точка функции $f \in C^2(U_a)$. Тогда*

1) *если форма $Q_{f,a}$ отрицательно определена, то a — точка строгого максимума;*

2) *если форма $Q_{f,a}$ положительно определена, то a — точка строгого минимума;*

3) *если $Q_{f,a}$ не является знакоопределенной, то a — не точка экстремума.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (см. теорему 1.101) и, учитывая, что a — стационарная точка, получим

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + R_2(a+h, a; f) =$$

$$= Q_{f,a}(h) + o\left(|h|^2\right) = |h|^2 \left[\frac{Q_{f,a}(h)}{|h|^2} + o(1) \right].$$

Теперь утверждения 1) и 2) вытекают непосредственно из леммы 1.29.

3) Если $Q_{f,a}(h_1) > 0$ и $Q_{f,a}(h_2) < 0$, то при $t > 0$ из предыдущего равенства следует, что

$$f(a + th_i) - f(a) = t^2 \left[Q_{f,a}(h_i) + o(1) \right], \quad i = 1, 2,$$

и в любой окрестности точки a разность $f(x) - f(a)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. □

1.8. Векторные функции

1.8.1. Дифференцируемые отображения

Сведения из линейной алгебры

Приведем необходимую информацию из курса линейной алгебры, относящуюся к линейным отображениям из одного евклидова пространства в другое (общее понятие линейного отображения двух векторных пространств см. в определении 1.103).

Если $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, то класс всех линейных отображений из $\mathbb{R}^{d_0}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$ будем обозначать $L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$.

Пусть $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ и $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, тогда, раскладывая x по стандартному базису в $\mathbb{R}^{d_0}$, получим

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{d_0} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{d_0} Ae_j x_j.$$

Обозначим

$$a_{ij} = (Ae_j)_i\,, \quad i = 1, \ldots, d_1,\ j = 1, \ldots, d_0. \tag{1.177}$$

Тогда

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, d_1. \tag{1.178}$$

Таким образом, с отображением $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ и точкой $x \in \mathbb{R}^{d_0}$ можно связать матрицу (1.177), которую назовем **матрицей отображения**. Действие отображения A на вектор x выражается в умножении его матрицы справа на транспонированный вектор (также рассматриваемый как матрица).

Обратно, если задана матрица a_{ij} размеров $d_1 \times d_0$, то она порождает по формулам (1.178) линейное отображение $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$.

Следовательно, можно отождествить отображения $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ с их матрицами размеров $d_1 \times d_0$. Если $d_0 = d_1 = d$, то определитель матрицы отображения $A \in L\left(\mathbb{R}^{d}, \mathbb{R}^{d}\right)$ будем обозначать $\det A$.

Норма линейного отображения

Определение 1.113. ***Нормой*** *отображения* $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ *называется число*

$$\|A\| = \sup\left\{|Ax| : |x| \leqslant 1, x \in \mathbb{R}^{d_0}\right\}. \tag{1.179}$$

Норма линейного отображения характеризует его размеры. Образ единичного шара из $\mathbb{R}^{d_0}$ при отображении A содержится в шаре радиуса $\|A\|$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^{d_1}$, причем это наименьший шар с таким свойством.

Лемма 1.31. *Если* $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$, *то*

1) $\|A\| < \infty$;

2) $|Ax| \leqslant \|A\| \cdot |x|$ *при* $x \in \mathbb{R}^{d_0}$;

3) $|Ax - Ay| \leqslant \|A\| \cdot |x - y|$ *при* $x, y \in \mathbb{R}^{d_0}$, *в частности,* A *равномерно непрерывно.*

Доказательство. 1) Воспользуемся равенством (1.178) и неравенством Коши

$$|Ax| = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \left[(Ax)_i\right]^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \left|\sum_{j=1}^{d_0} a_{ij} x_j\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{d_0} x_j^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2\right)^{1/2} |x|\,.$$

Отсюда, в частности, вытекает следующая оценка нормы линейного отображения через элементы его матрицы:

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_0} a_{ij}^2\right)^{1/2}. \tag{1.180}$$

Для доказательства утверждения 2) возьмем произвольно $0 \neq x \in \mathbb{R}^{d_0}$, тогда справедливо равенство $|x/\,|x||=1$, и по определению нормы

$$\frac{|Ax|}{|x|} = \left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \|A\|\,.$$

Утверждение 3) следует из 2):

$$|Ax - Ay| = |A(x-y)| \leqslant \|A\| \cdot |x-y|\,. \quad \square$$

Лемма 1.32. *Если* $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ *и* $B \in L\left(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}\right)$, *то* $B \circ A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_2}\right)$ *и* $\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$.

Доказательство. Доказательство следует из утверждения 2) леммы 1.31:

$$|B\,(Ax)| \leqslant \|B\| \cdot |Ax| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|\,. \quad \square$$

Дифференцируемые отображения

Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$. Для $k = 1, \ldots, d_1$ будем стандартно обозначать

$$f_k = \pi_k \circ f \tag{1.181}$$

и называть f_k k-й **компонентой** (координатной функцией) функции f.

Определение 1.114. *Функция f называется **дифференцируемой** в точке $a \in \operatorname{int} D$, если существует такое $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$, что*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad h \to 0. \tag{1.182}$$

*Отображение $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ называется **производной** функции f в точке a и обозначается $f'(a)$.*

Конечно, при $d_1 = 1$ получим старое определение 1.105.

Лемма 1.33. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D$. Тогда*

1) производная $f'(a)$ определяется однозначно;

2) функция f непрерывна в точке a.

Доказательство такое же, как и в лемме 1.25. Проведите его самостоятельно. $\square$

Лемма 1.34. *Пусть задана функция $f : D \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D \subset \mathbb{R}^{d_0}$, $a \in \operatorname{int} D$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) f дифференцируема в точке a;

2) для каждого $i = 1, \ldots, d_1$ компонента f_i дифференцируема в точке a.

При этом $\pi_i \circ f'(a) = (\pi_i \circ f)'(a)$.

Доказательство основано на неравенствах (1.147) (проведите его самостоятельно). $\square$

Определение 1.115. *Если $G \subset \mathbb{R}^{d_0}$ — открытое множество, то класс функций, все компоненты которых принадлежат классу $C^1(G)$ (см. определение 1.107), будем обозначать $C^1\left(G, \mathbb{R}^{d_1}\right) = C^1(G)$.*

Определение 1.116. ***Матрицей Якоби** функции f, дифференцируемой в точке $a \in \operatorname{int} D_f$, называется матрица ее производной $f'(a)$.*

*Если $d_0 = d_1$, то матрица Якоби является квадратной, в этом случае ее определитель называется **якобианом** (определителем Якоби) для f в точке a и обозначается $\mathbf{J}f(a)$.*

Упражнение 1.40. 1) Пусть $f(x) = Ax + c$, где $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, $A \in L\left(\mathbb{R}^{d_0}, \mathbb{R}^{d_1}\right)$, $c \in \mathbb{R}$. Доказать, что f дифференцируема в каждой точке $a \in \mathbb{R}^{d_0}$ и $f'(a) = A$.

2) Показать, что функция класса $C^1\left(G, \mathbb{R}^{d_1}\right)$ дифференцируема в каждой точке из G.

3) Доказать, что матрица Якоби имеет вид

$$\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}_{i=1,\,\ldots,d_1, j=1,\,\ldots,d_0}.$$

Теорема 1.104. *Пусть функция $f : D_f \to \mathbb{R}^{d_1}$, $D_f \subset \mathbb{R}^{d_0}$ дифференцируема в точке $a \in \operatorname{int} D_f$, функция $g : D_g \to \mathbb{R}^{d_2}$, $f\left(D_f\right) \subset D_g$ дифференцируема в точке $b = f(a) \in \operatorname{int} D_g$.*

Тогда композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a). \tag{1.183}$$

Доказательство. Запишем условия дифференцируемости:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \varepsilon_1(h)\,|h|\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1(h) = o(1) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

$$g(b+k) - g(b) = g'(b)k + \varepsilon_2(k)\,|k|\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_2(k) = o(1) \quad \text{при} \quad k \to 0,$$

и обозначим $k = f(a+h) - f(a)$. Тогда (см. 2) в лемме 1.33) $k \to 0$ при $h \to 0$.

Рассмотрим

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g\left(f(a) + k\right) - g(f(a)) = g'(f(a))k + \varepsilon_2(k)\,|k| =$$

$$= g'(f(a))\left(f'(a)h + \varepsilon_1(h)\,|h|\right) + \varepsilon_2(k)\,|k| =$$

$$= g'(f(a)) \circ f'(a)h + |h|\, g'(f(a))\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)\,|k|\,.$$

Далее в силу леммы 1.31

$$|g'(f(a))\varepsilon_1(h)| \leqslant \|g'(b)\|\,|\varepsilon_1(h)| = o(1) \quad \text{и} \quad \varepsilon_2(k)\,|k| = o(|h|),$$

следовательно,

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a)) \circ f'(a)h + o(|h|). \quad \square$$

Равенство (1.183) удобно записывать в скалярной форме, в терминах частных производных компонент: если обозначить $F = g \circ f$, то

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \quad \text{где} \quad i = 1, \ldots, d_2,\ j = 1, \ldots, d_0. \tag{1.184}$$

1.8.2. Теорема об обратной функции

Гомеоморфизмы

Пусть X, Y — метрические пространства. Взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$ называется **гомеоморфизмом** (между X и Y), если f и f^{-1} непрерывны.

Эти же определения можно дать и для случая любых топологических пространств (см. подп. 1.6.2). Наличие гомеоморфизма между двумя метрическими пространствами означает, что эти пространства топологически одинаковы.

Упражнение 1.41. Доказать следующие утверждения:

1) если существует линейный гомеоморфизм между $\mathbb{R}^{d_0}$ и $\mathbb{R}^{d_1}$, то $d_0 = d_1$;

2) отображение $A \in L\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно не вырождено, т. е. $\det A \neq 0$.

Теорема 1.105 (Брауэра). *Если $d_0 \neq d_1$, то не существует гомеоморфизма между непустыми открытыми множествами $A_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 0, 1$.*

Эта теорема свидетельствует о том, что размерность открытого множества в $\mathbb{R}^d$ является топологическим инвариантом, поскольку не меняется при гомеоморфных преобразованиях.

Теорема об обратной функции

В одномерном случае критерий обратимости был дан в теореме 1.38. Однако в этом критерии используется понятие монотонности, которое сейчас лишено смысла. Найдем условия обратимости другим способом.

Для непрерывно дифференцируемой функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$, можно рассуждать так: если $f'(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, то f' сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки. Тогда по теореме 1.57 функция f строго монотонна и взаимно однозначна в этой окрестности.

Важным в этом рассуждении является то, что условие монотонности (которое имеет смысл только в одномерном случае) на функцию не налагается. Поэтому для функций многих переменных можно попытаться вывести существование обратной функции из условий вида $f'(x_0) \neq 0$.

Теорема 1.106. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $a \in G$ и функция $f : G \to \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^1(G)$ и*

$$\mathbf{J}f(a) \neq 0. \tag{1.185}$$

Тогда существует окрестность U точки a со следующими свойствами:

1) *$f|_U$ — биекция;*

2) $V = f(U)$ — *открытое множество;*
3) $f^{-1} \in C^1(V)$ *и для любого* $y \in V$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\right)^{-1}(x), \qquad \text{где} \qquad x = f^{-1}(y). \tag{1.186}$$

Доказательство. Шаг 1. Обозначим для краткости $A = f'(a)$ и рассмотрим разность $\varphi = f - A$. Тогда $\varphi \in C^1(G)$, $\varphi'(a) = 0$ и найдется такая окрестность U точки a, что выполнены неравенства

$$\mathbf{J}f(x) \neq 0, \quad x \in U, \tag{1.187}$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2d\left\|A^{-1}\right\|}, \quad x \in U. \tag{1.188}$$

В силу (1.188), неравенства Коши (лемма 1.22) и теоремы 1.99 Лагранжа для любых $x', x'' \in U$

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| = \left(\sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{d} \left|\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\xi_i)(x'_j - x''_j)\right|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\xi_i)\right|^2\right)^{1/2} |x' - x''| \leqslant \frac{1}{2\left\|A^{-1}\right\|}\left|x' - x''\right|.$$

Отсюда и из неравенства $|Ax' - Ax''| \geqslant \left\|A^{-1}\right\|^{-1}|x' - x''|$ (см. 3) в лемме 1.31) получим

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant |Ax' - Ax''| - |\varphi(x') - \varphi(x'')| \geqslant \frac{1}{2\left\|A^{-1}\right\|}\left|x' - x''\right|.$$

Следовательно, $f|_U$ — биекция U на $V = f(U)$.

Обозначим $\alpha = \left(2\left\|A^{-1}\right\|\right)^{-1}$, тогда последнее неравенство можно переписать в виде

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \alpha\left|x' - x''\right|, \quad x', x'' \in U. \tag{1.189}$$

Неравенство (1.189) в терминах функции $f^{-1} : V \to U$, обратной к $f|_U$, примет следующую форму:

$$\left|f^{-1}(y') - f^{-1}(y'')\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}\left|y' - y''\right|, \quad y', y'' \in V. \tag{1.190}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что функция $f^{-1} : V \to U$ непрерывна на V.

Шаг 2. Докажем, что V открыто. Пусть $y_0 \in V$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ и $\overline{B}\left(x_0, r\right) \subset U$. Покажем, что $B\left(y_0, \alpha r/2\right) \subset V$.

Пусть $y \in B\left(y_0, \alpha r/2\right)$. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\psi(x) = |y - f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{d} \left[y_i - f_i(x)\right]^2, \quad x \in G.$$

Тогда $\psi \in C^1(G)$ и на компакте $\overline{B}\left(x_0, r\right)$ функция ψ достигает своей точной нижней грани. Отметим, что

$$\sqrt{\psi(x_0)} = |y - f(x_0)| = |y - y_0| < \frac{\alpha r}{2},$$

а при $|x - x_0| = r$ в силу (1.189)

$$\sqrt{\psi(x)} = |y - f(x)| \geqslant |f(x) - f(x_0)| - |y - y_0| \geqslant \alpha\, |x - x_0| - \frac{\alpha r}{2} = \frac{\alpha r}{2}.$$

Следовательно, $\inf \psi \left(\overline{B}\left(x_0, r\right)\right)$ достигается в некоторой внутренней точке $x \in B(x_0, r)$, и эта точка x является точкой экстремума. Отсюда по лемме 1.30 получим

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = -2 \sum_{i=1}^{d} \left[y_i - f_i(x)\right] \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Условие (1.187) показывает, что эта система имеет только тривиальное решение, т. е. $y = f(x)$ и $y \in f\left(B(x_0, r)\right) \subset V$.

Шаг 3. Докажем дифференцируемость обратной функции и равенство (1.186). Пусть $y \in V$ и $y + k \in V$, $x = f^{-1}(y)$, $h = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)$. Тогда

$$|h| = \left|f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)\right| \leqslant \frac{|k|}{\alpha}$$

(см. (1.190)) и $h \to 0$ при $k \to 0$.

Запишем соотношение дифференцируемости функции f:

$$k = f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon(h)\, |h|\,, \quad \varepsilon(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

и подействуем на обе части отображением $\left(f'\right)^{-1}(x)$:

$$h = \left(f'\right)^{-1}(x)k - \left(f'\right)^{-1}(x)\left(\varepsilon(h)\, |h|\right)$$

или

$$f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y) = \left(f'\right)^{-1}(x)k - \left(f'\right)^{-1}(x)\left(\varepsilon(h)\, |h|\right),$$

причем

$$\left|\left(f'\right)^{-1}(x)\left(\varepsilon(h)\,|h|\right)\right| \leqslant \left\|\left(f'\right)^{-1}(x)\right\| |\varepsilon(h)|\,|h| = o(|h|) = o(|k|)$$

при $k \to 0$.

Осталось показать, что $f^{-1} \in C^1(V)$. Но это вытекает из теоремы 1.104 о производной композиции. Точнее, из равенства (1.184), примененного к тождественному отображению $\mathbb{R}^d$ $I = f^{-1} \circ f$, получим

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial(f^{-1})_i}{\partial y_k}(y)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(f^{-1}(y)) = \delta_{ij}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i, j = 1, \ldots, d. \end{cases}$$

Отсюда, решая эту систему, например, по правилу Крамера, видим, что частные производные $\dfrac{\partial\left(f^{-1}\right)_i}{\partial y_k}(y)$ непрерывны на V. $\square$

Отметим, что утверждение теоремы 1.106 носит локальный характер: оно справедливо в некоторой окрестности точки a. По аналогии с одномерным случаем, где соответствующее утверждение имело глобальный характер (см. теорему 1.38), может создаться впечатление, что, налагая ограничение (1.185) на всей области G, можно утверждать существование обратной функции на образе $f(G)$.

Следующий пример показывает, что это не так. Для функции

$$f(x, y) = \left(e^x \cos y, e^x \sin y\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

якобиан

$$\mathbf{J}f(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix}$$

невырожден на всем $\mathbb{R}^2$. В то же время эта функция не является глобально взаимно однозначной.

1.8.3. Теорема о неявной функции

Постановка задачи о неявной функции

Пусть на прямоугольнике $I = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ задана функция $f : I \to \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0. \tag{1.191}$$

Пусть для каждого фиксированного $x \in (a, b)$ уравнение (1.191) имеет единственное решение $y = g(x)$. Тогда этим уравнением однозначно определяется функция g на интервале (a, b), для которой имеет место равенство

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Она называется неявной функцией, определенной уравнением (1.191).

Но однозначная разрешимость уравнения не всегда имеет место. Иногда решение не является единственным или вообще не существует. Так может обстоять дело с самыми простыми уравнениями, например

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Здесь при $|x| > 1$ решений относительно y нет. Чтобы обеспечить разрешимость, приходится сужать область изменения, ограничиваясь значениями $|x| \leqslant 1$. Но для любого $x \in (-1, 1)$ решение не является единственным, их два: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Задачу о существовании неявной функции, определяемой уравнением, естественно поставить следующим образом: пусть при $x = x_0 \in (a, b)$ это уравнение имеет решение $y_0 \in (c, d)$. При каких условиях можно гарантировать, что для x, близких к x_0, найдется единственное y вблизи y_0, удовлетворяющее уравнению (1.191)?

Эта задача имеет наглядный геометрический смысл. Уравнение (1.191) определяет кривую на плоскости и требуется найти условия, при которых в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) эта кривая выражается явной зависимостью y от x.

Дифференциальное исчисление позволяет предвидеть условия, при которых это можно пытаться доказать. Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то асимптотически уравнение (1.191) близко к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение однозначно разрешимо относительно y при условии

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Конечно, задача может быть обобщена на случай, когда x и y принадлежат евклидовым пространствам.

Если $x \in \mathbb{R}^{d_0}$, $y \in \mathbb{R}^{d_1}$, то через (x, y) будем обозначать $(d_0 + d_1)$-мерный вектор $(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1})$. Рассмотрим векторное уравнение относительно y:

$$f(x, y) = 0, \tag{1.192}$$

где f — отображение открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ в $\mathbb{R}^{d_1}$. Это векторное уравнение равносильно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1}) = 0, \\ \ldots \\ f_{d_1}(x_1, \ldots, x_{d_0}, y_1, \ldots, y_{d_1}) = 0 \end{cases} \tag{1.193}$$

относительно $y_1, \ldots, y_{d_1}$. Поставленная выше задача обобщается на случай уравнения (1.193). Из вышесказанного можно прийти к предположению о том, что разрешимость системы уравнений связана с невырожденностью определителя

$$\frac{\partial\,(f_1, \ldots, f_{d_1})}{\partial\,(y_1, \ldots, y_{d_1})}(x, y) := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{d_1}}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_1}(x,y) & \ldots & \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_{d_1}}(x,y) \end{vmatrix}.$$

Будем его называть якобианом функций $f_1, \ldots, f_{d_1}$ по переменным $y_1, \ldots, y_{d_1}$ в точке (x, y).

Основная теорема

Теорема 1.107. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{d_0+d_1}$ — открытое множество, функция $f : G \to \mathbb{R}^{d_1}$ принадлежит классу $C^1(G)$ и для некоторой точки $(a, b) \in G$*

$$f(a, b) = 0, \quad \frac{\partial\,(f_1, \ldots, f_{d_1})}{\partial\,(y_1, \ldots, y_{d_1})}(a, b) \neq 0. \tag{1.194}$$

Тогда существуют окрестности U_a точки a и V_b точки b, удовлетворяющие следующим условиям:

1) *для любого $x \in U_a$ существует единственная точка $y = g(x) \in V_b$, для которой $f(x, g(x)) = 0$;*

2) *отображение $g : U_a \to V_b$ принадлежит классу $C^1(U_a)$.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi : G \to \mathbb{R}^{d_0+d_1}$:

$$\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$$

и вместо уравнения $f(x, y) = 0$ будем рассматривать равносильное ему

$$\varphi(x, y) = (x, 0). \tag{1.195}$$

Функция φ принадлежит классу $C^1(G)$. Ее якобиан

$$\mathbf{J}\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{d_0}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{d_1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial x_1} & \ldots & \ldots & \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial x_{d_0}} & \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_{d_1}}{\partial y_{d_1}} \end{vmatrix} = \frac{\partial\left(f_1, \ldots, f_{d_1}\right)}{\partial\left(y_1, \ldots, y_{d_1}\right)}$$

отличен от нуля в точке (a,b) в силу второго условия (1.194). Таким образом, выполнены все условия теоремы об обратной функции (теорема 1.106). По этой теореме существует открытый куб (ясно, что в теореме об обратной функции в качестве U можно взять куб)

$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d_0+d_1} : |x_i - a_i| < \delta,\ |y_i - b_i| < \delta\right\}$$

с центром в точке (a,b), для которого:

а) сужение $\varphi|_Q$ взаимно однозначно;

б) образ $R = \varphi(Q)$ открыт;

в) обратное отображение $\varphi^{-1} : R \to Q$ принадлежит классу $C^1(R)$.

Очевидно, что отображение φ^{-1} имеет вид

$$\varphi^{-1}(s,t) = (s, \psi(s,t)), \quad (s,t) \in R,$$

где ψ — отображение класса $C^1(R)$ (так как φ оставляет первые d_0 координат вектора (x,y) неизменными, то и обратное отображение обладает этим свойством).

Куб Q можно представить как прямое произведение $Q = Q_a \times Q_b$, где Q_a — открытый куб в $\mathbb{R}^{d_0}$ с центром в точке a, а Q_b — открытый куб в $\mathbb{R}^{d_1}$ с центром в точке b.

Докажем существование решения уравнения (1.195). При фиксированном $x \in Q_a$ это уравнение имеет решение $y \in Q_b$ в том и только том случае, когда точка $(x,0)$ содержится среди значений функции φ на Q, т. е. если $(x,0) \in R$.

Пусть

$$S = \{x : (x,0) \in R\}.$$

Так как R открыто в $\mathbb{R}^{d_0+d_1}$, то и его сечение S открыто в $\mathbb{R}^{d_0}$. Кроме того, $f(a,b) = 0$, поэтому $a \in S$. Следовательно, найдется окрестность U_a точки a, $U_a \subset S$. Итак, для каждой точки $x \in U_a$ существует точка $y \in Q_b$, для которой $f(x,y) = 0$.

Теперь докажем единственность решения уравнения (1.195). Пусть для точки $(x, y) \in Q$ выполнено равенство (1.195). Тогда

$$(x, y) = \varphi^{-1}(x, 0) = (x, \psi(x, 0))$$

и $y = \psi(x, 0)$, т. е. $y = g(x) \in Q_b$ определен однозначно, причем g — функция класса $C^1(U_a)$, так как $\psi \in C^1(R)$. $\square$

Теорема о неявной функции — одна из важнейших теорем математического анализа, которая имеет многочисленные приложения.

Отметим в заключение, что производную и частные производные неявной функции можно найти, применяя правило дифференцирования композиции (теорема 1.104) к равенству $f(x, g(x)) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{k=1}^{d_1} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_k} \dfrac{\partial g_k}{\partial x_j} = 0, \\ \\ i = 1, \ldots, d_1, \quad j = 1, \ldots, d_0. \end{cases} \tag{1.196}$$

Из этой системы уравнений можно определить частные производные компонент неявной функции $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_j}$.

1.9. Теория рядов

1.9.1. Основные понятия теории рядов

Понятие сходимости числового ряда было дано в подп. 1.4.4 (см. определение 1.59). В этой главе оно будет рассматриваться систематически, начиная с основных определений.

Сходящиеся и расходящиеся ряды

Если $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$ — последовательность чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1.197}$$

называют **рядом**.

Чисто формальное восприятие знака суммы в (1.197) означает, что необходимо складывать бесконечное число слагаемых. Такая операция нуждается в дополнительном определении.

С каждым рядом (1.197) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{1.198}$$

которые называются его **частичными суммами**.

Определение 1.117. *Ряд* (1.197) *называется* ***сходящимся****, если сходится последовательность его частичных сумм, т. е. существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае s называется ***суммой ряда*** *и используется запись $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то ряд называется ***расходящимся****.*

Итак, по определению вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, если задана последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$, то, полагая

$$a_1 = s_1, \quad a_k = s_k - s_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

получим ряд (1.197), для которого $\{s_k\}$ является последовательностью частичных сумм (проверьте это самостоятельно).

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности — вопрос о сходимости некоторого ряда. Следовательно, рассмотрение рядов — это лишь новая форма изучения последовательностей. Но такой подход дает новые возможности как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Теория рядов является мощным средством как в математическом анализе, так и в его приложениях.

Упражнение 1.42. Доказать следующие утверждения:

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a$ с постоянными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$;

2) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

(сумма геометрической прогрессии, $a \neq 0$) сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. При этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1;$$

3) следующий ряд расходится (см. пример 1.7):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(гармонический ряд).} \tag{1.199}$$

Остатки

Сходимость ряда не меняется от добавления, удаления или изменения любого конечного числа его слагаемых.

Определение 1.118. *Для $m \in \mathbb{N}$ ряд*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \tag{1.200}$$

*называется m-м **остатком** ряда* (1.197).

Если остаток (1.200) *сходится, то его сумму будем обозначать r_m.*

Упражнение 1.43. Доказать следующие утверждения:

1) если ряд (1.197) сходится, то сходится любой его остаток и $s = s_m + r_m$. Если сходится какой-либо из остатков ряда (1.197), то сходится и ряд (1.197);

2) если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся к a и b соответственно, то сходится любая их линейная комбинация $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha x_k + \beta y_k)$ и ее сумма равна $\alpha a + \beta b$;

3) сходимость ряда (1.197) равносильна условию

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n > m \geqslant N_\varepsilon \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \tag{1.201}$$

(критерий Коши сходимости ряда);

4) если ряд (1.197) сходится, то

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{1.202}$$

Таким образом, условие (1.202) необходимо для сходимости ряда (1.197). Если условие (1.202) не выполнено, то ряд заведомо расходится. Обратное утверждение неверно — это показывает пример гармонического ряда (1.199).

Абсолютная и условная сходимость

Определение 1.119. *Ряд (1.197) называется* ***сходящимся абсолютно****, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,. \tag{1.203}$$

Если ряд (1.197) сходится, а ряд (1.203) расходится, то говорят, что ряд (1.197) ***сходится условно****.*

Из очевидного неравенства

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$$

и критерия Коши сходимости числовой последовательности (см. (1.201) или теорему 1.9) немедленно вытекает, что из абсолютной сходимости ряда (1.197) следует его сходимость. Обратное утверждение неверно, это показывает ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \tag{1.204}$$

который сходится условно (это будет установлено позже — см. следствие 1.6).

Сходимость ряда может быть обусловлена двумя главными причинами: во-первых, скоростью убывания $|a_k|$, во-вторых, интерференцией (взаимным сокращением) слагаемых a_k, имеющих различные знаки, в частичных суммах s_n, не позволяющей частным суммам колебаться слишком сильно.

Вопрос об абсолютной сходимости связан лишь с первой из этих причин и сводится к исследованию сходимости неотрицательных числовых рядов.

1.9.2. Положительные числовые ряды

Критерий сходимости

Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0, \tag{1.205}$$

которые будем называть положительными или неотрицательными. Для них сходимость проверяется достаточно просто.

Лемма 1.35. *Сходимость ряда (1.205) равносильна ограниченности последовательности частичных сумм сверху.*

Доказательство. Для рядов (1.205) последовательность частичных сумм возрастает:

$$s_n = s_{n-1} + a_n \geqslant s_{n-1}.$$

Поэтому утверждение леммы вытекает из теоремы 1.10.

Признаки сравнения

Теорема 1.108 (признак сравнения). *Если*

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant k_0 \quad 0 \leqslant a_k \leqslant b_k, \tag{1.206}$$

то

1) *из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;*
2) *из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Доказательство. Можно считать, что неравенство (1.206) выполнено для всех $k \in \mathbb{N}$ (см. упражнение 1.43). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и надо применить лемму 1.35. □

Следующая теорема переводит предыдущую на язык пределов и обычно называется признаком сравнения в предельной форме.

Теорема 1.109. *Если последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ положительны и существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l > 0, \tag{1.207}$$

то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. При условии (1.207) существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - l \right| < \frac{l}{2} \quad (k \geqslant k_0).$$

Следовательно,

$$\frac{l}{2} b_k \leqslant a_k \leqslant \frac{3l}{2} b_k \quad (k \geqslant k_0)$$

и надо применить теорему 1.108. □

Отметим также, что при $l = 0$ теорема 1.109 теряет силу. Приведите самостоятельно пример, показывающий это.

Лемма 1.36. *Если последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ положительны и*

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geqslant k_0 \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}, \tag{1.208}$$

то

1) *из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;*
2) *из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Доказательство. Как и в теореме 1.108, можно считать, что неравенство из (1.208) выполнено для всех $k \geqslant 0$ (считаем $a_0 = b_0 = 1$). Почленно перемножая неравенства

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leqslant \frac{b_{i+1}}{b_i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

получим $a_k \leqslant b_k$, $k \geqslant 1$. Утверждение леммы вытекает из теоремы 1.108. □

Признаки сравнения с конкретными рядами

Выбирая в лемме 1.36 в качестве одного из рядов конкретный, сходимость или расходимость которого уже установлена, можно получить различные условия сходимости рядов. Иллюстрацией служит следующее утверждение, в котором ряд сравнивается с геометрической прогрессией.

Следствие 1.2 (признак Коши с корнем). *Если*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = C, \tag{1.209}$$

то

1) *при $C < 1$ ряд (1.205) сходится;*
2) *при $C > 1$ ряд (1.205) расходится;*
3) *при $C = 1$ признак не работает.*

Доказательство. 1) Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q = C + \varepsilon < 1$. Тогда по теореме 1.13 $\sqrt[k]{a_k} < C + \varepsilon = q$ или $a_k \leqslant q^k$ для всех достаточно больших k выполнено неравенство. Утверждение следует теперь из упражнения 1.42.

2) По теореме 1.13 для некоторой последовательности $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$ справедливо равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{a_{k_i}} = C$ и $a_{k_i} \geqslant 1$, начиная с некоторого номера, и не выполнено необходимое условие сходимости ряда (см. упражнение 1.43).

3) Для расходящегося гармонического ряда (1.199) и для сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

будет $C = 1$. $\square$

Теорема 1.110 (признак Куммера). *Пусть* $c_k > 0$ *и*

$$K_k = c_k \frac{a_k}{a_{k+1}} - c_{k+1}.$$

Тогда

1) *если существует такое* $\delta > 0$, *что, начиная с некоторого номера,* $K_k \geqslant \delta$, *то ряд* (1.205) *сходится;*

2) *если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/c_k$ *расходится и, начиная с некоторого номера,* $K_k \leqslant 0$, *то ряд* (1.205) *расходится.*

Доказательство. 1) Так как $K_k \geqslant \delta$ $(k \geqslant k_0)$, то

$$a_{k+1} \leqslant \frac{1}{\delta}\left(a_k c_k - a_{k+1} c_{k+1}\right).$$

Сложим эти неравенства:

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} a_k \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{k=k_0}^{n-1} \left(a_k c_k - a_{k+1} c_{k+1}\right) = \frac{1}{\delta}\left(a_{k_0} c_{k_0} - a_n c_n\right) \leqslant \frac{a_{k_0} c_{k_0}}{\delta}.$$

Следовательно, частные суммы ряда (1.205) ограничены.

2) В этом случае

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \frac{1/c_{k+1}}{1/c_k} \quad (k \geqslant k_0)$$

и утверждение вытекает из леммы 1.36. $\square$

Следствие 1.3 (признак Даламбера). *Пусть существует предел*

$$D = \lim_{k\to\infty} D_k, \quad D_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

Тогда

1) *при* $D < 1$ *ряд* (1.205) *сходится;*
2) *при* $D > 1$ *ряд* (1.205) *расходится;*
3) *при* $D = 1$ *признак не работает.*

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = 1$, тогда

$$K_k = \frac{1}{D_k} - 1$$

и все вытекает из теоремы 1.110. □

Следствие 1.4 (признак Раабе). *Пусть существует предел*

$$R = \lim_{k\to\infty} R_k, \quad R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right).$$

Тогда
1) *при* $R > 1$ *ряд* (1.205) *сходится;*
2) *при* $R < 1$ *ряд* (1.205) *расходится;*
3) *при* $R = 1$ *признак не работает.*

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = k$, тогда

$$K_k = k\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1 = R_k - 1$$

и опять все вытекает из теоремы 1.110. □

Следствие 1.5 (признак Бертрана). *Пусть существует предел*

$$B = \lim_{k\to\infty} B_k, \quad B_k = \ln k\left[k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1\right].$$

Тогда
1) *при* $B > 1$ *ряд* (1.205) *сходится;*
2) *при* $B < 1$ *ряд* (1.205) *расходится;*
3) *при* $B = 1$ *признак не работает.*

Доказательство. В признаке Куммера надо взять $c_k = k\ln k$, тогда

$$\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k\ln k} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2(i+1)} \to \infty.$$

Кроме того,

$$K_k = k\ln k\frac{a_k}{a_{k+1}} - (k+1)\ln(k+1) = B_n - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

и опять все вытекает из теоремы 1.110. □

Признак Гаусса

Признаки Даламбера, Раабе и Бертрана были получены как частные случаи признака Куммера. Объединим эти признаки, но уже в другой форме, которая использует асимптотическое представление для отношения a_k/a_{k+1}.

Теорема 1.111 (признак Гаусса). *Пусть*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^2},$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *и* θ_k *— ограниченная последовательность.*

Тогда ряд (1.205)

1) *сходится в случаях* $\lambda > 1$ *или* $\lambda = 1$, $\mu > 1$*;*

2) *расходится в случаях* $\lambda < 1$ *или* $\lambda = 1$, $\mu \leqslant 1$.

Доказательство. Случаи $\lambda > 1$ и $\lambda < 1$ сводятся к признаку Даламбера, так как

$$D = \lim_{k\to\infty} D_k = \frac{1}{\lambda}.$$

Пусть теперь $\lambda = 1$, тогда случаи $\mu > 1$ и $\mu < 1$ сводятся к признаку Раабе, так как

$$R_k = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_k}{k}.$$

Наконец, если $\mu = 1$, то

$$B_k = (R_k - 1)\ln k = \frac{\ln k}{k}\theta_k$$

и можно использовать признак Бертрана, в котором $B = 0$. $\square$

Ряды с монотонными слагаемыми

Здесь рассматриваются ряды с монотонными слагаемыми и для них приводятся два специальных признака.

Теорема 1.112 (Коши). *Если последовательность* a_k *убывает, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_{2^i}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство основано на разбиении на двоичные блоки. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ найдем такое $m \in \mathbb{N}$, чтобы $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2^{m+1}} a_k = a_1 + \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \leqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m} 2^i a_{2^i}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant a_1 + \sum_{k=2}^{2^m} a_k \geqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \geqslant a_1 + \sum_{i=0}^{m-1} 2^i a_{2^{i+1}} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} 2^i a_{2^i}.$$

Утверждение теоремы следует из леммы 1.35. □

Проследите самостоятельно, как теорема 1.112 применяется к обобщенному гармоническому ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Напомним также признак сходимости, связанный с несобственными интегралами (см. теорему 1.87).

Теорема 1.113 (интегральный признак Коши). *Пусть f — положительная и убывающая функция на $[1, \infty)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ сходится;*
2) *несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится.*

1.9.3. Признаки условной сходимости

Для проверки условной сходимости рядов (см. определение 1.119) исследования поведения одних абсолютных величин слагаемых ряда уже недостаточно. Нужно учитывать распределение знаков у слагаемых. Рассмотрим сходимость рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{1.210}$$

где $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{b_k\} \subset \mathbb{R}$. Множители b_k будут играть роль знаков.

Преобразование Абеля

Сначала приведем один важный технический прием, который часто встречается при оценке осциллирующих сумм и является дискретным аналогом интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пусть $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, тогда при $n > m \geqslant 1$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.$$

Итак, получено тождество

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_{m+1} B_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k, \tag{1.211}$$

которое называется **преобразованием Абеля**.

В нем $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, но вместо таких сумм можно рассмотреть любые B_n, удовлетворяющие условиям $B_k - B_{k-1} = b_k$. В частности, в (1.211) можно взять фиксированное $0 \leqslant l \leqslant m-1$ и

$$B_k = \sum_{i=l+1}^{k} b_i. \tag{1.212}$$

Признаки Дирихле и Абеля

Использование преобразования Абеля является главной частью доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.114 (признак Дирихле). *Пусть последовательности* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) a_k *монотонно убывает к нулю;*

2) *последовательность* $\sum_{i=1}^{k} b_i$ *ограничена.*

Тогда ряд (1.210) *сходится.*

Доказательство. Обозначим

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i.$$

Тогда по условию 2) для некоторого числа $M > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $|B_k| \leqslant M$. Поэтому, используя преобразование Абеля (1.211), получим

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k \right| \leqslant a_n |B_n| + a_{m+1} |B_m| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \leqslant 2M a_{m+1}.$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из критерия Коши сходимости ряда (упражнение 1.43). □

Доказательство показывает также, что при условиях теоремы Дирихле справедливы следующие оценки для остатков ряда (1.210):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant 2M a_{n+1}, \tag{1.213}$$

где M — число, удовлетворяющее условию $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant M$.

Следующее утверждение, близкое к теореме 1.114, несколько отличается от нее условиями.

Теорема 1.115 (признак Абеля). *Пусть последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена;*

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд (1.210) *сходится.*

Доказательство сводится к применению признака Дирихле. Запишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a)\, b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

где $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. К первому ряду справа применима теорема 1.114, а второй сходится по условию. □

В следующем частном случае теоремы 1.114 рассматриваются так называемые знакочередующиеся ряды.

Следствие 1.6 (признак Лейбница). *Если $a_k \downarrow 0$, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

сходится.

Доказательство. Надо использовать признак Дирихле с $b_k = (-1)^k$. □

Примером применения признака Лейбница может служить ряд (1.204).

Для упражнения 1.44 необходимо использовать следующие тождества (докажите их самостоятельно):

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}, \tag{1.214}$$

$$\widetilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}. \tag{1.215}$$

Функции D_n и $\widetilde{D}_n$ называются n-м **ядром Дирихле** и n-м **сопряженным ядром Дирихле** соответственно. Они будут играть важную роль при изучении рядов Фурье.

Упражнение 1.44. Доказать следующие утверждения:
1) если $a_k \downarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ сходится при любом $x \neq \pi m$, $m \in \mathbb{N}$;
2) если $b_k \downarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$;
3) оценка остатка (1.213) в признаке Дирихле в случае $b_k = (-1)^k$ может быть усилена так:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}. \tag{1.216}$$

1.9.4. Ассоциативность и коммутативность

Изучим теперь вопрос о том, в какой степени для бесконечных сумм (рядов) сохраняют силу привычные свойства коммутативности и ассоциативности, справедливые для сумм конечного числа слагаемых.

Рассмотрим числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{1.217}$$

Будем использовать следующую терминологию. Любая строго возрастающая последовательность $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$, $k_0 = 0$, порождает **ряд со скобками**

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k. \tag{1.218}$$

Если $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \tag{1.219}$$

называется **перестановкой** ряда (1.217).

Ассоциативность

Если ряд (1.217) сходится, то любой его ряд со скобками (1.218) сходится, причем к той же сумме. Это следует из того, что при

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad s_j^* = \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} a_k,$$

будет $s_j^* = s_{k_{j+1}}$, т. е. последовательность частичных сумм ряда со скобками является подпоследовательностью частных сумм ряда.

Пример ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1-1)$ показывает, что обратное утверждение неверно.

Однако если все слагаемые в каждой скобке имеют один и тот же знак (возможно, зависящий от скобки), то из сходимости ряда со скобками следует сходимость ряда (1.217). Это вытекает из неравенств

$$\min\left\{s_j^*, s_{j+1}^*\right\} \leqslant s_n \leqslant \max\left\{s_j^*, s_{j+1}^*\right\} \quad \text{при} \quad k_j < n \leqslant k_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots .$$

Коммутативность

Теорема 1.116. *Если числовой ряд сходится абсолютно, то сходится любая его перестановка, причем к той же сумме.*

Доказательство. Сначала предположим, что $a_k \geqslant 0$. Рассмотрим произвольную перестановку (1.219) ряда (1.217) и положим

$$m_n = \max\left\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\right\},$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} a_k \leqslant A.$$

Следовательно, $A_\sigma \leqslant A$, где A — сумма ряда (1.217), а A_σ — сумма перестановки (1.219).

Так как исходный ряд (1.217) является перестановкой ряда (1.219), то справедливо также и неравенство $A \leqslant A_\sigma$. Поэтому $A = A_\sigma$.

В общем случае для $a \in \mathbb{R}$ положим

$$a^+ = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad a^- = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.220}$$

Тогда справедливы равенства

$$a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-$$

и ряд (1.217) распадается в разность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

к каждому из которых применим рассмотренный случай. □

Упражнение 1.45. Доказать следующие утверждения:

1) ряд (1.217) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$;

2) если ряд (1.217) сходится условно, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$ расходятся.

Теорема 1.117 (Римана). *Если ряд* (1.217) *сходится условно, то для любых* $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ *существует перестановка* (1.219), *для которой*

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n^{\sigma} = a, \quad \varlimsup_{n\to\infty} s_n^{\sigma} = b, \quad \text{где} \quad s_n^{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}.$$

Здесь s_n^{σ} — n*-я частичная сумма переставленного ряда* (1.219).

Доказательство. Отметим, что в силу упражнения 1.45 оба ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$$

расходятся. Сначала рассмотрим случай, когда a и b конечны и $b \geqslant 0$.

Положим $l_0 = r_0 = 0$ и найдем номера $l_1 > l_0$ и $r_1 > r_0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$b < \sum_{k=l_0+1}^{l_1} a_k^{+} \leqslant b + a_{l_1}^{+},$$

$$a - a_{r_1}^{-} \leqslant \sum_{k=l_0+1}^{l_1} a_k^{+} - \sum_{k=r_0+1}^{r_1} a_k^{-} < a.$$

Это возможно сделать, так как ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$ расходятся. Продолжая процесс по индукции, построим последовательности индексов $l_i \uparrow \infty$ и $r_i \uparrow \infty$ так, чтобы при $i = 1, 2, \ldots$

$$b < \sum_{j=0}^{i-1} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^{+} - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^{-} \right) + \sum_{k=l_i+1}^{l_{i+1}} a_k^{+} \leqslant b + a_{l_{i+1}}^{+},$$

$$a - a_{r_{i+1}}^{-} \leqslant \sum_{j=0}^{i} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^{+} - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^{-} \right) < a.$$

Тогда ясно, что для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=l_j+1}^{l_{j+1}} a_k^{+} - \sum_{k=r_j+1}^{r_{j+1}} a_k^{-} \right) \tag{1.221}$$

нижний и верхний пределы последовательности частичных сумм равны a и b соответственно. Это же верно и для ряда (1.221) с вычеркнутыми нулями и раскрытыми скобками, так как его частичные суммы монотонно изменяются между частичными суммами ряда (1.221).

Если $b \leqslant 0$, то рассуждение такое же, только сначала начнем набирать отрицательные слагаемые.

Рекомендуем самостоятельно провести доказательство для случая, когда одно из a и b (или оба) бесконечны. □

Следствие 1.7. *Если числовой ряд сходится условно, то для любого $a \in \mathbb{R}$ существует перестановка этого ряда, сходящаяся к a.*

Умножение рядов

Если заданы два ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, то можно составить их формальное произведение

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j. \tag{1.222}$$

Для придания смысла такому обозначению надо указать, как образуются частичные суммы ряда (1.222).

Слагаемые в этом ряде можно располагать различным способом. Примером может служить ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \tag{1.223}$$

с произвольным упорядочиванием во внутренней сумме. Тогда частичная сумма этого ряда с номером $n(n+1)/2$ является суммой всех произведений $a_i b_j$, для которых $i + j \leqslant n$.

Другой часто встречающийся способ упорядочивания (квадратный) дает частные суммы с номерами n^2 вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.224}$$

Однако порядок слагаемых может оказать влияние как на его сходимость, так и на величину суммы ряда. Это вытекает из теоремы 1.117.

Следующая теорема показывает, что для абсолютно сходящихся рядов порядок слагаемых в ряде (1.222) безразличен.

Теорема 1.118 (Коши об умножении рядов). *Если ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся абсолютно, то их произведение (1.222) также сходится абсолютно и его сумма равна произведению сумм этих рядов.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = A', \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_j = B, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| = B'. \tag{1.225}$$

Рассмотрим ряд из произведений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i(k)} b_{j(k)}, \tag{1.226}$$

расположенных в произвольно заданном порядке, и докажем его абсолютную сходимость. Для этого введем частичные суммы

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \left| a_{i(k)} b_{j(k)} \right|$$

и обозначим

$$p_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} i(k), \quad q_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} j(k).$$

Тогда ясно, что

$$H_n \leqslant \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{q_n} \left| a_{i(k)} b_{j(k)} \right| = \sum_{i=1}^{p_n} \left| a_{i(k)} \right| \sum_{j=1}^{q_n} \left| b_{j(k)} \right| \leqslant A'B'$$

и ряд (1.226) из произведений сходится абсолютно. По теореме 1.116 его сумма не зависит от порядка следования слагаемых.

При «квадратном» порядке его слагаемых (1.224) частичные суммы с номерами n^2 равны

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \to AB, \quad n \to \infty.$$

Поэтому в таком (а значит, и в любом) порядке ряд из произведений (1.226) сходится к произведению сумм. □

Бесконечные произведения

Подобно теории рядов (бесконечных сумм) можно развить и соответствующую теорию **бесконечных произведений**

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k > 0. \tag{1.227}$$

Говорят, что бесконечное произведение (1.227) сходится к числу P, если существует отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0, \quad \text{где} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k, \tag{1.228}$$

последовательности его частичных произведений $\{P_n\}$. Если же такой предел не существует или равен нулю, то говорят, что (1.227) расходится.

В значительной степени эта теория может быть выведена из теории рядов. Ограничимся несколькими утверждениями, которые предлагается доказать самостоятельно.

Упражнение 1.46. Доказать следующие утверждения:

1) для сходимости бесконечного произведения (1.227) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k;$$

2) если $p_k = 1 + a_k$ и $a_k > 0$ (или $a_k < 0$) для всех $k \in \mathbb{N}$, то сходимость произведения (1.227) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k; \tag{1.229}$$

3) для расходимости произведения (1.227) к нулю необходимо и достаточно, чтобы ряд (1.229) расходился к $-\infty$.

Рассмотрим пример использования бесконечных произведений. Пусть $\{p_k\}$ — возрастающая последовательность всех простых чисел, т. е.

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \ldots .$$

Для $x > 1$ и $N \in \mathbb{N}$ запишем по формуле суммы геометрической прогрессии

$$\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{mx}}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

и перемножим эти равенства:

$$\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)^{-1} = (*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + (*) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \tag{1.230}$$

Здесь была использована теорема 1.118 об умножении рядов. Кроме того, знак «$(*)$» перед суммой означает, что суммирование в ней распространяется на те натуральные числа, которые в своем разложении на простые множители содержат только $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Отсюда вытекают неравенства

$$0 < \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)^{-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ сходится при $x > 1$.

Таким образом, мы доказали равенство

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)^{-1}, \quad x > 1.$$

Функция $x \mapsto \zeta(x)$, $x > 1$, называется **дзета-функцией Римана**. Она играет важную роль в теории чисел.

Из равенства (1.230) при $x = 1$ получим

$$\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

поэтому произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$$

расходится. Отсюда и из упражнения 1.46 вытекает расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

из величин, обратных простым числам. Это утверждение существенно сильнее расходимости гармонического ряда.

1.10. Функциональные ряды

1.10.1. Равномерная сходимость

Пусть $D \subset \mathbb{R}$ и $f_n : D \to \mathbb{R}$ — последовательность функций на D. Предположим, что предел существует на D, т. е.

$$\forall\, x \in D \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_{\varepsilon,x} \quad \forall\, n \geqslant N_{\varepsilon,x} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.231}$$

Это условие называют обычно поточечной сходимостью (на D) последовательности функций f_n.

В этой главе будет рассматриваться следующий вопрос. В какой мере свойства элементов последовательности $\{f_n\}$ (непрерывность, дифференцируемость и т. д.) будут наследоваться ее пределом f?

В индексах у $N_{\varepsilon,x}$ отражается зависимость этого номера как от $\varepsilon > 0$, так и от $x \in D$. Сконцентрируем сейчас внимание на зависимости $N_{\varepsilon,x}$ от $x \in D$, так как ее обсуждение скоро станет принципиальным.

Предел последовательности дифференцируемых функций может оказаться недифференцируемой и даже разрывной функцией. Это показывает уже такой простой пример последовательности функций, как

$$f_n(x) = (1 - x^2)^n, \quad x \in [-1, 1].$$

Каждая из функций этой последовательности имеет производные любого порядка на $[-1, 1]$. Однако предельная функция

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке 0.

Поэтому необходимо налагать какие-то дополнительные условия, обеспечивающие сохранение тех или иных свойств элементов функциональной последовательности.

Определение равномерной сходимости

Рассмотрим новое понятие, играющее важную роль в различных задачах математического анализа, в частности при изучении вопроса о том, когда предел последовательности функций наследует такие структурные свойства функций последовательности, как непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Определение 1.120. *Последовательность функций $\{f_n\}$ называется* ***сходящейся равномерно*** *на множестве D к функции f, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.232}$$

Ряд называется ***сходящимся равномерно*** *на множестве D, если этим свойством обладает последовательность его частичных сумм.*

Замена (1.231) на (1.232) означает устранение зависимости $N_{\varepsilon,x}$ от $x \in D$. В какой-то степени это напоминает переход от непрерывности функции в каждой точке множества к ее равномерной непрерывности на этом множестве.

Теорема 1.119 (критерий Коши). *Следующие условия равносильны:*

1) *последовательность функций $f_n : D \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на множестве D к некоторой функции f;*

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Условие 2) в этой теореме носит название «равномерное условие Коши» на множестве D.

Упражнение 1.47. Доказать, что следующие условия равносильны:

1) последовательность $f_n : D \to \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на множестве D;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$;

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \sup_{x\in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

Перестановка пределов

Покажем сначала роль равномерной сходимости в вопросе о перестановке двух предельных переходов.

Теорема 1.120 (о перестановке пределов). *Пусть $a \in D$ — предельная точка для D и последовательность $f_n : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *f_n сходится к некоторой функции f равномерно в некоторой проколотой окрестности точки a;*

2) *для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$.*

Тогда существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Другими словами, утверждение теоремы означает, что

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Доказательство. Запишем условие равномерной сходимости f_n в окрестности U_a° (см. утверждение 2) теоремы 1.119)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad \forall\, x \in U_a^\circ \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

и перейдем в последнем неравенстве к пределу при $x \to a$, получая

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |b_n - b_m| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда по критерию Коши для числовых последовательностей (см. теорему 1.9) следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Зафиксируем теперь n таким образом, чтобы

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad x \in U_a^\circ,$$

и при таком n выберем окрестность V_a так, что

$$|f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad x \in V_a^\circ.$$

В итоге получим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, V_a \quad \forall\, x \in V_a^\circ \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

а это и означает требуемое. □

Признаки равномерной сходимости рядов

В п. 1.10.2 будут рассмотрены важнейшие приложения теоремы 1.120 к вопросу о функциональных свойствах предела последовательности и суммы ряда. Остановимся на достаточных условиях равномерной сходимости ряда, в которых D — произвольное множество.

Теорема 1.121 (признак Вейерштрасса). *Если последовательности чисел $a_k \geqslant 0$ и функций $f_k : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям*

1) $|f_k(x)| \leqslant a_k$ $(x \in D,\ k \in \mathbb{N})$;

2) ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k$ сходится,

то ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ сходится равномерно на D.

Доказательство следует непосредственно из упражнений 1.43 и 1.47. □

Отметим, что $a_k = \sup_{x\in D} |f_k(x)|$ — наименьшая последовательность, для которой выполнено первое условие признака Вейерштрасса. Отсюда следует более простая формулировка признака Вейерштрасса: если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \sup_{x\in D} |f_k(x)|,$$

то ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ сходится равномерно на множестве D.

Теорема 1.122 (признак Дирихле). *Пусть последовательности чисел a_k и функций $f_k : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_k \downarrow 0$;

2) $\exists\, M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in D \qquad \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant M.$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ *сходится равномерно на* D.

Доказательство вытекает из теоремы 1.114 и упражнения 1.47. □

Аналогично из упражнения 1.47 и теоремы 1.115 получим следующее утверждение.

Теорема 1.123 (признак Абеля). *Пусть последовательности* $a_k \subset \mathbb{R}$ *и* $f_k : D \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\{a_k\}$ *монотонна и ограничена,* $a_k \geqslant 0$;

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* D.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ *сходится равномерно на* D.

1.10.2. Функциональные свойства предела последовательности и суммы ряда

Непрерывность

Теорема 1.124. *Если последовательность функций* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *сходится к функции* $f : D \to \mathbb{R}$ *равномерно в некоторой окрестности точки* $a \in D$ *и все функции* f_n *непрерывны в этой точке, то и* f *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 1.120. □

Ниже используется обозначение $C(D)$ для класса всех функций, непрерывных на множестве D (см. определение 1.53).

Следствие 1.8. *Если последовательность* $\{f_n\} \subset C(D)$ *сходится равномерно на* D *к функции* $f : D \to \mathbb{R}$, *то* $f \in C(D)$.

Следствие 1.9. *Если последовательность* $\{f_k\} \subset C(D)$ *и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1.233}$$

сходится равномерно на D, *то его сумма непрерывна на* D.

Это перевод следствия 1.8 на язык рядов.

Утверждение, обратное к следствию 1.8, неверно — предел последовательности непрерывных функций может быть непрерывным, но ее сходимость не является равномерной. Рассмотрим последовательность функций

$f_n(x) = nx^n(1-x)$, $x \in [0,1]$. Ясно, что она сходится в каждой точке к нулю. Однако

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \geqslant f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}.$$

Тем не менее обратное утверждение справедливо, но при дополнительном требовании регулярности поведения последовательности.

Теорема 1.125 (Дини). *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $f, f_n \in C([a,b])$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$*;*
2) $f_n(x)$ *возрастает к* $f(x)$ *при любом* $x \in [a,b]$*.*
Тогда последовательность $\{f_n\}$ *сходится к* f *равномерно на* $[a,b]$*.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \exists\, n_{\varepsilon,x} \quad f(x) - f_{n_{\varepsilon,x}}(x) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности разности $f - f_{n_{\varepsilon,x}}$

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \exists\, U_x \quad \forall\, t \in U_x \quad f(t) - f_{n_{\varepsilon,x}}(t) < \varepsilon.$$

По лемме 1.8 из открытого покрытия $\{U_x\}_{x\in[a,b]}$ отрезка $[a,b]$ можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}$. Положим

$$N_\varepsilon = \max\left\{n_{\varepsilon,x_1}, \ldots, n_{\varepsilon,x_m}\right\}.$$

Тогда при $n \geqslant N_\varepsilon$ и $x \in [a,b]$

$$f(x) - f_n(x) \leqslant f(x) - f_{N_\varepsilon}(x) \leqslant f(x) - f_{n_{\varepsilon,x_i}}(x) < \varepsilon$$

(индекс i определяется условием $x \in U_{x_i}$) и $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на $[a,b]$. □

Следствие 1.10. *Если ряд* (1.233)*, где* $f_k \in C[a,b]$*,* $f_k(x) \geqslant 0$*, сходится на* $[a,b]$ *к функции* $f \in C[a,b]$*, то он сходится равномерно на* $[a,b]$*.*

Из доказательства теоремы 1.125 видно, что она сохраняет силу, если в ней отрезок $[a,b]$ заменить на любое компактное подмножество в $\mathbb{R}$ или даже на любое компактное метрическое пространство.

Интегрирование

Напомним, что $R[a,b]$ обозначает класс функций, интегрируемых по Риману на $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 1.126. *Пусть* $\{f_n\} \subset R[a,b]$ *и* $\{f_n\}$ *сходится к функции* f *равномерно на* $[a,b]$*. Тогда* $f \in R[a,b]$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство проведем с помощью критерия интегрируемости (теорема 1.68, см. также (1.111)).

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Зафиксировав такое n, по теореме 1.68 найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\,(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого разбиения $\Pi : a = x_0 < x_1 < \ \ldots < x_m = b$ отрезка $[a,b]$ с $\lambda_\Pi < \delta$. Тогда для всех таких разбиений

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2\sum_{k=1}^{m} \sup_x |f_n(x) - f(x)|\,(x_k - x_{k-1}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \omega_k(f_n)\,(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2(b-a)\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Опять применяя теорему 1.68, получим $f \in R[a,b]$.

Далее по теореме 1.73

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \sup_x |f_n(x) - f(x)|\,(b-a) \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \square$$

Следующая теорема — перевод теоремы 1.126 на язык рядов.

Теорема 1.127. *Пусть $\{f_k\} \subset R[a,b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда его сумма интегрируема на $[a,b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$ сходится и справедливо равенство*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Доказательство проведите самостоятельно.

Дифференцирование

Теорема 1.128. *Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *все функции f_n дифференцируемы на $[a,b]$;*
2) *$f_n(x_0)$ сходится для некоторого $x_0 \in [a,b]$;*

3) f_n' *сходится равномерно на* $[a,b]$.

Тогда f_n *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к дифференцируемой функции* f *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x), \quad x \in [a,b].$$

Доказательство. Сначала докажем равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$, опираясь на критерий Коши (теорема 1.119):

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |[f_n(x) - f_n(x_0)] - [f_m(x) - f_m(x_0)] + [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| \leqslant$$
$$\leqslant |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| =$$
$$= |f_n'(\xi_{nm}) - f_m'(\xi_{nm})| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|\,,$$

где $\xi_{nm} \in (a,b)$ (здесь к функции $f_n - f_m$ на отрезке $[x_0, x]^*$ была применена теорема 1.48). Отсюда и из условий 2) и 3) получим равномерную сходимость $f_n(x)$.

Далее при фиксированном $x \in [a,b]$ рассмотрим последовательность

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h},$$

которая сходится равномерно на множестве $h \in [a-x, b-x] \setminus \{0\}$. Это следует из условия 3) теоремы и соотношений

$$|\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| = |f_n'(x + \theta_{nm}h) - f_m'(x + \theta_{nm}h)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - f_m'(t)|\,,$$

где $\theta_{nm} \in (0,1)$ (здесь снова использовалась теорема 1.48). Кроме того, $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_n(h) = f_n'(x)$. Следовательно, по теореме 1.120 о перестановке пределов

$$\lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \varphi_n(h)$$

или

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \quad \square$$

Теорема 1.129. *Пусть последовательность* $\{f_k\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *все функции* f_k *дифференцируемы на* $[a,b]$*;*

2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ *сходится для некоторого* $x_0 \in [a,b]$*;*

3) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$, *его сумма дифференцируема на* $[a,b]$ *и для* $x \in [a,b]$ *справедливо равенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Это перевод теоремы 1.128 на язык рядов, докажите ее самостоятельно.

1.10.3. Степенные ряды

Радиус и интервал сходимости

Определение 1.121. ***Степенным рядом*** *с коэффициентами* $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ *и центром в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ *называется ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k . \tag{1.234}$$

Такие ряды уже рассматривались в теореме 1.56, где речь шла о рядах Тейлора элементарных функций.

Следующая теорема показывает, что множество точек сходимости степенного ряда не может быть произвольным и имеет весьма специфическую структуру.

Теорема 1.130. 1) *Если* $\sqrt[k]{|c_k|}$ *— неограниченная последовательность, то ряд* (1.234) *расходится при всех* $x \neq x_0$.

2) *Если* $\sqrt[k]{|c_k|}$ *ограничена и* $l = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \neq 0$, *то ряд* (1.234) *сходится при всех* x *с* $|x - x_0| < 1/l$ *и расходится при всех* x *с* $|x - x_0| > 1/l$.

3) *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, *то ряд* (1.234) *сходится при любом* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В случае 1) для любого $x \neq x_0$ $\sqrt[k]{|c_k|}\,|x| > 1$ для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ и общий член ряда (1.234) не стремится к нулю — не выполнено необходимое условие сходимости ряда (см. упражнение 1.43).

В случае 2) при $|x - x_0| < 1/l$ применим к ряду признак Коши с корнем (следствие 1.2). Если же $|x - x_0| > 1/l$, то (как и в случае 1)) не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Наконец, в случае 3) при любом $x \in \mathbb{R}$ по признаку Коши с корнем ряд (1.234) сходится. □

Теперь естественно ввести следующее понятие.

Определение 1.122. *Число* $R \in \mathbb{R}$ *называется* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда* (1.234), *если этот ряд сходится при всех* x *с* $|x - x_0| < R$ *и расходится при всех* x *с* $|x - x_0| > R$.

Если ряд (1.234) *сходится только при* $x = x_0$, *то считаем* $R = 0$, *а если* (1.234) *сходится при любом* $x \in \mathbb{R}$, *то считаем* $R = \infty$.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ *называется* ***интервалом сходимости*** *степенного ряда.*

Теорема 1.130 доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} \tag{1.235}$$

(считаем здесь $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$). Равенство (1.235) называется **формулой Коши – Адамара**.

Отметим, что на концах интервала сходимости (при $x = x_0 \pm R$) может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда (1.234). Это можно продемонстрировать следующими примерами:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Интервалом сходимости во всех случаях будет $(-1, 1)$. Для первого из рядов на обоих концах интервала сходимости ± 1 степенной ряд расходится, для второго — сходится. Наконец, в третьем случае при $x = -1$ ряд сходится, а при $x = 1$ — расходится.

Свойства суммы степенного ряда

Сумма сходящегося степенного ряда обладает замечательными свойствами, которые отсутствуют, вообще говоря, у общих функциональных рядов. Этот эффект рассматривается здесь лишь кратко. Его систематическое изучение проводится в дисциплине «Теория функций комплексного переменного».

Теорема 1.131. *Пусть для ряда* (1.234) $R > 0$. *Тогда для любого* $r \in (0, R)$ *ряд* (1.234) *сходится равномерно на отрезке* $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Доказательство. Пусть $r_1 = (R + r)/2 < R$, тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r_1^k$ сходится и $|c_k| \, r_1^k \leqslant M$ для некоторого $M > 0$ и всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$\left| c_k \left(x - x_0\right)^k \right| \leqslant |c_k| \, r^k = |c_k| \, r_1^k \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \leqslant M \left(\frac{2r}{R + r}\right)^k$$

и по признаку Вейерштрасса (теорема 1.121) ряд (1.234) сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. $\square$

Теорема 1.132. *Пусть степенной ряд* (1.234) *имеет положительный радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда его сумма* f *на интервале сходимости* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *имеет производные любого порядка и для коэффициентов ряда справедливы равенства*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots\,. \tag{1.236}$$

Доказательство. Отметим сначала, что при формальном почленном дифференцировании степенного ряда его радиус не меняется (так как $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{k} = 1$).

Поэтому на каждом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, где $r \in (0, R)$, можно применить теорему 1.129 (ее условия выполнены по теореме 1.131), из которой вытекает как дифференцируемость суммы ряда f на $(x_0 - R, x_0 + R)$, так и равенства

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n}, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)\,,$$

для ее производных. Полагая в них $x = x_0$, получим формулы (1.236). $\square$

Аналитические функции

Утверждение теоремы 1.132 можно переформулировать так: сумма степенного ряда (1.234) с ненулевым радиусом сходимости бесконечно дифференцируема на интервале сходимости. В таком случае ряд (1.234) имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{1.237}$$

и его естественно назвать **рядом Тейлора** функции f.

В связи с этим введем новое понятие. Будем говорить, что функция f **аналитична** в точке x_0, если она является суммой степенного ряда (1.234) с положительным радиусом сходимости.

Для того чтобы записать ряд Тейлора (1.237) функции f, достаточно потребовать существования у функции f производных любого порядка в некоторой окрестности точки x_0. Возникает следующий вопрос: обязан ли этот ряд сходиться к $f(x)$? Ответ отрицателен. Покажем это с помощью функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{1.238}$$

уже встречавшейся в упражнении 1.16. Нетрудно убедиться, что эта функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Для $x \neq 0$ это очевидно, а для $x = 0$ следует из равенства

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Аналогично проверяем, что наша функция дифференцируема в каждой точке. Конечно, опять достаточно проверить дифференцируемость в точке $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0.$$

Продолжая этот процесс, убедимся, что функция имеет производные любого порядка в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, причем $f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k = 0, 1, \dots$.

Таким образом, ряд Тейлора для нашей функции с центром в точке $x = 0$ является рядом из нулей, который сходится к нулю при любом $x \in \mathbb{R}$. Однако его сумма совпадает с $f(x)$ только при $x = 0$.

Теорема Абеля

В следующей теореме используется обозначение, введенное в (1.11).

Теорема 1.133 (Абеля). *Если степенной ряд (1.234) сходится в точке $x = t$, то его сумма непрерывна на отрезке $[x_0, t]^*$.*

Доказательство. Считаем, что $t - x_0 > 0$ (случай $t - x_0 < 0$ сводится к этому с помощью замены $x \to -x$). Для доказательства используем метод доказательства признака Дирихле (см. теорему 1.114), основанный на преобразовании Абеля (1.211) (см. также (1.212)):

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{i=m}^{n} b_i - a_{m+1} b_m + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=m}^{k} b_i,$$

где

$$a_k = \left(\frac{x - x_0}{t - x_0} \right)^k, \quad b_k = c_k \left(t - x_0 \right)^k, \quad x \in [x_0, t].$$

В этих обозначениях

$$\sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^k = \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{x - x_0}{t - x_0} \right)^k c_k \left(t - x_0 \right)^k = \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k.$$

Так как a_k убывают при каждом x, то

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^k \right| \leqslant a_n \left| \sum_{i=m}^{n} b_i \right| + a_{m+1} \left| b_m \right| + \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \left| \sum_{i=m}^{k} b_i \right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что $\left|\sum_{i=m}^{n} b_i\right| < \varepsilon/3$ при всех $n > m \geqslant N_\varepsilon$. Отсюда и из того, что $\sup_{x \in [x_0, t]} a_k \leqslant 1$, получим

$$\sup_{x \in [x_0, t]} \left| \sum_{k=m+1}^{n} c_k (x - x_0)^k \right| < \varepsilon \quad (n > m \geqslant N_\varepsilon).$$

Это доказывает равномерную сходимость ряда (1.234) на $[x_0, t]^*$. Непрерывность его суммы на этом отрезке вытекает из следствия 1.9. $\square$

Теорема 1.133 представляет интерес только в случаях, когда $t = x_0 \pm R$. При $|t - x_0| < R$) непрерывность суммы ряда следует из теоремы 1.132. Для остальных t, т. е. $|t - x_0| > R$, ряд (1.234) не может сходиться в точке t.

Укажем конкретный пример применения теоремы Абеля. Рассмотрим ряд Тейлора логарифмической функции (см. теорему 1.56):

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k, \quad |x| < 1.$$

Из следствия 1.6 видно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}/k$ сходится. Из теоремы Абеля вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

1.10.4. Пространство непрерывных функций

C как нормированное пространство

Определение 1.123. *Класс всех непрерывных функций $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется* ***пространством непрерывных функций*** *на $[a,b]$ и обозначается $C[a,b]$.*

Легко проверить, что $C[a,b]$ является векторным пространством относительно естественных поточечных операций сложения функций

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

и умножения их на числа

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Точно так же нетрудно установить, что

$$\|f\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{1.239}$$

определяет норму на $C[a,b]$ и оно становится нормированным, следовательно, и метрическим пространством (см. (1.143)), которое является также полным (см. определение 1.82). Последнее вытекает из равномерного критерия Коши (теорема 1.119). Сходимость в этом пространстве совпадает с равномерной сходимостью (см. упражнение 1.47).

Однако это нормированное пространство существенно отличается от евклидовых пространств, которые использовались ранее, следующим обстоятельством: в нем существуют бесконечные линейно независимые системы. Примером может служить система степеней

$$1, x, x^2, \ldots .$$

Действительно, если некоторая конечная линейная комбинация элементов этой системы тождественно равна нулю (нулю векторного пространства $C[a,b]$), т. е.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

для всех $x \in [a,b]$, то все коэффициенты a_k этой линейной комбинации равны нулю. Это следует из того, что количество корней алгебраического многочлена не больше его степени.

Приближение функций многочленами

Далее рассматриваются некоторые интересные свойства пространства $C[a,b]$. Для простоты ограничимся случаем отрезка $[0,1]$.

Произвольная непрерывная функция представляется весьма общим объектом. Поэтому удивительным кажется то, что график любой такой функции можно сколь угодно точно имитировать графиком некоторого алгебраического многочлена. Точная формулировка этого факта приводится в следующей теореме, которая имеет многочисленные применения в различных областях анализа.

Теорема 1.134 (Вейерштрасса). *Для любой функции $f \in C[0,1]$ существует последовательность алгебраических многочленов p_n, сходящаяся к f равномерно на $[0,1]$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p_n(x)| = 0.$$

Доказательство. Сначала будем дополнительно предполагать, что $f(0) = f(1) = 0$. Доопределим функцию f вне отрезка $[0,1]$ равной нулю. Тогда продолженная функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пусть $q_n(x) = c_n \left(1 - x^2\right)^n$, где постоянная c_n выбрана так, чтобы

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)\,dx = 1.$$

Оценим сверху c_n:

$$1 = \int_{-1}^{1} q_n(x)\,dx = c_n \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^n\,dx \geqslant 2c_n \int_{0}^{1} (1-x)^n\,dx \geqslant \frac{c_n}{n},$$

следовательно, $c_n \leqslant n$.

Положим

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) q_n(t)\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) q_n(t)\,dt = \int_{0}^{1} f(t) q_n(t-x)\,dt.$$

Легко проверить, что последнее выражение — алгебраический многочлен порядка $2n$. Для этого достаточно в явном виде выписать многочлен q_n и выполнить возведение в степень по формуле бинома Ньютона.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta \in (0,1)$ так, чтобы из $|x-y| < \delta$ следовало $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$ (это возможно по теореме Кантора 1.36). Пусть еще $M = \sup f([0,1])$. Тогда

$$|f(x)-p_n(x)| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x)-f(x+t)|\, q_n(t)\, dt = \int_{|t|<\delta} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant 1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt + 4Mc_n\left(1-\delta^2\right)^n < \frac{\varepsilon}{2} + 4Mn\left(1-\delta^2\right)^n < \varepsilon$$

при достаточно больших n.

Чтобы избавиться от предположения $f(0) = f(1) = 0$, рассмотрим новую функцию

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1)-f(0)],$$

которая удовлетворяет этому дополнительному предположению. По доказанному найдем последовательность полиномов p_n, равномерно сходящуюся к функции g. Тогда последовательность полиномов $p_n(x)+f(0)+x[f(1)-f(0)]$ сходится равномерно к f. $\square$

Нигде не дифференцируемые функции

Приведем пример непрерывной функции, которая не имеет производной ни в одной точке. Первые функции такого рода были построены Больцано и Вейерштрассом. Рассматриваемый пример принадлежит Ван дер Вардену.

Пусть $\varphi(x) = |x|$ при $|x| \leqslant 1/2$. Продолжим эту функцию 1-периодически на $\mathbb{R}$ и положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\varphi(4^k x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Так как $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1/2$, по признаку Вейерштрасса (теорема 1.121) ряд сходится равномерно и по следствию 1.9 его сумма принадлежит $C(\mathbb{R})$.

Покажем, что f не имеет производной ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$. Для этого возьмем произвольно $n \in \mathbb{N}$ и найдем число $h_n = \pm 4^{-n-1}$ так, чтобы

$$\left|f_n\left(x+h_n\right) - f_n\left(x\right)\right| = \left|h_n\right|.$$

Тогда

$$\left|f_k\left(x+h_n\right) - f_k\left(x\right)\right| = \begin{cases} \left|h_n\right|, & k = 0, \ldots, n, \\ 0, & k = n+1, \ldots, \end{cases}$$

отсюда следует, что

$$\frac{f\left(x+h_n\right)-f\left(x\right)}{h_n}=\sum_{k=0}^{n}\pm 1.$$

Последняя сумма — число той же четности, что и $n+1$, поэтому отношение слева не имеет предела.

1.11. Ряды Фурье

1.11.1. Ряды Фурье по тригонометрической системе

В XVIII–XIX вв. при исследовании некоторых уравнений в частных производных, описывающих физические процессы окружающего мира (например, уравнение колебания струны или уравнение теплопроводности), возникла необходимость разложения функций в ряды по специальным системам функций — косинусов и синусов кратных дуг — в так называемые ряды Фурье. В какой-то степени такие разложения напоминают представления элементов по базисам в конечномерных векторных пространствах.

В результате развития такой проблематики появилось новое направление в математике — гармонический анализ, который является в настоящее время одной из ее центральных ветвей. В связи с этим необходимо упомянуть имена таких выдающихся математиков, как Дирихле, Коши, Риман, Кантор, Лебег.

Проблемы, возникающие при изучении сходимости гармонических разложений, потребовали тщательного пересмотра важнейших математических понятий, таких как множество, функция и т. д.

В этой главе будут изложены некоторые первичные понятия гармонического анализа. Внимание будет сосредоточено на классических вопросах сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе. Кроме того, будет кратко рассмотрена также ортогональная система Хаара.

Тригонометрическая система

Все рассматриваемые функции будем считать заданными на отрезке $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ и продолженными с периодом 2π на все множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Отметим, что свойство непрерывности при таком продолжении может нарушиться, поэтому сейчас вместо класса $C[-\pi, \pi]$ более естественно рассматривать класс

$$C_{2\pi} := \{f \in C[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}, \tag{1.240}$$

элементы которого — 2π-периодические функции, непрерывные на $\mathbb{R}$. Последовательность функций

$$\{1,\ \cos kx,\ \sin kx\}_{k=1}^{\infty} \subset C_{2\pi}$$

называется **тригонометрической системой**.

Лемма 1.37. *Тригонометрическая система ортогональна — это означает, что интеграл по $\mathbb{T}$ от произведения любых двух различных функций системы равен нулю.*

Доказательство сводится к простому вычислению интегралов. Отметим также, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi.$$

Тригонометрические ряды

Тригонометрическим рядом будем называть ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.241}$$

где a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ и b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — некоторые действительные числа, которые называются коэффициентами ряда (1.241).

Если предположить, что ряд (1.241) сходится равномерно на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ (или на любом другом отрезке длины 2π), по следствию 1.8 его сумма f является непрерывной функцией. Умножая обе части равенства

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

на $\cos nx$ или на $\sin nx$ и интегрируя полученное равенство почленно (что обеспечивается теоремой 1.126), получим, что его коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.242}$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) \sin kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.243}$$

которые называются **формулами Фурье**.

Ряд

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx, \tag{1.244}$$

коэффициенты которого заданы формулами (1.242), (1.243), можно записать для любой интегрируемой функции $f \in R(\mathbb{T})$, не делая предположений о его сходимости. Этот ряд называется **рядом Фурье** функции f, а числа $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — **коэффициентами Фурье** функции f.

Ряды Фурье четных и нечетных функций

Упражнение 1.48. Доказать следующие утверждения:
1) Если $f \in R(\mathbb{T})$ — четная функция, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$$

и коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

2) Если функция $f \in R(\mathbb{T})$ нечетна, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

и коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Лемма 1.38. *Пусть*

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и функция f_0 2π-периодична. Тогда ряд Фурье для f_0 имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$.

Существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant c, \quad n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.245}$$

Доказательство. Первая часть проверяется непосредственными вычислениями. Для доказательства неравенства (1.245) достаточно рассмотреть $x \in (0, \pi)$ (f_0 — нечетная функция). Для такого x найдем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{\pi}{m+1} < x \leqslant \frac{\pi}{m}.$$

Если $n \leqslant m$, то

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin kx|}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{k} = nx \leqslant mx \leqslant \pi.$$

Если же $n \geqslant m$, то разобьем сумму на две:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k},$$

первая из которых оценивается, как и в предыдущем абзаце. Вторая из них оценивается сверху величиной $\dfrac{2}{m+1}\dfrac{\pi}{x} \leqslant 2$ в силу неравенства (1.213) и очевидной оценки $|\widetilde{D}_n(x)| \leqslant \pi/x$ для сопряженного ядра Дирихле (1.215). □

Интегральное представление для частных сумм

Рассмотрим вопросы равномерной сходимости и сходимости в точке для ряда Фурье. Для этого более подробно изучим частные суммы ряда Фурье, которые понимаются как

$$S_n f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \tag{1.246}$$

(под знаком суммы находятся оба слагаемых, но сложилась традиция не ставить скобки, показывающие это). Для начала получим так называемое интегральное представление для сумм (1.246).

Лемма 1.39. *Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(y) D_n(x-y)\,dy, \tag{1.247}$$

где функция D_n определяется равенством

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{1.248}$$

Доказательство. Подставляя формулы Фурье (1.242), (1.243) в выражение для сумм Фурье (1.246), а также используя равенство (1.214), получим утверждение леммы. □

Функция (1.248) называется n-м **ядром Дирихле**. Она уже встречалась при изучении условной сходимости рядов (см. (1.214)).

Ступенчатые функции и модули непрерывности

Рассмотрим некоторые технические средства, которые бывают полезными и во многих задачах математики.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда точки $x_k = -\pi + 2\pi k/n$ $(k = 0, \ldots, n)$ разбивают отрезок $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ на n равных частей. Если заданы еще числа $A_1, \ldots, A_n$, то функцию вида

$$g_n(x) \equiv A_k \quad \text{при} \quad x \in [x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.249}$$

будем называть **ступенчатой**.

Лемма 1.40. *Для любой функции $f \in R(\mathbb{T})$ существует такая последовательность ступенчатых функций $\{g_n\}$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x) - g_n(x)|\, dx = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и в (1.249) возьмем $A_k = f(x_k)$. Пусть ω_k — колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x) - g_n(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_k)|\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k (x_k - x_{k-1}).$$

Предел последнего выражения при $n \to \infty$ равен нулю в силу критерия интегрируемости (см. теорему 1.68 и (1.111)). $\square$

Введем теперь **интегральный модуль непрерывности** функции $f \in R(\mathbb{T})$:

$$\omega_1(h, f) = \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|\, dx, \quad h \in (0, \pi]. \tag{1.250}$$

Индекс единица в обозначении ω_1 используется для того, чтобы отличить интегральный модуль непрерывности (1.250) от модуля непрерывности $\omega(h, f)$, введенного ранее равенством (1.48).

Интегральный модуль непрерывности $\omega_1(h, f)$ играет роль, сходную с той, которую выполнял $\omega(h, f)$. Отличие состоит в том, что $\omega_1(h, f)$ оценивает непрерывность f «в среднем».

Лемма 1.41. *Для любой функции $f \in R(\mathbb{T})$*

$$\lim_{h\to 0} \omega_1(h, f) = 0. \tag{1.251}$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение леммы для любой ступенчатой функции вида (1.249). Пусть $0 < h < 2\pi/n$, тогда

$$g_n(x+h) \equiv A_{k+1} \quad \text{при} \quad x \in [x_k - h, x_k), \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$g_n(x+h) \equiv A_k \quad \text{при} \quad x \in [x_{k-1}, x_k - h), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |g_n(x+h) - g_n(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_k-h}^{x_k} |A_{k+1} - A_k|\,dx = h \sum_{k=1}^{n} |A_{k+1} - A_k| \to 0$$

при $h \to 0$. Аналогично рассматривается случай отрицательных h.

Теперь докажем утверждение леммы в полном объеме. Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $\varepsilon > 0$. Подберем и зафиксируем ступенчатую функцию g_n так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x) - g_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

и запишем очевидное неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x+h) - g_n(x+h)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{T}} |g_n(x+h) - g_n(x)|\,dx + \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x) - g_n(x)|\,dx.$$

Тогда сумма первого и третьего слагаемых справа будет меньше, чем $\varepsilon/2$ в силу выбора ступенчатой функции g_n, а второе слагаемое справа будет меньше, чем $\varepsilon/2$ для достаточно малых h в силу уже доказанного. $\square$

Обратим внимание на два момента, связанных с леммой 1.41. Во-первых, ее утверждение выражает некоторое новое свойство непрерывности для интегрируемых функций, которое естественно было бы назвать **непрерывностью в среднем**. Во-вторых, доказательство леммы 1.41 проходило по следующей схеме: сначала она доказывалась для достаточно простых функций, а потом из этого уже выводилось утверждение леммы для любой функции. Такой прием часто встречается в математике.

Лемма Римана – Лебега

Далее изучим поведение коэффициентов Фурье.

Лемма 1.42 (Римана – Лебега). *Если $f, g \in R(\mathbb{T})$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\cos ky\,dy = 0$$

равномерно по x.

Доказательство. Докажем утверждение леммы только для синуса, так как для косинуса оно такое же. Отметим очевидное тождество

$$f(x+y)g(y) =$$

$$= \left[f(x+y)g(y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\right] + f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right).$$

Умножим обе части на $\sin ky$ и проинтегрируем по $y \in \mathbb{T}$. Затем выполним сдвиг переменной во втором слагаемом справа, тогда это слагаемое будет отличаться от левой части проинтегрированного равенства лишь знаком. Таким образом, придем к равенству

$$2\int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left[f(x+y)g(y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\right]\sin ky\,dy.$$

Преобразуем выражение под знаком последнего интеграла с помощью тождества

$$f(x+y)g(y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)g\left(y+\frac{\pi}{k}\right) =$$

$$= f(x+y)\left[g(y) - g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\right] + g\left(y+\frac{\pi}{k}\right)\left[f\,(x+y) - f\left(x+y+\frac{\pi}{k}\right)\right]$$

и получим неравенство

$$2\left|\int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y)g(y)\sin ky\,dy\right| \leqslant M_f\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, g\right) + M_g\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, f\right). \tag{1.252}$$

Здесь

$$M_f = \sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|, \quad M_g = \sup_{x\in\mathbb{T}}|g(x)|$$

(напомним, что интегрируемая функция ограничена). Нужное утверждение вытекает теперь из леммы 1.41. □

Отметим, что если в неравенстве (1.252) (и аналогичном неравенстве с косинусом) положить $f(x) \equiv 1$, то получим оценки для коэффициентов Фурье:

$$|a_k(g)|, |b_k(g)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{k}, g\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.253}$$

Принцип локализации

Покажем, что сходимость ряда Фурье является локальным свойством функции. Более того, сходимость или расходимость ряда Фурье в некоторой точке определяется лишь поведением функции f в любой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Теорема 1.135 (принцип локализации Римана). *Если $f \in R(\mathbb{T})$, то для любого фиксированного $\delta > 0$*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+y) \frac{\sin ny}{y}\, dy + \varepsilon_n(x), \tag{1.254}$$

где ε_n сходится к нулю равномерно по $x \in \mathbb{T}$ при $n \to \infty$.

В частности, если две функции совпадают на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{T}$, то ряд Фурье их разности сходится к нулю равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Преобразуем ядро Дирихле (1.248) следующим образом:

$$\frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) y}{2 \sin \dfrac{y}{2}} = \frac{\sin ny}{2 \operatorname{tg} \dfrac{y}{2}} + \frac{1}{2} \cos ny.$$

Далее заметим, что функция

$$g(y) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \dfrac{y}{2}} - \frac{1}{y}, \quad g(0) = 0,$$

непрерывна в нуле (это легко установить, например, с помощью правила Лопиталя), поэтому она интегрируема на периоде. Таким образом,

$$\frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) y}{2 \sin \dfrac{y}{2}} = \frac{\sin ny}{y} + g(y) \sin ny + \frac{1}{2} \cos ny,$$

где $g \in R(\mathbb{T})$.

Используем это равенство в интегральном представлении частных сумм ряда Фурье (1.247):

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \frac{\sin ny}{y}\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) g(y) \sin ny\, dy + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos ny\, dy.$$

Два последних интеграла стремятся равномерно к нулю по лемме 1.42 и замечанию после нее.

Наконец, если положить для $\delta > 0$

$$g_\delta(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\delta, \delta), \\ \dfrac{1}{y}, & y \in \mathbb{T} \setminus (-\delta, \delta), \end{cases}$$

то

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\,dy + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+y) g_\delta(y)\sin ny\,dy + \varepsilon_n(x).$$

Так как g_δ — ограниченная функция, то, снова применяя лемму 1.42, получим нужное утверждение. $\square$

Другими словами, утверждение теоремы 1.135 означает, что сходимость или расходимость ряда Фурье функции $f \in R(\mathbb{T})$ в некоторой точке $x \in \mathbb{T}$ зависит лишь от поведения этой функции в сколь угодно малой окрестности точки x. Согласно принятой терминологии сходимость или расходимость ряда Фурье является локальным свойством функции.

1.11.2. Условия сходимости ряда Фурье

Расходящийся ряд Фурье

К сожалению, ряды Фурье могут оказаться расходящимися в некоторых точках, даже если функция непрерывна. Первые примеры такого рода были построены Дюбуа-Реймоном.

Приведем пример непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье, принадлежащий Фейеру. В основе его построения лежит интересная конструкция полиномов Фейера:

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\cos(2m-k)x - \cos(2m+k)x}{k}. \tag{1.255}$$

Для дальнейшего понадобится следующее свойство этих полиномов: существует такая постоянная $c \in \mathbb{R}$, что

$$|Q_m(x)| \leqslant c, \quad m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}. \tag{1.256}$$

Ясно, что

$$Q_m(x) = 2\sin 2mx \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}$$

и (1.256) вытекает из (1.245).

Теорема 1.136 (Дюбуа-Реймона). *Существует функция $f \in C_{2\pi}$, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке.*

Доказательство. Положим $m_k = 3^{k^3}$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{m_k}(x).$$

Из условия (1.256) следует, что этот ряд сходится равномерно к некоторой функции $f \in C_{2\pi}$. Поэтому если в нем раскрыть скобки, то он является рядом Фурье своей суммы. В этом легко убедиться, умножая его на $\cos nx$ и почленно интегрируя.

С другой стороны, из определения полиномов Фейера (1.255) и правого неравенства (1.37) получим, что

$$S_{2m_n-1}f(0) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{2m_n} \frac{1}{k} > \frac{\ln(2m_n)}{n^2} > n\ln 3 \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad \square$$

Условия сходимости ряда Фурье в точке

Теорема 1.136 показывает, что без дополнительных локальных условий ряд Фурье не обязан сходиться. Для нахождения таких условий преобразуем суммы Фурье к еще более удобному виду.

Ниже в различных формулах будет фигурировать число s, роль которого в том, что это будет сумма ряда Фурье в случае его сходимости в некоторой точке x. Совсем не обязательно, что это будет значение функции $f(x)$ — от изменения значения функции в одной точке x сам ряд Фурье и свойство его сходимости не изменятся.

Лемма 1.43. *Если $f \in R(\mathbb{T})$, то для любого фиксированного $\delta > 0$ и любого числа s*

$$S_nf(x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \left[f(x+y) + f(x-y) - 2s\right] \frac{\sin ny}{y}\, dy + \varepsilon_n(x), \qquad (1.257)$$

где ε_n сходится к нулю равномерно на $\mathbb{T}$.

Доказательство. Разобьем интеграл (1.254) на два:

$$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\delta}^{0} + \int_0^{\delta}\right) f(x+y)\frac{\sin ny}{y}\, dy + \varepsilon_n(x),$$

в первом заменим y на $-y$. Тогда в силу четности ядра $\dfrac{\sin ny}{y}$

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\left[f(x+y)+f(x-y)\right]\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n(x).$$

Применив это равенство к функции, тождественно равной s, получим

$$s = \frac{2s}{\pi}\int\limits_0^{\delta}\frac{\sin ny}{y}\,dy + \varepsilon_n'(x),$$

где ε_n' сходится к нулю равномерно на $\mathbb{T}$.

Вычитая полученные соотношения, придем к (1.257). □

Для краткости введем следующее обозначение для функции

$$\varphi_x(y) := f(x+y)+f(x-y)-2s, \quad y\in\mathbb{T}, \tag{1.258}$$

которое будет использоваться ниже.

Теорема 1.137 (признак Дини). *Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{T}$. Если несобственный интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy \tag{1.259}$$

сходится, то ряд Фурье функции f в точке x сходится к s.

Доказательство. Выберем число $0<\eta<\pi$ настолько малым, чтобы

$$\int\limits_0^{\eta}\frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy < \varepsilon,$$

и разобьем интеграл в представлении (1.257) с $\delta=\pi$ на интегралы по промежуткам $[0,\eta]$ и $[\eta,\pi]$:

$$|S_n f(x) - s| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\eta}\frac{|\varphi_x(y)|}{y}\,dy + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{T}}\chi_{(\eta,\pi)}(y)\frac{\varphi_x(y)}{y}\sin ny\,dy\right| + |\varepsilon_n(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + |\varepsilon_n(x)| + \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{\mathbb{T}}\chi_{(\eta,\pi)}(y)\frac{\varphi_x(y)}{y}\sin ny\,dy\right|$$

(определение характеристической функции χ см. в (1.3)). По лемме 1.42 последнее слагаемое сходится к нулю при $n\to\infty$. □

Упражнение 1.49. Условию (1.259) можно придать другую форму. Пусть $f \in R(\mathbb{T})$ и $x \in \mathbb{T}$. Доказать, что условие (1.259) выполнено в каждом из следующих случаев:

1) при некотором $a > 0$ выполнено

$$\varphi_x(y) = O\left(\left(\ln \frac{1}{y}\right)^{-1-a}\right) \quad \text{при} \quad y \to 0;$$

2) при некотором $a > 0$ выполнено $\varphi_x(y) = O\left(|y|^a\right)$ при $y \to +0$;

3) интеграл $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+y)-s}{y}\right| dy$ сходится;

4) при некотором $a > 0$ выполнено

$$f(x+y) - s = O\left(\left(\ln \frac{1}{|y|}\right)^{-1-a}\right) \quad \text{при} \quad y \to 0;$$

5) при некотором $a > 0$ выполнено $f(x+y) - s = O\left(|y|^a\right)$ при $y \to 0$.

Ясно, что существует не более одного числа s, для которого выполнено условие (1.259) (или любое другое условие из упражнения 1.49). Отсюда следует, что при его соблюдении имеется естественное значение функции f в точке x: следует положить $f(x) = s$.

Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Прежде всего отметим, что метод доказательства теоремы 1.137 дает следующий признак равномерной сходимости ряда Фурье.

Теорема 1.138 (признак Дини – Липшица). *Пусть $f \in C_{2\pi}$ и*

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\omega(y, f)}{y}\, dy < \infty, \tag{1.260}$$

то ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{T}$.

Доказательство копирует рассуждения, проведенные при обосновании теоремы 1.137, только теперь все оценки будут равномерными. □

Упражнение 1.50. Пусть $f \in C_{2\pi}$. Доказать, что условие (1.260) выполнено в каждом из следующих случаев:

1) $\omega(h, f) = O\left((-\ln h)^{-1-a}\right)$ при некотором $a > 0$;

2) $\omega(h, f) = O\left(h^a\right)$ при некотором $0 < a \leqslant 1$ (т. е. $f \in H^a$, класс Гельдера H^a определен в (1.49)).

В связи с теоремой Дини – Липшица отметим, что Лебег доказал окончательный вариант утверждений такого рода. Именно условие

$$\omega(h, f) = o\left(\left(\ln \frac{1}{h}\right)^{-1}\right) \quad \text{при} \quad h \to +0$$

обеспечивает равномерную сходимость ряда Фурье функции f, а условие

$$\omega(h, f) = O\left(\left(\ln \frac{1}{h}\right)^{-1}\right) \quad \text{при} \quad h \to +0$$

уже не обеспечивает. Доказательство этого выходит за рамки данного пособия.

Упражнение 1.51. Теореме 1.138 можно придать локальный характер. Для отрезка $I := [a, b] \subset \mathbb{T}$ определим **локальный модуль непрерывности**

$$\omega_I(\delta, f) := \sup\left\{|f(x_1) - f(x_2)| : |x_1 - x_2| < \delta, \quad x_1, x_2 \in I\right\}.$$

Доказать, что если несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{\omega_I(y, f)}{y}\, dy < \infty$$

сходится, то ряд Фурье функции $f \in R(\mathbb{T})$ сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Признак Жордана

В следующей теореме содержатся условия другого сорта для сходимости и для равномерной сходимости рядов Фурье.

Теорема 1.139 (Жордана). *Если функция $f \in R(\mathbb{T})$ монотонна на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{T}$, то ряд Фурье для f сходится всюду на интервале (a, b) к $f(x)$ в точках непрерывности и к $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ в точках разрыва.*

Если дополнительно $f \in C[a, b]$, то ряд Фурье сходится к f равномерно на $[a', b']$, где $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство. Рассмотрим случай возрастающей функции. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ выбрано так, чтобы $x \pm \delta \in (a, b)$ и $|f(x + y) - f(x + 0)| < \varepsilon$ при $0 < y \leqslant \delta$. Положим $s = [f(x + 0) + f(x - 0)]/2$, тогда

$$f(x + y) + f(x - y) - 2s = \big[f(x + y) - f(x + 0)\big] + \big[f(x - y) - f(x - 0)\big].$$

В соответствии с этим интеграл в (1.257) (с выбранным δ) распадается на два слагаемых. Оценим первое из них:

$$\int\limits_0^\delta [f(x+y)-f(x+0)]\,\frac{\sin ny}{y}\,dy.$$

Так как функция $y \mapsto f(x+y)-f(x+0)$ возрастает, то по формулам Бонне (теорема 1.76)

$$\int\limits_0^\delta [f(x+y)-f(x+0)]\,\frac{\sin ny}{y}\,dy = [f(x+\delta)-f(x+0)]\int\limits_\xi^\delta \frac{\sin ny}{y}\,dy,$$

где $0<\xi<\delta$. Но так как

$$\left|\int\limits_\xi^\delta \frac{\sin ny}{y}\,dy\right| \leqslant \pi$$

(это легко проверить интегрированием по частям), то

$$\left|\int\limits_0^\delta [f(x+y)-f(x+0)]\,\frac{\sin ny}{y}\,dy\right| < 2\pi\varepsilon.$$

Точно так же оценивается и интеграл

$$\int\limits_0^\delta [f(x-y)-f(x-0)]\,\frac{\sin ny}{y}\,dy.$$

На основании леммы 1.43 ряд Фурье функции f сходится к s.

Если дополнительно $f \in C[a,b]$ и $[a',b'] \subset (a,b)$, то можно выбрать $\delta>0$ столь малым, что

$$|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon, \quad |f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$$

при $x \in [a',b']$ и $0<y\leqslant\delta$. Поэтому в предыдущих оценках интегралов x может быть взято любым из $[a',b']$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_0^\delta [f(x+y)+f(x-y)-2s]\,\frac{\sin ny}{y}\,dy\right| < 4\pi\varepsilon$$

при $x \in [a',b']$. Снова применяя лемму 1.43, получим нужное утверждение. □

Из теоремы 1.178 вытекает, что утверждение теоремы 1.139 сохраняет силу, если в ней условие монотонности функции f на $[a,b]$ заменить на условие $f \in BV[a,b]$ (см. также определение 1.134).

Средние Фейера

Существование непрерывных функций, у которых ряды Фурье расходятся в некоторых точках, обусловлено «плохими» аппроксимативными свойствами ядер Дирихле. Заменим ядра Дирихле в выражениях для сумм Фурье на другие для улучшения свойств сходимости.

Рассмотрим **ядра Фейера**:

$$F_n(x) := \frac{1}{\pi(n+1)} \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{\pi\,(n+1)} \frac{1}{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^2} \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= \frac{1}{\pi\,(n+1)} \frac{1}{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^2} \sum_{k=0}^{n} [\cos kx - \cos(k+1)x] = \frac{1}{\pi\,(n+1)} \frac{1-\cos(n+1)x}{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi\,(n+1)} \left(\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}} \right)^2. \tag{1.261}$$

Введем **средние Фейера**:

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(y) F_n(x-y)\, dy. \tag{1.262}$$

В следующей теореме используется норма, введенная в (1.239).

Теорема 1.140 (Фейера). *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n f\|_C = 0.$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F_n(y)\, dy = 1.$$

Далее рассмотрим разность

$$|f(x) - \sigma_n f(x)| = \left| f(x) \int\limits_{\mathbb{T}} F_n(y)\, dy - \int\limits_{\mathbb{T}} f(x+y) F_n(y)\, dy \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{T}} [f(x) - f(x+y)]\, F_n(y)\, dy \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} |f(x) - f(x+y)|\, F_n(y)\, dy =$$

$$= \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leqslant |y| \leqslant \pi} \right) |f(x) - f(x+y)|\, F_n(y)\, dy = I_1 + I_2.$$

Выберем и зафиксируем $\delta > 0$ так, чтобы $\omega(\delta, f) < \varepsilon/2$. Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{T}} F_n(y) \; dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь I_2:

$$I_2 \leqslant \frac{2\,\|f\|_C}{\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \left[\frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\right) y}{\sin\dfrac{y}{2}} \right]^2 \; dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi\,\|f\|_C}{n+1} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dy}{y^2} \leqslant \frac{2\pi\,\|f\|_C}{n+1} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2\pi\,\|f\|_C}{(n+1)\,\delta}.$$

Таким образом, для достаточно больших n

$$\|f - \sigma_n f\|_C \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\pi\,\|f\|_C}{(n+1)\delta} < \varepsilon. \ \square$$

Понятие о суммируемости расходящихся рядов

Теорема Фейера, доказанная в предыдущем пункте, наводит на мысль о возможности расширения класса рядов, которым можно приписать некоторое значение в качестве естественной суммы.

Числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется суммируемым **методом средних арифметических** к числу s, если

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s, \quad \text{где} \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k,$$

s_k — последовательность его частичных сумм (1.198). Тогда теорема 1.140 может быть переформулирована так: *ряд Фурье любой непрерывной функции $f \in C_{2\pi}$ суммируем к f методом средних арифметических равномерно на $\mathbb{T}$.*

Для того чтобы быть уверенным в целесообразности введенного понятия, необходимо убедиться в том, что новое понятие суммируемости не противоречит уже устоявшемуся понятию сходимости ряда. Это показывает следующее утверждение: *если последовательность частичных сумм s_n ряда сходится к числу s, то и последовательность σ_n также сходится к s.*

Для доказательства этого зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|s_k - s| < \varepsilon/2$ при $k \geqslant n_\varepsilon$. Тогда, учитывая ограниченность последовательности частичных сумм, при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$|\sigma_n - s| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[s_k - s]\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon}|s_k - s| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n}|s_k - s| \leqslant$$

$$\leqslant 2M\frac{n_\varepsilon}{n} + \frac{n - n_\varepsilon}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant 2M\frac{n_\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при достаточно больших n (здесь $M = \sup_n |s_n|$), тогда и $|s| \leqslant M$.

Таким образом, введенное понятие суммируемости обобщает понятие сходимости ряда.

Следующий пример показывает, что существуют расходящиеся ряды, суммируемые методом средних арифметических. Именно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$$

расходится в обычном понимании этого термина (для него не выполнено необходимое условие сходимости). Однако этот ряд суммируется методом средних арифметических к $1/2$. Это следует из того, что $s_{2k-1} = 1$ и $s_{2k} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому

$$\sigma_{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1}, \quad \sigma_{2k} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_n \to \frac{1}{2}.$$

Только что вкратце был рассмотрен один из способов суммирования рядов. На самом деле имеется развитая общая теория суммируемости рядов, дающая много полезных способов определения обобщенной суммы ряда.

1.11.3. Ряды Фурье по системе Хаара

Рассмотрим еще одну ортонормированную систему, которая дает каждой непрерывной функции равномерно сходящийся ряд Фурье. Она была построена не так давно (по сравнению с другими объектами математического анализа) — в начале XX в. В последние годы внимание к ней снова возросло в связи с новыми достижениями гармонического анализа (см. (1.266)).

Будем обозначать $|\Delta| = b - a$ длину промежутка $\Delta = \langle a, b\rangle \subset [0, 1]$.

Двоичные промежутки и система Хаара

Пусть
$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = [0, 1].$$
Далее каждое натуральное число $n \geqslant 2$ можно однозначно представить в виде
$$n = 2^i + j, \quad i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^i. \tag{1.263}$$
Положим тогда
$$\Delta_n = \Delta_i^j = \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right) \tag{1.264}$$
($\Delta_i^{2^i}$ считаем замкнутым и справа). Промежутки Δ_n будем называть **двоичными** (или диадическими) промежутками.

Следующая лемма содержит важнейшее (хотя и очевидное) и часто используемое свойство двоичных промежутков.

Лемма 1.44. *Любые два двоичных промежутка либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом, причем в его левой или правой половине.*

Определим систему Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Для $n = 1$ положим
$$\chi_1(x) = \chi_0^0(x) \equiv 1,$$
а для $n \geqslant 2$ —
$$\chi_n(x) = \chi_i^j(x) = \begin{cases} \sqrt{2^i}, & x \in \Delta_{i+1}^{2j-1}, \\ -\sqrt{2^i}, & x \in \Delta_{i+1}^{2j}, \\ 0, & x \notin \Delta_i^j. \end{cases} \tag{1.265}$$

Для наглядности отметим, что Δ_{i+1}^{2j-1} и Δ_{i+1}^{2j} являются соответственно левой и правой половинками Δ_i^j:
$$\Delta_{i+1}^{2j-1} \cup \Delta_{i+1}^{2j} = \Delta_i^j.$$

Все функции системы Хаара, начиная со второй, весьма просто выражаются через одну (так называемую материнскую) функцию
$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

Тогда для всех $x \in [0,1)$ и $n \geqslant 2$ справедливы равенства (см. также (1.263))

$$\chi_n(x) = 2^{i/2}\chi\left(2^i x - j + 1\right). \tag{1.266}$$

В последние годы ортонормированные системы, обладающие таким свойством, получили широкое распространение (их называют всплесками, вейвлетами или онделеттами). Они находят многочисленные приложения в самых различных прикладных вопросах.

Ортогональность системы Хаара

Лемма 1.45. *Система Хаара является ортонормированной системой на $[0,1]$, т. е.*

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

В частности, она линейно независима (т. е. линейно независима любая ее конечная подсистема).

Доказательство. Случай $n = m$ проверяется непосредственно. Если $n > m$, то возможны следующие случаи:

1) промежутки Δ_n и Δ_m не пересекаются, и тогда произведение $\chi_n(x)\chi_m(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$;

2) Δ_n и Δ_m пересекаются, тогда по лемме 1.44 Δ_n содержится в левой или правой половине Δ_m и функция χ_m постоянна на Δ_n, откуда

$$\int_0^1 \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \int_{\Delta_n} \chi_n(x)\chi_m(x)\,dx = \chi_m(\Delta_n)\int_{\Delta_n} \chi_n(x)\,dx = 0.$$

Чтобы доказать линейную независимость системы Хаара, предположим, что некоторая конечная линейная комбинация функций системы равна нулю:

$$\sum_{n=1}^{m} a_n\chi_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Умножим это равенство на любую из функций $\chi_k(x)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, проинтегрируем по отрезку $[0,1]$ и используем уже доказанную ортонормированность:

$$0 = \int_0^1 \chi_k(x)\sum_{n=1}^{m} a_n\chi_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} a_n \int_0^1 \chi_k(x)\chi_n(x)\,dx = a_k.$$

Следовательно, все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. $\square$

Для каждого $n \geqslant 2$ обозначим $\mathcal{D}_n$ множество всех функций, постоянных на каждом из n двоичных промежутков из множества

$$\mathcal{P}_n = \left\{\Delta_{i+1}^1, \ldots, \Delta_{i+1}^{2j},\ \Delta_i^{j+1}, \ldots, \Delta_i^{2^i}\right\} \tag{1.267}$$

(см. (1.263)). Кроме того, пусть $\mathcal{P}_1 = \{[0,1]\}$. Отметим, что $\mathcal{P}_n$ содержит ровно n промежутков.

Лемма 1.46. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ линейная оболочка системы функций $\{\chi_n\}_{n=1}^m$ совпадает с $\mathcal{D}_m$.*

Доказательство. Ясно, что эта линейная оболочка содержится в $\mathcal{D}_m$, так как каждая функция χ_n $(n = 1, \ldots, m)$ постоянна на промежутках (1.267).

Чтобы доказать обратное включение, заметим, что размерность $\mathcal{D}_m$ равна m, так как характеристические функции промежутков (1.267) образуют базис в $\mathcal{D}_m$. Но система $\{\chi_n\}_{n=1}^m$ линейно независима и тоже является базисом в $\mathcal{D}_m$. $\square$

Ряды Фурье – Хаара

Ортонормированность системы Хаара позволяет определить понятие ряда Фурье для любой функции $f \in R[0,1]$.

Если $f \in R[0,1]$, то числа

$$a_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

называются **коэффициентами Фурье – Хаара**, а **ряд Фурье – Хаара** функции f определяется так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\chi_n(x).$$

Сходимость ряда Фурье – Хаара определяется поведением последовательности его частичных сумм

$$S_m f(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(f)\chi_n(x).$$

Для изучения вопроса о сходимости рядов Фурье получим удобное интегральное представление для сумм Фурье – Хаара, как это было в теории тригонометрических рядов Фурье.

Лемма 1.47. *Для любой функции $f \in R[0,1]$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$S_n f(x) = \int_0^1 f(y) \sum_{m=1}^{n} \chi_m(x)\chi_m(y)\,dy = \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(y)\,dy \quad \textit{при} \quad x \in \Delta, \qquad (1.268)$$

где Δ — любой промежуток из $\mathcal{P}_n$ (см. (1.267)).

Доказательство. Первое из равенств получается простым расписыванием формул для коэффициентов Фурье. Второе докажем по индукции, начиная с очевидного случая $n = 1$.

Предположим, что (1.268) уже доказано для $n-1$, и докажем его для n. Так как

$$S_n f = S_{n-1} f + a_n(f)\chi_n,$$

а $\chi_n(x) \neq 0$ только при $x \in \Delta_n = \Delta_i^j$, то в силу предположения индукции нам достаточно доказать (1.268) только для $x \in \Delta_i^j$.

Для этого воспользуемся предположением индукции и определением коэффициентов Фурье:

$$S_n f(x) = S_{n-1} f(x) + \chi_n(x) 2^{i/2}\left[\int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right] =$$

$$= 2^i \int\limits_{\Delta_i^j} f(t)\,dt + \chi_n(x) 2^{i/2}\left[\int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right].$$

Далее рассмотрим сначала случай $x \in \Delta_{i+1}^{2j-1}$, тогда $\chi_n(x) = 2^{i/2}$. Поэтому

$$S_n f(x) = 2^i \int\limits_{\Delta_i^j} f(t)\,dt + 2^i\left[\int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right] = 2^{i+1} \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt.$$

Если же $x \in \Delta_{i+1}^{2j}$, тогда $\chi_n(x) = -2^{i/2}$ и

$$S_n f(x) = 2^i \int\limits_{\Delta_i^j} f(t)\,dt - 2^i\left[\int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j-1}} f(t)\,dt - \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt\right] = 2^{i+1} \int\limits_{\Delta_{i+1}^{2j}} f(t)\,dt.$$

Лемма доказана. $\square$

Непосредственным поводом для появления системы Хаара на свет явилось замечательное свойство, приведенное в следующей теореме. До этого ни одна из известных ортогональных систем (например, тригонометрическая) таким свойством не обладала.

Теорема 1.141 (Хаара). *Для любой функции $f \in C[0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\|f - S_n f\|_C \leqslant \omega\left(\frac{2}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частности, ряд Фурье – Хаара для f сходится равномерно на $[0,1]$.

Доказательство. Действительно, пусть $x \in [0,1]$, тогда x принадлежит одному из промежутков (1.267). Обозначим этот промежуток Δ, тогда $|x-y| < 2^{-k} \leqslant 2/n$ для любого $y \in \Delta$ и в силу леммы 1.47

$$|f(x) - S_n f(x)| = \left| f(x) - \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} f(y)\, dy \right| = \left| \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} [f(x) - f(y)]\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\Delta|} \int\limits_{\Delta} |f(x) - f(y)|\, dy \leqslant \omega\left(\frac{2}{n}, f\right).$$

Второе утверждение вытекает из упражнения в подп. 1.3.2. □

1.12. Интегралы, зависящие от параметра

1.12.1. Элементарная теория

Эта глава посвящена изучению свойств функций, задаваемых интегралами вида

$$I(y) = \int\limits_X f(x,y)\,dx, \tag{1.269}$$

где $X \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток (ограниченный или нет), $y \in Y$, где $Y \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество (множество параметров).

Интеграл (1.269) называется **интегралом, зависящим от параметра** (или параметрическим интегралом). Исследуем такие его свойства, как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Сначала рассматривается простейший случай, когда $X = [a,b]$ и $Y = [c,d]$, при этом систематически используется обозначение для прямоугольника

$$R = [a,b] \times [c,d].$$

Непрерывность интеграла по параметру

Теорема 1.142. *Если $f \in C(R)$, то функция $y \mapsto I(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Так как прямоугольник R замкнут и ограничен, то он является компактом (см. определение 1.89). Поэтому по теореме 1.98 функция f равномерно непрерывна на R.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$ для любых пар $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R$, удовлетворяющих условию $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 < \delta^2$. Поэтому если $y_0 \in [c,d]$, то для всех $|y-y_0| < \delta$ и всех $x \in [a,b]$ выполнено неравенство

$$|I(y) - I(y_0)| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon(b-a). \quad \square$$

Следующая теорема дает обобщение только что доказанной, для случая, когда и пределы интегрирования зависят от параметра.

Теорема 1.143. *Пусть функции $\alpha, \beta \in C[c,d]$, причем $\alpha(y), \beta(y) \in [a,b]$ для всех $y \in [c,d]$. Тогда если $f \in C(R)$, то функция*

$$y \mapsto I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \tag{1.270}$$

непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. Сначала запишем приращение функции I в удобном виде:

$$I(y) - I(y_0) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} [f(x,y) - f(x,y_0)]\,dx + \left[\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y_0)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx\right] :=$$

$$:= \Delta_1(y) + \Delta_2(y).$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta > 0$ определяется так же, как и в теореме 1.142, тогда первое слагаемое оценивается так:

$$|\Delta_1(y)| \leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx \leqslant \varepsilon|\beta(y) - \alpha(y)| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Второе слагаемое оценивается так:

$$|\Delta_2(y)| = \left|\int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y_0)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M|\alpha(y) - \alpha(y_0)| + M|\beta(y) - \beta(y_0)|,$$

где $M = \sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in R\}$. Поэтому в силу непрерывности функций α и β ясно, что последнее выражение будет меньше ε для всех y, достаточно близких к y_0. □

Дифференцируемость интеграла по параметру

Теорема 1.144 (правило Лейбница). *Пусть функция $f \in C(R)$ и на R существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(R)$.*

Тогда интеграл (1.269) имеет производную в каждой точке $y \in [c,d]$ и

$$I'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $y \in [c,d]$, $h \neq 0$, причем $y+h \in [c,d]$. Запишем

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \left[\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right] dx,$$

где $\theta = \theta(x, y, h) \in (0, 1)$. В силу равномерной непрерывности частной производной подынтегральное выражение сходится к нулю при $h \to 0$ равномерно по $x \in [a, b]$. Поэтому правая часть последнего равенства стремится к нулю при $h \to 0$. Следовательно, это же верно и для левой части равенства. $\square$

Теорема 1.145. *Пусть выполнены условия теоремы 1.144. Пусть, кроме того, $\alpha, \beta \in C^1[c, d]$, причем $\alpha(y), \beta(y) \in [a, b]$ при всех $y \in [c, d]$.*

Тогда интеграл (1.269) имеет производную в каждой точке $y \in [c, d]$ и

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx + f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y).$$

Доказательство. Как и при обосновании теоремы 1.144, зафиксируем $y \in [c, d]$, $h \neq 0$, причем $y + h \in [c, d]$. Запишем

$$\frac{I(y + h) - I(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x, y + h)\, dx - \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\right) =$$

$$= \int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}\, dx - \frac{1}{h}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y+h)} f(x, y)\, dx + \frac{1}{h}\int_{\beta(y)}^{\beta(y+h)} f(x, y)\, dx \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

Точно так же, как и в теореме 1.144, доказывается, что

$$I_1 \to \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Кроме того, по теореме о среднем (см. следствие 1.1)

$$\frac{1}{h}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y+h)} f(x, y)\, dx = \frac{\alpha(y + h) - \alpha(y)}{h} f(x_h, y),$$

где $x_h \in \big[\alpha(y), \alpha(y + h)\big]^*$. Поэтому $I_2 \to -f(\alpha(y), y)\alpha'(y)$ при $h \to 0$. Подобным образом получим, что $I_3 \to f(\beta(y), y)\beta'(y)$ при $h \to 0$. $\square$

Интегрирование интеграла по параметру

Теорема 1.146. *Если функция $f \in C(R)$, то повторные интегралы*

$$H = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \quad \textit{и} \quad G = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

существуют и равны.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$g(t,y) = \int\limits_a^t f(x,y)\,dx, \quad t \in [a,b],$$

$$G(t) = \int\limits_c^d g(t,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x,y)\,dx, \quad t \in [a,b],$$

$$H(t) = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy, \quad t \in [a,b].$$

С одной стороны, по теореме 1.144 справедливо равенство

$$G'(t) = \int\limits_c^d f(t,y)\,dy.$$

Здесь использовалась непрерывность функции

$$(t,y) \mapsto \int\limits_a^t f(x,y)\,dx, \quad (t,y) \in R,$$

которая проверяется следующим образом: запишем очевидное неравенство

$$|g(t+\tau, y+k) - g(t,y)| = \left| \int\limits_a^{t+\tau} f(x,y+k)\,dx - \int\limits_a^t f(x,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_a^t [f(x,y+k) - f(x,y)]\,dx \right| + \left| \int\limits_t^{t+\tau} f(x,y+k)\,dx \right|.$$

Первый интеграл справа мал при достаточно малом k в силу равномерной непрерывности функции f на R, а второй мал при достаточно малых τ в силу ограниченности f на R.

С другой стороны, по теореме 1.142 функция

$$t \mapsto \int_c^d f(t,y)\,dy, \quad t \in [a,b],$$

непрерывна на $[a,b]$. Поэтому по лемме 1.21 для функции справедливо равенство

$$H'(t) = \int_c^d f(t,y)\,dy, \quad t \in [a,b].$$

Таким образом, $G'(t) = H'(t)$ при всех $t \in [a,b]$. Следовательно, по формуле Лагранжа (см. теорему 1.48) существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $G(t) - H(t) = c$ для всех $t \in [a,b]$.

Следовательно, учитывая также, что $G(a) = H(a) = 0$, получим $c = 0$ и $G(t) = H(t)$ при всех $t \in [a,b]$. В частности, при $t = b$ отсюда вытекает требуемое равенство. $\square$

1.12.2. Несобственные интегралы от параметра

Дальнейшим развитием результатов п. 1.12.1 является изучение несобственных интегралов, зависящих от параметра. При этом будут рассмотрены только несобственные интегралы первого рода (особенность бесконечного промежутка). Предлагается самостоятельно убедиться, что никаких существенных отличий для несобственных интегралов второго рода (от неограниченных функций) не наблюдается (см. подп. 1.12.2).

При исследовании несобственных интегралов, зависящих от параметра, обнаруживается много аналогий с рассмотрением свойств суммы функционального ряда. В частности, здесь будет использована подобная терминология.

Пусть $Y \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество и задана функция $f : [a,+\infty) \times Y$. При этом будем предполагать, что для любого $y \in Y$ существует несобственный интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx. \tag{1.271}$$

Конечно, это требование включает интегрируемость на любом отрезке $[a,b]$, $b > a$, при любом $y \in Y$.

Интеграл (1.271) будем называть несобственным интегралом, зависящим от параметра $y \in Y$.

Примерами могут служить

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}, \quad y > 1; \qquad \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{x^2y^2}\right\} dx, \quad y \neq 0.$$

Равномерная сходимость функции

Сначала обобщим определение 1.120 равномерной сходимости последовательности функций, заменяя натуральный параметр на произвольный. Пусть задана функция $f : X \times Y$, где $X \subset \mathbb{R}$ и Y — произвольное множество. Пусть еще x_0 — предельная точка множества X.

Определение 1.124. *Говорят, что функция f* ***сходится равномерно*** *на множестве Y при $x \to x_0$ к функции $g : Y \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, и для всех $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Другими словами, это означает, что (проверьте это)

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{y \in Y} |f(x, y) - g(y)| = 0.$$

Будем использовать это определение и в случае, когда $x_0 = \pm\infty$ и множество X не ограничено (сверху или снизу), понимая предел на бесконечности естественным образом, как в подп. 1.2.5.

Условие равномерной сходимости функции можно переформулировать, сводя его к определению равномерной сходимости последовательности функций (в духе определения предела функции по Гейне), следующим образом.

Теорема 1.147. *Для того чтобы функция f сходилась при $x \to x_0$ к функции $g : Y \to \mathbb{R}$ равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$, последовательность функций $y \mapsto f(x_n, y)$ сходилась к g равномерно на Y.*

Доказательство повторяет, по существу, обоснование эквивалентности определений Коши и Гейне предела функции (см. теорему 1.17). Предлагается провести его в качестве упражнения.

Эта теорема позволит использовать известные факты (связанные со свойствами предела функциональной последовательности) для их распространения на случай предела функции двух переменных по одной из них.

В частности, с помощью теоремы 1.147 доказывается следующий стандартный критерий равномерной сходимости функции.

Теорема 1.148. *Для того чтобы функция f сходилась при $x \to x_0$ равномерно относительно $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для всех $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Доказательство сводится с помощью теоремы 1.147 к применению критерия Коши для равномерной сходимости последовательности функций (теорема 1.119) к последовательности $y \mapsto f(x_n, y)$, где x_n — произвольная последовательность, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$.

Равномерная сходимость интеграла

Следующее определение аналогично определению равномерной сходимости функционального ряда.

Определение 1.125. *Говорят, что несобственный интеграл (1.271), зависящий от параметра, **сходится равномерно** относительно $y \in Y$, если функция*

$$(t, y) \mapsto \int\limits_a^t f(x, y)\, dx$$

сходится при $t \to \infty$ к функции I равномерно относительно $y \in Y$. В явном виде это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T > a$, что для всех $t \geqslant T$ и всех $y \in Y$ выполнено неравенство

$$\left| I(y) - \int\limits_a^t f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Для такого понятия равномерной сходимости справедлив аналог критерия Коши для соответствующего понятия из теории рядов (см. теорему 1.119).

Теорема 1.149. *Для того чтобы несобственный интеграл от параметра (1.271) сходился равномерно относительно $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $T > a$, что для всех $t_2 > t_1 \geqslant T$ и всех $y \in Y$ выполнялось неравенство*

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1.148. □

Приведем теперь ряд достаточных условий для равномерной сходимости несобственных интегралов, подобных признакам Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (см. соответственно теоремы 1.121, 1.122 и 1.123).

Теорема 1.150. *Пусть*

$$F(x) = \sup_{y \in Y} |f(x, y)|, \quad x \geqslant a,$$

и сходится несобственный интеграл

$$\int_a^\infty F(x)\,dx.$$

Тогда несобственный интеграл от параметра (1.271) *сходится равномерно относительно* $y \in Y$.

Доказательство сразу следует из критерия Коши (теорема 1.149) и неравенства

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} F(x)\,dx. \quad \square$$

В следующих двух теоремах функция f представима в виде $f = uv$ и речь будет идти о равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^\infty u(x,y)v(x,y)\,dx. \tag{1.272}$$

Теорема 1.151. *Интеграл от параметра* (1.272) *сходится равномерно относительно* $y \in Y$, *если выполнены следующие условия:*

1) *функция* v *монотонно убывает по* x *при каждом фиксированном* $y \in Y$ *и сходится к нулю при* $x \to +\infty$ *равномерно относительно* $y \in Y$;

2) *функция*

$$U(t) = \int_a^t u(x,y)\,dx$$

ограничена на множестве $(t,y) \in [a,\infty) \times Y$.

Доказательство повторяет обоснование теоремы 1.122, только вместо преобразования Абеля применяются формулы Бонне (теорема 1.76):

$$\int_{t_1}^{t_2} u(x,y)v(x,y)\,dx = v(t_1,y)\int_{t_1}^{\tau} u(x,y)\,dx + v(t_2,y)\int_{\tau}^{t_2} u(x,y)\,dx,\ \tau \in [t_1,t_2].$$

Пусть $T > a$ выбрано так, что $v(t,y) < \varepsilon$ при всех $t > T$ и всех $y \in Y$. Обозначим

$$M = \sup\left\{|U(t,y)| : t \geqslant a, y \in Y\right\}.$$

Тогда в силу выбора T выполнено неравенство

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| < 4M\varepsilon.$$

Осталось воспользоваться критерием Коши (теорема 1.149). $\square$

Теорема 1.152. *Пусть выполнены следующие условия:*

$1)'$ *функция v монотонно убывает по x при каждом фиксированном $y \in Y$ и ограничена на множестве $[a, \infty) \times Y$;*

$2)'$ *интеграл*

$$\int_a^\infty u(x, y)\, dx$$

сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда интеграл от параметра (1.272) сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Непрерывность интеграла по параметру

Следующая теорема дает условия, при которых возможен предельный переход под знаком несобственного интеграла от параметра.

Теорема 1.153. *Пусть задана функция $f \in C([a, \infty) \times [c, d])$, $y_0 \in [c, d]$ и выполнены следующие условия:*

1) *при любом $t > a$ функция f при $y \to y_0$ сходится к функции g равномерно на $[a, t]$;*

2) *несобственный интеграл (1.271) сходится равномерно на $[c, d]$.*

Тогда несобственный интеграл от функции g по $[a, +\infty)$ сходится и существует предел

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty g(x)\, dx.$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $y_n \to y_0$ и обозначим для краткости

$$F_n(t) = \int_a^t f(x, y_n)\, dx, \quad G(t) = \int_a^t f(x, y_0)\, dx.$$

Отметим при этом, что последний интеграл существует для любого $t \geqslant a$ в силу условия 1) по теореме об интегрировании равномерно сходящейся последовательности функций (см. теорему 1.126). Кроме того, из этой же теоремы следует, что

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t) = G(t), \quad t \geqslant a.$$

Далее из условия 2) следует, что

$$\lim_{t \to \infty} F_n(t) = \int_a^\infty f(x, y_n)\, dx$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Поэтому по теореме о перестановке пределов (см. теорему 1.120)

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty} F_n(t).$$

Это означает, что для любой последовательности $y_n \to y_0$

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_a^t g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x,y_n)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^\infty g(x)\,dx = \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx,$$

и теорема доказана. $\square$

Теорема 1.154. *Пусть функция $f \in C([a,\infty)\times[c,d])$ и интеграл*

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I \in C[c,d]$.

Доказательство вытекает из предыдущей теоремы — ее первое условие выполнено, так как из условия $f \in C([a,\infty)\times[c,d])$ следует, что при каждом $t \geqslant a$ функция f равномерно непрерывна на компактном прямоугольнике $[a,t]\times[c,d]$. $\square$

Интегрирование по параметру

Теорема 1.155. *Пусть функция $f \in C([a,\infty)\times[c,d])$ и интеграл*

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда функция

$$x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

интегрируема в несобственном смысле на $[a,\infty)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_a^\infty dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Другими словами, теорема утверждает, что при сформулированных условиях справедливо равенство перестановки двух интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $t_n \uparrow \infty$ и обозначим

$$F_n(y) = \int_a^{t_n} f(x,y)\,dx,$$

тогда по определению несобственного интеграла

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

и по условию эта сходимость — равномерная на $[c,d]$. В силу теоремы 1.126 об интегрировании равномерно сходящейся последовательности функций справедливо равенство

$$\int_c^d \left[\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy = \int_c^d \lim_{n\to\infty} F_n(y)\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_c^d F_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^{t_n} \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы об интегрировании обычных интегралов от параметра (см. теорему 1.146). Отсюда следует наше утверждение. $\square$

Дифференцирование интеграла по параметру

Следующая теорема показывает, что правило Лейбница дифференцирования интегралов, зависящих от параметра (см. теорему 1.144), при определенных условиях сохраняет силу и для несобственных интегралов.

Теорема 1.156. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *функция $f \in C([a,\infty) \times [c,d])$;*
2) *частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\infty) \times [c,d])$;*
3) *на отрезке $[c,d]$ сходится интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx;$$

4) *на отрезке* $[c,d]$ *равномерно сходится интеграл*

$$\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Тогда функция I *дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Доказательство сводится к применению теоремы 1.128 о дифференцировании функциональных последовательностей. Обозначим

$$F_n(y) = \int\limits_a^n f(x,y)\,dx \to \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

Тогда по теореме 1.144 справедливо равенство

$$F_n'(y) = \int\limits_a^n \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \to \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

и сходимость равномерна на $[c,d]$.

Далее по теореме 1.128

$$I'(y) = \Big(\lim_{n\to\infty} F_n(y)\Big)' = \lim_{n\to\infty} F_n'(y) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \quad \square$$

Повторное несобственное интегрирование

Для рассмотрения интересных и важных примеров неэлементарных функций необходимо исследовать вопрос об интегрировании несобственных интегралов от параметра по бесконечному промежутку.

Теорема 1.157. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *функция* $f \in C([a,\infty)\times[c,\infty))$ *неотрицательна;*
2) *для любого* $y \in [c,\infty)$ *интеграл*

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится и $I \in C[c,\infty)$*;*
3) *для любого* $x \in [a,\infty)$ *интеграл*

$$J(x) = \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходится и $J \in C[a,\infty)$.

Тогда если один из интегралов

$$\int\limits_c^\infty I(y)\,dy, \quad \int\limits_a^\infty J(x)\,dx$$

сходится, то сходится и другой и они совпадают.

Доказательство. Возьмем любую возрастающую последовательность $a \leqslant t_m \uparrow \infty$ и обозначим

$$F_n(x) = \int\limits_c^n f(x,y)\,dy, \quad G_m(y) = \int\limits_a^{t_m} f(x,y)\,dx.$$

Тогда по теореме 1.146 об интегрировании обычных интегралов от параметра, используя неотрицательность функции f, получим

$$\int\limits_a^{t_m} F_n(x)\,dx = \int\limits_c^n G_m(y)\,dy \leqslant \int\limits_c^\infty \left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Поскольку последовательность F_n возрастает и сходится к непрерывной функции J, то по теореме Дини (см. теорему 1.125) эта сходимость равномерная на любом отрезке $[a,t_m]$. Следовательно, по теореме об интегрировании функциональных последовательностей (теорема 1.126)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{t_m} F_n(x)\,dx = \int\limits_a^{t_m}\left[\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Итак, получено следующее неравенство:

$$\int\limits_a^{t_m}\left[\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy\right] dx \leqslant \int\limits_c^\infty\left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Перейдя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\int\limits_a^{\infty}\left[\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy\right] dx \leqslant \int\limits_c^\infty\left[\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Меняя ролями переменные x и y, получим противоположное неравенство. □

Теорема 1.158. *Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 1.157, кроме неотрицательности. Пусть также функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 1.157 и выполнены неравенства*

$$|f(x,y)| \leqslant F(x,y), \quad x \geqslant a,\ y \geqslant c.$$

Тогда утверждение теоремы 1.157 справедливо для функции f.

Доказательство. При наших условиях функции $(F+f)/2$ и $(F-f)/2$ удовлетворяют условиям теоремы 1.157, поэтому ее утверждение верно и для их разности, которая совпадает с f. $\square$

Следующая теорема позволяет менять порядок несобственных интегралов, без требования сохранения знака подынтегральной функции. Но в ней налагаются дополнительные условия на сходимость несобственных интегралов.

Теорема 1.159. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f \in C([a,\infty) \times [c,\infty))$;

2) *несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

сходится равномерно на отрезках $[c,C]$ *при любом* $C > c$;

3) *несобственный интеграл*

$$J(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходится равномерно на отрезках $[a,A]$ *при любом* $A > a$.

Тогда если один из повторных интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy, \qquad \int_a^\infty J(x)\,dx$$

сходится, то сходится и другой и они совпадают.

Доказательство проведите самостоятельно.

Несобственные интегралы второго рода

Подобным образом можно было бы развить и соответствующую теорию для несобственных интегралов второго рода, зависящих от параметра. Ограничимся некоторой сводной формулировкой, достаточной для большинства приложений.

Пусть Y — некоторое множество, $a, \omega \in \mathbb{R}$, $a < \omega$, и задана функция $f : [a,\omega) \times Y \to \mathbb{R}$. При этом будем предполагать, что по крайней мере для одного $y \in Y$ функция $x \mapsto f(x,y)$ не является ограниченной в любой проколотой окрестности точки ω (т. е. ω является конечной особенностью функции f, как это понималось в определении 1.69). Предположим также, что для любого $y \in Y$ существует (возможно, несобственный) интеграл

$$I(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx. \tag{1.273}$$

Конечно, это требование включает интегрируемость функции $x \mapsto f(x,y)$ на любом отрезке $[a,b]$ ($b \in (a,\omega)$) при любом $y \in Y$.

Теорема 1.160. *Пусть функция $f \in C([a,\omega) \times [c,d])$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если интеграл (1.273) сходится равномерно относительно $y \in [c,d]$, то $I \in C[c,d]$;*

2) *при том же условии*

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)\,dy;$$

3) *если интеграл (1.273) сходится, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C([a,\omega) \times [c,d])$ и интеграл*

$$\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно $y \in [c,d]$, то

$$I'(y) = \int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Доказательство проведите самостоятельно.

1.12.3. Некоторые приложения

Интеграл Дирихле

Интеграл

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx \tag{1.274}$$

называется **интегралом Дирихле**. Он является несобственным только из-за неограниченности области интегрирования, так как подынтегральная функция ограничена и точка нуль не будет особенностью.

Ясно, что $D(0) = 0$. Кроме того, $D(y) = -D(-y)$ при $y > 0$, и интеграл Дирихле сходится по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов (см. теорему 1.86): функция $x \mapsto 1/x$ монотонна, сходится к нулю на бесконечности и

$$\left|\int_0^t \sin xy\,dx\right| = \left|\frac{1-\cos ty}{y}\right| \leqslant \frac{2}{|y|}, \quad t > 0.$$

Теорема 1.161. *Для любого* $y \in \mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$D(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y.$$

Доказательство. С помощью линейной замены переменной убеждаемся в справедливости равенства

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} xy = t \\ y\, dx = dt \end{array} \right] = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = D(1)$$

при $y > 0$. Аналогично получим $D(y) = -D(1)$ при $y < 0$ (в чем здесь отличие?). Таким образом, вычисление интеграла Дирихле при любом y сводится к вычислению $D(1)$.

Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\, dx, \tag{1.275}$$

зависящий от параметра $y \in Y = [0, +\infty)$. Отметим, что подынтегральная функция $f(x, y) = (e^{-xy} \sin x)/x$ непрерывна на $[0, +\infty) \times Y$, если доопределить ее следующим образом: $f(0, y) = 1$.

Интеграл (1.275) сходится равномерно на Y. В этом можно убедиться по признаку Абеля (теорема 1.152): функция $v(x, y) = e^{-xy}$ монотонна и ограничена, а интеграл от функции $u(x, y) = \sin x/x$ сходится равномерно на Y (функция не зависит от параметра). Отсюда по теореме 1.153 следует непрерывность интеграла (1.275).

Вычислим теперь производную $I'(y)$ функции (1.275) при любом $y > 0$. Для этого будем считать, что $y \in [\delta, \Delta]$ (числа $0 < \delta < y$ и $y < \Delta < +\infty$ фиксированы). Тогда интеграл от частной производной

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dx$$

сходится равномерно на $[\delta, \Delta]$ по признаку Вейерштрасса (теорема 1.150). Это следует из неравенства $|e^{-xy} \sin x| \leqslant e^{-\delta x}$ и сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-\delta x}\, dx.$$

Поэтому по правилу Лейбница для несобственных интегралов от параметра (теорема 1.156) справедливо равенство

$$I'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dx = -\frac{1}{y^2 + 1}.$$

Последний интеграл легко вычисляется с помощью двукратного интегрирования по частям.

Зафиксируем теперь произвольно натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и запишем по формуле Ньютона – Лейбница (теорема 1.78, все условия которой сейчас выполнены):

$$I(y) = I(n) - \int\limits_n^y \frac{dt}{t^2+1} = I(n) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} y.$$

Теперь, используя непрерывность интеграла (1.275), запишем равенство

$$I(0) = \lim_{y\to+0} I(y) = \lim_{y\to+0} [I(n) + \operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} y] = I(n) + \operatorname{arctg} n.$$

Перейдем к пределу в последнем равенстве при $n \to +\infty$, учтем неравенство

$$|I(n)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-nx}\frac{|\sin x|}{x}\, dx \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

и получим при этом окончательный результат: $D(1) = I(0) = \pi/2$. $\square$

Эйлеровы интегралы

В качестве других примеров применения результатов п. 1.12.2 рассмотрим два интеграла:

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt, \tag{1.276}$$

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \tag{1.277}$$

которые играют важную роль в анализе. Они называются соответственно **гамма-** и **бета-функцией Эйлера**. Это примеры неэлементарных функций, так как для большинства значений параметров соответствующие первообразные не выражаются через элементарные функции.

Интеграл (1.276) является несобственным интегралом первого рода (особенность бесконечного промежутка), а при $x < 1$ — несобственным интегралом второго рода с особенностью в нуле. Интеграл (1.277) — несобственный интеграл второго рода с особенностью в точке 0 при $x < 1$ и особенностью в точке 1 при $y < 1$.

Упражнение 1.52. Доказать следующие утверждения:
1) интеграл, определяющий $\Gamma(x)$, существует при $x > 0$;
2) интеграл, определяющий $B(x,y)$, существует при $x > 0$, $y > 0$.

Свойства бета-функции

Используя результаты п. 1.12.2, изучим свойства эйлеровых функций.

Теорема 1.162. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *бета-функция имеет непрерывные частные производные любого порядка на* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$*;*

2) $B(x,y)=B(y,x)$*;*

3) *справедливы формулы понижения*

$$B(x,y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1) \quad \textit{при} \quad y>1,$$

$$B(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}B(x-1,y) \quad \textit{при} \quad x>1.$$

Доказательство. 1) Докажем, например, существование частной производной по x. Будем использовать утверждение 3) теоремы 1.160. Функция

$$f(t,x)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}, \quad t\in(0,1], x\in(0,+\infty),$$

имеет непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t, \quad t\in(0,1], x\in(0,+\infty).$$

Если $\varepsilon>0$, то при $x\in[2\varepsilon,+\infty)$ эта частная производная мажорируется функцией

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leqslant ct^{\varepsilon-1}(1-t)^{y-1},$$

не зависящей от x (это следует из того, что функция $t\mapsto t^{\varepsilon}|\ln t|$, $t\in(0,1]$) ограничена некоторой постоянной c).

Отсюда и из теоремы 1.150 (точнее, из ее аналога для несобственных интегралов второго рода) вытекает равномерная сходимость на $[2\varepsilon,+\infty)$ несобственного интеграла

$$\int\limits_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\,dt.$$

Поэтому из утверждения 3) теоремы 1.160 вытекает существование частной производной $\dfrac{\partial B}{\partial x}$ и равенство

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\,dt.$$

Точно так же исчерпывается вопрос о существовании и непрерывности производных высших порядков.

2) Это свойство проверяется заменой $t = 1 - s$.

3) С помощью интегрирования по частям получим

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 (1-t)^{y-1}\, d\left(\frac{t^x}{x}\right) = \frac{t^x(1-t)^{y-1}}{x}\bigg|_0^1 + \frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-2}\, dt =$$

$$= \frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-2}\, dt - \frac{y-1}{x}\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt =$$

$$= \frac{y-1}{x}B(x,y-1) - \frac{y-1}{x}B(x,y)$$

(было использовано тождество $t^x = t^{x-1} - t^{x-1}(1-t)$). Второе равенство вытекает из первого и из утверждения 2). $\square$

Второе и третье утверждения теоремы позволяют сводить вычисление значений бета-функции к случаю, когда $x, y \in (0,1]$.

Мы ограничиваемся этими свойствами бета-функции, так как ниже будет установлена простая связь между функциями Эйлера, поэтому многие свойства бета-функции можно выводить из свойств гамма-функции.

Свойства гамма-функции

Теорема 1.163. *Гамма-функция обладает следующими свойствами:*

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *при* $x > 0$, *в частности,* $\Gamma(n+1) = n!$ *при* $n \in \mathbb{N}$*;*

2) Γ *имеет непрерывные производные любого порядка на* $(0, +\infty)$*;*

3) *существует такое* $x_0 \in (1,2)$, *что гамма-функция убывает на* $(0, x_0)$ *и возрастает на* $(x_0, +\infty)$*;*

4) Γ *выпукла на* $(0, +\infty)$.

Доказательство. 1) Проверяется простым интегрированием по частям.

2) Подынтегральная функция $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}$ имеет непрерывные частные производные любого порядка $k \in \mathbb{N}$ по x:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = (\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t},$$

которые мажорируются функцией

$$\left|(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant ct^{\delta/2-1}, \quad t \in (0,1],$$

$$\left|(\ln t)^k\, t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant ct^{\Delta/2-1}e^{-t}, \quad t \geqslant 1,$$

где $0 < \delta \leqslant x \leqslant \Delta$ и c — некоторая постоянная. Отсюда следует, что несобственный интеграл от $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ по $[0, +\infty)$ сходится равномерно на $[\delta, \Delta]$. Поэтому можно применять теоремы 1.154, 1.156 и 1.160. В частности, справедливы следующие равенства для производных гамма-функции:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int\limits_0^\infty (\ln t)^k \, t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

3) Из утверждения 2) при $k = 2$ и из теоремы 1.62 заключаем, что $\Gamma''(x) > 0$. По теореме 1.57 Γ' строго возрастает, а из 1) вытекает, что $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Следовательно, существует $x_0 \in (1, 2)$, для которого $\Gamma'(x_0) = 0$, $\Gamma'(x) < 0$ при $x \in (0, x_0)$, $\Gamma'(x) > 0$ при $x \in (x_0, +\infty)$.

4) Так как $\Gamma''(x) > 0$, то из теоремы 1.62 выводим, что гамма-функция строго выпукла. $\square$

Утверждение 1) теоремы 1.163 показывает, в частности, что гамма-функция является естественным распространением понятия факториала $x!$ (определенного лишь для натуральных значений x) на любые положительные значения $x > 0$. Несколько позже, установив связь между двумя эйлеровыми интегралами, увидим, что бета-функция играет такую же роль по отношению к биномиальным коэффициентам (1.22).

Связь гамма- и бета-функций Эйлера

Хорошо известна формула для биномиальных коэффициентов (см. (1.22))

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Следующая теорема показывает, что бета-функция позволяет распространить биномиальные коэффициенты на случай нецелых индексов, если факториалы понимать как значения гамма-функции.

Теорема 1.164. *Для любых $x > 0$ и $y > 0$ справедливо равенство*

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.278}$$

Доказательство. Для бета-функции выполним одну замену переменной:

$$B(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{u}{1+u} \\ dt = \dfrac{du}{(1+u)^2} \end{array} \right] = \int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \, du, \tag{1.279}$$

а для гамма-функции — другую:

$$\Gamma(x) = \left[\begin{array}{c} t = us \\ dt = u\,ds \end{array} \right] = u^x \int\limits_0^\infty s^{x-1} e^{-us}\, ds.$$

Заменим x на $x+y$, а u — на $1+u$:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} = \int\limits_0^\infty s^{x+y-1} e^{-(1+u)s}\, ds,$$

умножим на u^{x-1}, проинтегрируем по u и поменяем порядок интегрирования:

$$\Gamma(x+y) \int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty u^{x-1} s^{x+y-1} e^{-(1+u)s}\, ds\, du =$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty u^{x-1} s^{x+y-1} e^{-(1+u)s}\, du\, ds = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty (us)^{x-1} e^{-us} s\, du \right] s^{y-1} e^{-s}\, ds.$$

Если теперь во внутреннем интеграле заменить us на новую переменную, то из (1.279) видно, что справедливо равенство

$$\Gamma(x+y) \cdot B(x,y) = \Gamma(x) \cdot \Gamma(y).$$

Осталось обосновать перемену порядка интегрирования. Подынтегральная функция

$$f(s,u) = u^{x-1} s^{x+y-1} e^{-(1+u)s}$$

положительна и непрерывна. Кроме того, каждый из интегралов

$$\int\limits_0^\infty f(s,u)\, ds = \frac{u^{x+1}\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty f(s,u)\, du = \Gamma(x) s^{y-1} e^{-s}$$

непрерывен, а повторные интегралы от них сходятся. Поэтому перемена порядка интегрирования возможна по теореме 1.157. □

Формула Стирлинга

Формулой Стирлинга называется интересное и красивое асимптотическое соотношение, которое дает весьма точное представление о характере роста факториала $n!$. Ее доказательство начнем с некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 1.48 (формула Валлиса). *Для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{при четном } m, \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при нечетном } m. \end{cases} \tag{1.280}$$

Доказательство. Достаточно вычислить первый из интегралов, так как второй сводится к нему с помощью замены переменной $x = \pi/2 - y$. Для вычисления первого из них обозначим его J_m и проинтегрируем по частям:

$$J_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\, d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{m-1} \cos^2 x\,dx.$$

Проинтегрированное слагаемое обращается в нуль. Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим равенство

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m.$$

Решая это уравнение относительно J_m, выведем рекуррентную формулу

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}.$$

Последовательное применение этой формулы приводит к равенству

$$J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} J_0 \quad \text{или} \quad J_m = \frac{(m-1)!!}{m!!} J_1$$

в зависимости от того, четно m или же нечетно. Непосредственное вычисление J_0 и J_1 приводит к нужному результату. □

Лемма 1.49. *При $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$0 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{12n(n+1)}. \tag{1.281}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

и с помощью второго равенства из теоремы 1.56 разложим ее в степенной ряд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

После этого запишем

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2/(2n+1)}\ln\frac{1+1/(2n+1)}{1-1/(2n+1)} - 1 =$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}.$$

Отсюда сразу следует левое неравенство (1.281). Правое неравенство получается так:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}} < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{12n(n+1)}. \quad \square$$

Перейдем теперь к основному результату.

Теорема 1.165 (формула Стирлинга).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{1.282}$$

Доказательство. Обозначим

$$x_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \tag{1.283}$$

и докажем, что эта последовательность сходится.

Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2}, \quad \text{то} \quad \ln\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Поэтому в силу левого неравенства (1.281)

$$\ln(x_{n+1}/x_n) > 0, \quad x_{n+1} > x_n.$$

С другой стороны, в силу правого неравенства (1.281)

$$\ln\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Суммируя по n, получим

$$\ln\frac{x_n}{x_1}=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x_{k+1}}{x_k}<\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<1$$

и $x_n<ex_1$. Итак, последовательность x_n возрастает, ограничена сверху и поэтому сходится.

Обозначим предел этой последовательности $a:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ и найдем этот предел с помощью формул Валлиса (1.280).

Из очевидных неравенств

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx<\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}x\,dx$$

и (1.280) вытекает, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2n+1}=\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}<\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{2n}.$$

Поэтому существует такое число $\theta_n\in(0,1/2)$, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi n+\theta_n\pi}.$$

Так как $(2n)!!=2^n n!$ и $(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$, то

$$n!=\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n x_n},\quad (2n)!=\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}x_{2n}}.$$

Это означает, что

$$\frac{x_{2n}}{x_n^2}\sqrt{\frac{n}{2}}=\sqrt{n\pi+\theta_n\pi}.$$

Поделим обе части на $\sqrt{n/2}$ и, перейдя к пределу, получим $a=1/\sqrt{2\pi}$. $\square$

Метод доказательства дает также оценку для скорости сходимости в формуле Стирлинга. В самом деле,

$$\ln\frac{x_{n+m}}{x_n}<\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{n+m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right).$$

Перейдя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим $-\ln\sqrt{2\pi}x_n \leqslant 1/(12n)$. Таким образом,

$$0 < 1 - \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} < \exp\left(-\frac{1}{12n}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Интеграл вероятностей

Интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx \tag{1.284}$$

часто встречается в математике (например, в теории вероятностей и в теории уравнений с частными производными). С его помощью можно выразить так называемую функцию распределения нормальной случайной величины. Поэтому его называют **интегралом вероятностей** (иногда используется название «**интеграл Эйлера – Пуассона**»).

В следующей теореме вычислим этот интеграл и установим его связь с гамма-функцией.

Теорема 1.166. *Справедливы следующие равенства:*

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{1.285}$$

Доказательство. Выполним замену переменной в интеграле (1.284):

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = ut \\ dx = udt \end{bmatrix} = \int\limits_0^\infty ue^{-u^2t^2}dt.$$

Умножим обе части этого равенства на e^{-u^2} и проинтегрируем по $u \in (0, +\infty)$:

$$\left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}dt\,du =$$

$$= \int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}du = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

(вычисление внутреннего интеграла приведено ниже).

Второе из равенств (1.285) получается из первого заменой $x^2 = t$:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty t^{1/2}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{1.286}$$

Обоснуем перемену порядка интегрирования с помощью теоремы 1.157. Необходимо проверить непрерывность сходящихся несобственных интегралов

$$I(u) = \int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,dt, \quad J(u) = \int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,du.$$

Оба эти интеграла легко вычисляются с помощью простых замен переменной:

$$\int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,dt = ue^{-u^2}\int\limits_0^\infty e^{-t^2u^2}\,dt = \left[\begin{array}{c} s = ut \\ ds = u\,dt \end{array}\right] = e^{-u^2}\int\limits_0^\infty e^{-s^2}\,ds,$$

$$\int\limits_0^\infty ue^{-(1+t^2)u^2}\,du = \left[\begin{array}{c} s = (1+t^2)u^2 \\ ds = 2u(1+t^2)\,du \end{array}\right] = \frac{1}{2(1+t^2)}\int\limits_0^\infty e^{-s}\,ds = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

а их непрерывность очевидна. □

1.13. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$

1.13.1. Построение меры Жордана

Ближайшей задачей является обобщение важнейших геометрических понятий — длина (на прямой), площадь (на плоскости), объем (в трехмерном пространстве) на более широкие классы множеств, а также на пространства $\mathbb{R}^d$ любых размерностей $d \in \mathbb{N}$.

Основная идея такова: перечисленные понятия естественным образом определены изначально только на простых множествах (отрезок на прямой, прямоугольник на плоскости, параллелепипед в трехмерном пространстве). Исходя из этого определения они будут распространены в несколько этапов на более сложно устроенные множества.

Мера сегмента

Введем обозначения

$$\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad E \subset \mathbb{R}^d \tag{1.287}$$

(растяжение множества),

$$x_0 + E = \{x_0 + x : x \in E\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad E \subset \mathbb{R}^d \tag{1.288}$$

(сдвиг множества).

Напомним также (см. п. 1.150), что d-мерным сегментом (порожденным парой $a \in \mathbb{R}^d$ и $b \in \mathbb{R}^d$) называется множество

$$\overline{I} = \overline{I}_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \quad k = 1, \ldots, d\right\}.$$

Пустое множество также будем считать сегментом.

Замечание 1.1. Временно используется следующая терминология. Два сегмента $\overline{I}$ и $\overline{J}$ будем называть **неналегающими**, если их внутренности не пересекаются, т. е. $I \cap J = \varnothing$. Конечный набор сегментов называется **дизъюнктным**, если любые два из них являются неналегающими. Для объединения дизъюнктных сегментов будем использовать тот же знак $\sqcup$, что и для объединения непересекающихся множеств (см. подп. 1.1.2).

Следующее определение совершенно естественно, до сих пор оно использовалась при $d = 1, 2, 3$.

Определение 1.126. ***Мерой сегмента*** $\overline{I} = \overline{I}_{a,b}$ *называется число*

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k), \quad \mu(\varnothing) = 0. \tag{1.289}$$

Отметим очевидные свойства меры сегмента, связанные со сдвигами и растяжениями:

$$\mu\left(\lambda\overline{I}\right)=|\lambda|^d\,\mu\left(\overline{I}\right),\quad \mu\left(c+\overline{I}\right)=\mu\left(\overline{I}\right). \tag{1.290}$$

В доказательствах часто будет использоваться следующее простое наблюдение. Пусть заданы сегмент $\overline{I}\subset\mathbb{R}^d$, номер координаты $i\in\mathbb{N}$, $1\leqslant i\leqslant d$, и число $c\in\mathbb{R}$. Тогда гиперплоскость

$$\left\{x\in\mathbb{R}^d : x_i=c\right\}$$

разбивает сегмент $\overline{I}$ на неналегающие сегменты $\overline{I}_1$ и $\overline{I}_2$ (рис. 1.45):

$$\overline{I}=\overline{I}_1\sqcup\overline{I}_2,\quad \overline{I}_1=\left\{x\in\overline{I} : a_i\leqslant x_i\leqslant c\right\},\quad \overline{I}_2=\left\{x\in\overline{I} : c\leqslant x_i\leqslant b_i\right\}.$$

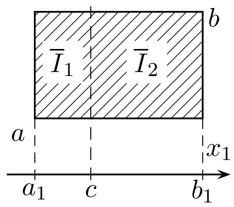

Рис. 1.45

При этом справедливо равенство $\mu\left(\overline{I}\right)=\mu\left(\overline{I}_1\right)+\mu\left(\overline{I}_2\right)$. В самом деле,

$$\mu\left(\overline{I}_1\right)+\mu\left(\overline{I}_2\right)=(c-a_i)\prod_{k=1,\,k\neq i}^{d}(b_k-a_k)+(b_i-c)\prod_{k=1,\,k\neq i}^{d}(b_k-a_k)=$$

$$=\left[(c-a_i)+(b_i-c)\right]\prod_{k=1,\,k\neq i}^{d}(b_k-a_k)=\prod_{k=1}^{d}(b_k-a_k)=\mu\left(\overline{I}\right).$$

Кроме того, часто будет использоваться выражение «через все грани сегмента $\overline{I}=\overline{I}_{a,b}$ проведем гиперплоскости». Это означает, что проводятся все гиперплоскости вида

$$\left\{x\in\mathbb{R}^d : x_k=a_k\right\},\quad \left\{x\in\mathbb{R}^d : x_k=b_k\right\},\quad k=1,\,\ldots,d.$$

Следующая группа свойств меры сегмента является чрезвычайно важной. Именно за справедливостью этой группы свойств меры необходимо следить при расширении понятия меры на более широкий класс множеств.

Лемма 1.50 (свойства меры сегмента). 1) *Если* $\overline{I} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i$ *— дизъюнктное разложение* $\overline{I}$, *то*

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right) \quad \textit{(аддитивность).}$$

2) *Если* $\left\{\overline{I}_i\right\}_{i=1}^{n}$ *— дизъюнктное семейство сегментов и* $\bigsqcup_{k=1}^{n} \overline{I}_k \subset \overline{I}$, *то*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right) \leqslant \mu\left(\overline{I}\right) \quad \textit{(монотонность).}$$

3) *Если* $\overline{I} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i$, *то*

$$\mu\left(\overline{I}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right) \quad \textit{(субаддитивность).}$$

Доказательство. 1) Из замечания перед формулировкой леммы это утверждение вытекает для случая, когда сегмент разбивается на два с помощью гиперплоскости. Поэтому в общем случае надо провести через грани всех сегментов $\left\{\overline{I}_i\right\}_{i=1}^{n}$ гиперплоскости и последовательно применить уже доказанный случай.

2) Снова проведем гиперплоскости через все грани сегментов $\left\{\overline{I}_i\right\}_{i=1}^{n}$, тогда для $\overline{I}$ имеет место разложение на сегменты, включающее все $\left\{\overline{I}_i\right\}_{i=1}^{n}$

$$\overline{I} = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i\right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} \overline{J}_j\right)$$

с некоторыми сегментами $\left\{\overline{J}_i\right\}_{j=1}^{m}$. Поэтому в силу уже доказанного свойства аддитивности

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\overline{J}_j\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right).$$

3) Обозначим $\overline{J}_i = \overline{I} \cap \overline{I}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и через грани всех сегментов $\left\{\overline{J}_i\right\}_{i=1}^{n}$ проведем гиперплоскости, определяя дизъюнктные разложения этих сегментов:

$$\overline{J}_i = \bigsqcup_{j=1}^{l_i} \overline{J}_{ij}.$$

Сегменты $\overline{J}_{ij}$ могут входить в различные $\overline{J}_i$ (если последние пересекаются), поэтому надо избавиться от «лишних». Для этого определим множества индексов A_l ($l = 1, \ldots, n$) следующим образом: $A_1 = \{1, \ldots, l_1\}$ и для $i = 2, \ldots, n$

$$\bigcup_{j \in A_i} \overline{J}_{ij} = \overline{\overline{J}_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} \bigcup_{j \in A_k} \overline{J}_{ij} \right)}$$

(в A_i включаются номера тех сегментов $\overline{J}_{ij}$, которые не были выбраны на предыдущих шагах).

Таким образом, получено дизъюнктное разложение

$$\overline{I} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j \in A_i} \overline{J}_{ij}.$$

Теперь нужное утверждение получается применением свойств аддитивности и (дважды) монотонности:

$$\mu\left(\overline{I}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in A_i} \mu\left(\overline{J}_{ij}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{J}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right). \quad \square$$

Фигура и ее мера

Сейчас введем меру для более широкого класса множеств.

Определение 1.127. ***Фигурой*** *или элементарным множеством будем называть любое конечное объединение сегментов (рис. 1.46).*

Класс всех фигур обозначим $\mathcal{F}$.

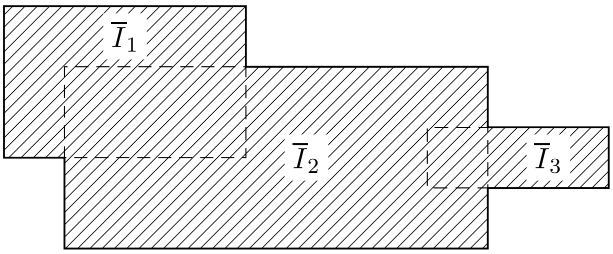

Рис. 1.46. Фигура

Ясно, что любой сегмент является фигурой, в частности $\varnothing \in \mathcal{F}$.

Терминологию из замечания 1.1 мы будем использовать и для фигур.

Лемма 1.51 (свойства фигур). 1) *Для любых фигур $X, Y \in \mathcal{F}$ множества $X \cup Y$, $X \cap Y$, $\overline{X \setminus Y}$ также являются фигурами.*

2) *Каждая фигура компактна.*

3) *Для любой фигуры $X \in \mathcal{F}$ существует дизъюнктное разложение*

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i.$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны (рекомендуется доказать их самостоятельно).

Доказательство свойства 3) проходит так же, как и при обосновании части 3) в лемме 1.50 (рис. 1.47). Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i$, тогда через грани всех сегментов $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ проведем гиперплоскости, определяя дизъюнктные разложения этих сегментов:

$$\overline{I}_i = \bigsqcup_{j=1}^{l_i} \overline{I}_{ij}.$$

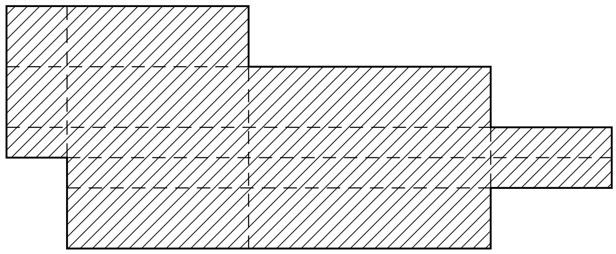

Рис. 1.47. Дизъюнктное разложение фигуры

Далее избавимся от «лишних» $\overline{I}_{ij}$, определяя множества индексов A_l $(l = 1, \ldots, n)$ следующим образом: $A_1 = \{1, \ldots, l_1\}$ и для $i = 2, \ldots, n$

$$\bigcup_{j \in A_i} \overline{I}_{ij} = \overline{I}_i \setminus \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{i-1} \bigcup_{j \in A_k} \overline{I}_{ij} \right)}$$

(в A_i включаются номера тех сегментов $\overline{I}_{ij}$, которые не были выбраны на предыдущих шагах). Таким образом, получено дизъюнктное разложение

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j \in A_i} \overline{I}_{ij}. \quad \square$$

Отметим, что разложение фигуры из 3) в лемме 1.51 не определяется однозначно (можно, например, «измельчать» сегменты из данного дизъюнктного разложения).

Определение 1.128. ***Мерой фигуры*** $X \in \mathcal{F}$ *называется*

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{I}_i\right),$$

где $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i$ *— любое дизъюнктное разложение фигуры* X.

Упражнение 1.53. Доказать следующие утверждения:

1) мера фигуры не зависит от выбора ее дизъюнктного разложения;

2) если $X \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^d$, то $\mu(\lambda X) = |\lambda|^d \mu(X)$, $\mu(c + X) = \mu(X)$.

Лемма 1.52 (свойства меры фигуры). 1) *Если* $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ *— дизъюнктное семейство фигур, то*

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(X_i) \quad \textit{(аддитивность).}$$

2) *Если* $X \subset Y$, $X, Y \in \mathcal{F}$, *то* $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$ *(монотонность).*

3) *Для любого конечного набора фигур* $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \mu(X_i) \quad \textit{(субаддитивность).}$$

Доказательство. 1) Если $X_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}$ — дизъюнктное разложение фигуры X_i $(i = 1, \ldots, n)$, то $\bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}$ — дизъюнктное разложение фигуры $\bigsqcup_{i=1}^n X_i$ и по определению меры фигуры

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n X_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n_i} \overline{I}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \mu\left(\overline{I}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \mu(X_i).$$

2) Так как $Y = (Y \setminus X) \sqcup X$, то $Y = \left(\overline{Y \setminus X}\right) \sqcup X$ (фигуры справа не налегают), поэтому в силу утверждения 1)

$$\mu(Y) = \mu\left(\overline{Y \setminus X}\right) + \mu(X) \geqslant \mu(X).$$

3) Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Из $X_1 = (X_1 \setminus X_2) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ следует $X_1 = \left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ (фигуры справа не налегают), поэтому в силу утверждения 1)

$$\mu(X_1) = \mu\left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) + \mu(X_1 \cap X_2).$$

Точно так же

$$\mu(X_2) = \mu\left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) + \mu(X_1 \cap X_2).$$

Наконец, $X_1 \cup X_2 = \left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) \sqcup \left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) \sqcup (X_1 \cap X_2)$ и

$$\mu(X_1 \cup X_2) = \mu\left(\overline{X_1 \setminus X_2}\right) + \mu\left(\overline{X_2 \setminus X_1}\right) + \mu(X_1 \cap X_2) =$$

$$= \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2) \leqslant \mu(X_1) + \mu(X_2).$$

Осталось провести индукцию по числу слагаемых. $\square$

Мера Жордана

Определение 1.129. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда величины (рис. 1.48)*

$$\mu_* (E) = \sup \{\mu (X) : X \subset E, \quad X \in \mathcal{F}\}, \tag{1.291}$$

$$\mu^* (E) = \inf \{\mu (Y) : E \subset Y, \quad Y \in \mathcal{F}\}, \tag{1.292}$$

называются соответственно ***внутренней и внешней мерами Жордана*** *для E.*

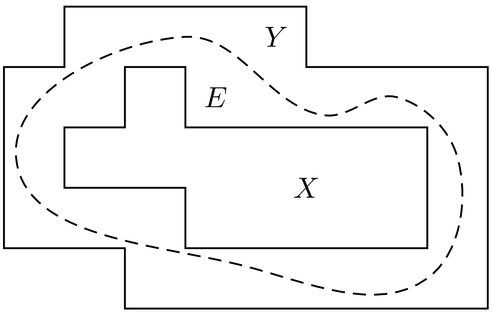

Рис. 1.48

Лемма 1.53. *Для любого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^d$*

$$\mu_* (E) \leqslant \mu^* (E). \tag{1.293}$$

Доказательство. Если $X \subset E \subset Y$ $(X, Y \in \mathcal{F})$, то $\mu (X) \leqslant \mu (Y)$ в силу свойства монотонности меры фигуры (лемма 1.52). В этом неравенстве надо сначала перейти к точной верхней грани по всем фигурам $X \subset E$, а затем к точной нижней грани по всем фигурам $Y \supset E$. □

Определение 1.130. *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***измеримым по Жордану****, если $\mu_* (E) = \mu^* (E)$. В таком случае общее значение внутренней и внешней мер множества называется* ***мерой Жордана*** *и обозначается*

$$\mu (E) = \mu_* (E) = \mu^* (E).$$

Упражнение 1.54. Доказать следующие утверждения:

1) фигура измерима по Жордану и ее мера Жордана совпадает с мерой из определения 1.128;

2) если $X \in \mathcal{F}$ — фигура, то $\operatorname{int} X$ измерима и $\mu (\operatorname{int} X) = \mu (X)$;

3) множество $[0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d$ неизмеримо по Жордану;

4) если E — ограниченное множество и $\mu^* (E) = 0$, то E измеримо;

5) конечное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль.

Теорема 1.167 (критерий измеримости). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченное множество. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *E измеримо;*
2) *$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, X \subset E \subset Y \quad \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$;*
3) *$\mu(\partial E) = 0$.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуры $X \subset E$ и $Y \supset E$ так, чтобы $\mu(X) > \mu_*(E) - \varepsilon/2$, $\mu(Y) < \mu^*(E) + \varepsilon/2$. Тогда $\mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуры $X \subset E$ и $Y \supset E$ так, чтобы $\mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$, и положим $V = \overline{Y \setminus X}$. Тогда $Y = X \sqcup V$ (фигуры справа не налегают), поэтому в силу утверждения 1) леммы 1.52 $\mu(V) = \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$.

Далее так как $\overline{E} \subset Y$ и $\overline{E}^c \subset X^c$, то

$$\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} \subset Y \cap \overline{X^c} \subset \overline{Y \setminus X}.$$

Следовательно, $\partial E \subset V$ и $\mu(\partial E) = 0$.

3) $\Longrightarrow$ 1). Для $\varepsilon > 0$ найдем фигуру V так, чтобы $\partial E \subset \operatorname{int} V$, $\mu(V) < \varepsilon$. Положим $Y = \overline{E} \cup V$, $X = \overline{Y \setminus V}$ и покажем, что Y — фигура.

Если $x \in \overline{E}$, то либо $x \in \partial E$ (и тогда $x \in \operatorname{int} V$), либо $x \in \operatorname{int} E$ и найдется открытый куб Q_x содержащий точку x, причем $\overline{Q}_x \subset \operatorname{int} E$. Множество $\overline{E}$ замкнуто и ограничено, а потому компактно по теореме Гейне – Бореля 1.98.

Открытые множества $\{Q_x\}_{x \in \operatorname{int} E}$ и $\operatorname{int} V$ образуют покрытие компакта $\overline{E}$, из которого можно выделить конечное подпокрытие

$$\overline{E} \subset Q_{x_1} \cup \ldots \cup Q_{x_m} \cup \operatorname{int} V.$$

Пусть $X = Q_{x_1} \cup \ldots \cup Q_{x_m}$, тогда ясно, что $X \in \mathcal{F}$ и $Y = V \cup X$ и $Y \in \mathcal{F}$. Кроме того, в силу субаддитивности меры фигуры (утверждение 3) в лемме 1.52)

$$\mu(Y) \leqslant \mu(X) + \mu(V) \quad \text{или} \quad \mu(Y) - \mu(X) = \mu(V) < \varepsilon.$$

Наконец, по лемме 1.53 для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant \mu^*(E) - \mu_*(E) \leqslant \mu(Y) - \mu(X) < \varepsilon$$

и $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. $\square$

Свойства меры Жордана

В подп. 1.5.7 была получена формула для вычисления площади криволинейной трапеции, хотя тогда понятие площади еще не было дано. Теперь площадь будет пониматься как мера Жордана. В следующей теореме будет установлено, что такое понимание площади в формуле (1.124) было правильным.

Теорема 1.168. *Пусть задана неотрицательная функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. *Тогда следующие условия равносильны:*

1) *криволинейная трапеция*

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

измерима;

2) $f \in R[a, b]$.

Если $f \in R[a, b]$, *то*

$$\mu(T) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1.294}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения (1.105)–(1.107). Пусть $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ — любое разбиение $[a, b]$. Рассмотрим две фигуры:

$$X(\Pi) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, m_k] \quad \text{и} \quad Y(\Pi) = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]\,.$$

Эти фигуры обладают свойствами

$$X(\Pi) \subset T \subset Y(\Pi), \quad \mu\left(X(\Pi)\right) = s_*(\Pi), \quad \mu\left(Y(\Pi)\right) = s^*(\Pi).$$

Отсюда мгновенно вытекают неравенства

$$I_* \leqslant \mu_*\left(T\right) \leqslant \mu^*\left(T\right) \leqslant I^*,$$

из которых получим утверждение 2) $\Longrightarrow$ 1) и равенство (1.294) — если $f \in R[a, b]$, то $I_* = I^*$ и по теореме 1.68 $I_* = \mu_*\left(T\right) = \mu^*\left(T\right) = I^*$.

1) $\Longrightarrow$ 2). Если криволинейная трапеция T измерима, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$, что некоторая фигура вида

$$Y = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times \left[y_k^1, y_k^2\right]$$

содержит график функции

$$\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\right\},$$

причем $\mu\left(Y\right) < \varepsilon$. Так как $\Gamma_f \subset Y$, то $y_k^1 \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant y_k^2$. Поэтому

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant s^*(\Pi) - s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \mu\left(Y\right) < \varepsilon,$$

следовательно, $I_* = I^*$ и по теореме 1.68 $f \in R[a, b]$. $\square$

Следующая теорема показывает, что обычные операции над измеримыми множествами приводят снова к измеримым множествам.

Теорема 1.169 (измеримость и операции). *Если множества* E_1, E_2 *измеримы, то измеримы также множества* $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$.

Доказательство вытекает из теоремы 1.167 и очевидных включений

$$\partial (E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2, \quad \partial (E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2,$$
$$\partial (E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2. \quad \square$$

Итог развития понятия меры Жордана — следующие свойства меры, которые постоянно контролировались на каждом шаге ее построения.

Теорема 1.170 (свойства меры Жордана). 1) *Для любого конечного набора измеримых множеств* $\{E_k\}_{k=1}^n$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \textit{(субаддитивность).}$$

2) *Если множества* $E_1, \ldots, E_n$ *измеримы и попарно не пересекаются, то*

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \textit{(аддитивность).}$$

3) *Если множества* E_1, E_2 *измеримы и* $E_1 \subset E_2$, *то* $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$ *(монотонность).*

Доказательство. 1) Рассмотрим случай двух множеств. Возьмем любые фигуры $Y_i \supset E_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда $E_1 \cup E_2 \subset Y_1 \cup Y_2$ и в силу п. 3) леммы 1.52

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(Y_1 \cup Y_2) \leqslant \mu(Y_1) + \mu(Y_2).$$

Перейдя к точной нижней границе по Y_i, получим

$$\mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Итак, для двух множеств утверждение доказано. Общий случай получается индукцией по числу слагаемых.

2) Снова рассмотрим случай двух множеств. Пусть $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Возьмем любые фигуры $X_i \subset E_i$ $(i = 1, 2)$, тогда $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Так как $E_1 \cup E_2 \supset X_1 \cup X_2$, то в п. 2) леммы 1.52

$$\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2).$$

Перейдя к точной верхней грани по всем таким фигурам X_i, получим неравенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

Противоположное неравенство вытекает из уже доказанного свойства субаддитивности.

3) Запишем $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$, тогда множества справа не пересекаются и можно использовать доказанное свойство 2):

$$\mu(E_2) = \mu(E_2 \setminus E_1) + \mu(E_1) \geqslant \mu(E_1). \quad \square$$

1.13.2. Определение и условия интегрируемости

На основе меры Жордана построим теорию интегрирования по измеримым множествам в $\mathbb{R}^d$, аналогичную той, с которой имели дело ранее при $d = 1$. Следует отметить, однако, что даже в одномерном случае эта теория богаче, так как можно будет интегрировать по любому измеримому множеству, а не только по отрезку.

Схема изложения и доказательства в значительной степени будет повторять материал по теории интеграла Римана из гл. 1.5.

Однако имеются и новые важные моменты: новый критерий интегрируемости в терминах массивности множества точек разрыва функции; связь интегралов по множествам различных размерностей; формула замены переменной в многомерном случае доказывается существенно сложнее, чем раньше в одномерном случае.

Определение интеграла Римана

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество, причем $\mu(E) > 0$. Система непустых множеств $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ называется **разбиением множества** E, если выполнены следующие условия:

1) E_k измеримы и $\mu(E_k) > 0$, $k = 1, \ldots, n$;

2) $E_k \cap E_i = \varnothing$ при $k \neq i$;

3) $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$.

Число

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \operatorname{diam} E_k$$

называется **рангом разбиения** Π.

Если для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксировать точку $\xi_k \in E_k$ и обозначить набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то пара (Π, ξ) называется **разбиением множества** E **с отмеченными точками**.

Если на множестве E задана функция f, то для любого разбиения (Π, ξ) с отмеченными точками определим **интегральную сумму** (Римана), соответствующую разбиению (Π, ξ):

$$s = s(\Pi, \xi) = s_f(\Pi, \xi, E) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\, \mu(E_k). \tag{1.295}$$

Определение 1.131. *Будем говорить, что число I является* ***пределом интегральных сумм****, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon. \tag{1.296}$$

Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} s$.

Если такой предел существует, то он называется ***интегралом Римана*** *функции f по множеству E и обозначается*

$$I = \int\limits_E f(x)\, dx = \int\limits_E f\, d\mu. \tag{1.297}$$

В этом случае говорим также, что функция f ***интегрируема по Риману*** *на E. Класс всех интегрируемых на E функций обозначим $R(E)$.*

Как и в одномерном случае, нетрудно показать, что интегрируемая функция необходимо является ограниченной, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Суммы Дарбу и их свойства

Аналогично одномерному случаю (см. п. 1.5.3 гл. 1.5) рассматривается вопрос о проверке интегрируемости с помощью сумм Дарбу.

Пусть Π — произвольное разбиение множества E. Величины

$$s_*(\Pi) = \inf_\xi s(\Pi, \xi), \qquad s^*(\Pi) = \sup_\xi s(\Pi, \xi)$$

называются соответственно **нижней** и **верхней суммами Дарбу** для f, отвечающими заданному разбиению Π.

Как и в одномерном случае,

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^n m_k \mu\,(E_k)\,, \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^n M_k \mu\,(E_k)\,, \quad \text{где}$$

$$m_k = \inf f\,(E_k)\,, \quad M_k = \sup f\,(E_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Условимся в дальнейшем говорить, что разбиение Π содержится в разбиении Π', если каждое множество из Π является объединением некоторых множеств из Π'.

Лемма 1.54. 1) *Для любого разбиения с отмеченными точками* (Π, ξ)

$$s_*(\Pi) \leqslant s\,(\Pi, \xi) \leqslant s^*(\Pi).$$

2) *Если разбиение Π содержится в разбиении Π', то*

$$s_*(\Pi) \leqslant s_*(\Pi'), \qquad s^*(\Pi') \leqslant s^*(\Pi).$$

3) *Для любых разбиений Π и Π'*

$$s_*(\Pi) \leqslant s^*(\Pi').$$

Интегралы Дарбу и их свойства

Величины
$$I_* = \sup_{\Pi} s_*(\Pi), \quad I^* = \inf_{\Pi} s^*(\Pi)$$
называются соответственно **нижним** и **верхним интегралами Дарбу** функции f на множестве E.

Лемма 1.55. 1) *Для любых разбиений* Π *и* Π'
$$s_*(\Pi) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant s^*(\Pi').$$

2) $I_* = \lim\limits_{\lambda \to 0} s_*(\Pi), \quad I^* = \lim\limits_{\lambda \to 0} s^*(\Pi).$

Леммы 1.54 и 1.55 доказываются без каких-либо изменений по сравнению с одномерным случаем (см. леммы 1.18–1.20 в гл. 1.5). Это же относится к следующему критерию интегрируемости, который является полным повторением теоремы 1.68 гл. 1.5.

Теорема 1.171 (критерий интегрируемости). *Для любой ограниченной функции* $f : E \to \mathbb{R}$ *следующие условия равносильны:*

1) f *интегрируема на* E*;*
2) $\lim\limits_{\lambda \to 0} (s^*(\Pi) - s_*(\Pi)) = 0$*;*
3) $I_* = I^*$.

Условие 2) в теореме 1.171 удобно использовать также в виде
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \mu(E_k) = 0, \tag{1.298}$$
где ω_k — колебание функции f на множестве E_k.

Упражнение 1.55. Доказать следующие утверждения:

1) если E — компактное множество, измеримое по Жордану и $f \in C(E)$, то $f \in R(E)$;

2) если множество E измеримо по Жордану, функция f ограничена на E и ее множество точек разрыва имеет меру Жордана нуль, то $f \in R(E)$.

Критерий Лебега

Все достаточные условия интегрируемости из упражнений 1.55 (и из теоремы 1.69 в одномерном случае) означают, что функция интегрируема, если множество ее точек разрыва «не очень велико».

Приведем точную форму массивности множества точек разрыва функции, обеспечивающую ее интегрируемость. Для этого потребуется следующее новое понятие.

Определение 1.132. *Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^d$ имеет* ***лебегову меру нуль****, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное или счетное множество интервалов $\{I_k\}$, удовлетворяющее условиям*

$$E \subset \bigcup_k I_k, \quad \sum_k \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Упражнение 1.56. Доказать следующие утверждения:

1) если мера Жордана множества равна нулю, то оно имеет также и лебегову меру нуль, в частности, это относится к любому конечному множеству;

2) множество $\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d$ неизмеримо по Жордану (см. утверждение 4) в упражнении 1.54), однако имеет лебегову меру нуль;

3) конечное или счетное объединение множеств лебеговой меры нуль также имеет лебегову меру нуль.

Напомним (см. (1.47)), что колебанием функции f на множестве E называется

$$\omega(E) = \omega_f(E) = \sup f(E) - \inf f(E).$$

Введем **колебание функции** $f : E \to \mathbb{R}$ **в точке** $x_0 \in E$ как

$$\omega(x_0) = \omega_f(x_0) := \lim_{\delta \to +0} \omega_f\left(E \cap B(x_0, \delta)\right). \tag{1.299}$$

Упражнение 1.57. Доказать следующие утверждения:

1) функция $\delta \mapsto \omega_f(E \cap B(x_0, \delta))$ убывает (поэтому предел в (1.299) существует и определение колебания в точке корректно);

2) непрерывность функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in E$ равносильна условию $\omega_f(x_0) = 0$.

В доказательстве следующей теоремы для интервала I и $\lambda > 0$ будет использоваться обозначение λI для концентрического с I интервала, центр которого совпадает с центром интервала I, а длины ребер равны соответствующим длинам ребер I, умноженным на λ.

Теорема 1.172 (Лебега). *Если множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану и функция $f : E \to \mathbb{R}$ ограничена, то следующие условия равносильны:*

1) *$f \in R(E)$;*

2) *множество точек разрыва функции f имеет лебегову меру нуль.*

Доказательство. 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $D \subset E$ — множество точек разрыва функции f. Тогда, обозначив при $s \in \mathbb{N}$

$$D_s = \left\{ x \in E : \omega(x) > \frac{1}{s} \right\},$$

получим

$$D = \{x \in E : \omega(x) > 0\} = \bigcup_{s=1}^{\infty} D_s.$$

Из утверждения 3) упражнения 1.56 следует, что достаточно доказать равенство $\mu(D_s) = 0$ для каждого $s \in \mathbb{N}$.

Так как $f \in R(E)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^n$ множества E со свойством

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) < \frac{\varepsilon}{s}.$$

Введем обозначения

$$\Lambda = \left\{k \in \mathbb{N} : \omega(E_k) \geqslant \frac{1}{s}\right\}, \quad A = \bigcup_{k \in \Lambda} E_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{n} \partial E_k$$

и покажем, что

$$D_s \subset A \cup B. \tag{1.300}$$

Пусть $x \in D_s$, тогда $x \in E_k$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $x \in \partial E_k$, то $x \in B$. В противном случае $x \in \operatorname{int} E_k$, а тогда для достаточно малых $\delta > 0$ будет справедливо включение $E \cap B(x,\delta) \subset E_k$. Следовательно,

$$\omega(E_k) \geqslant \omega(E \cap B(x,\delta)) > \frac{1}{s}.$$

Последнее неравенство выполнено для достаточно малых $\delta > 0$, так как $x \in D_s$ и $\omega(x) > 1/s$. Итак, $\omega(E_k) > 1/s$ и $k \in \Lambda$, поэтому $x \in A$. Таким образом, включение (1.300) доказано.

Ясно, что $\mu(B) = 0$, так как B — конечное объединение множеств меры нуль (см. теорему 1.167). Кроме того,

$$\frac{\varepsilon}{s} > \sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \geqslant \sum_{k \in \Lambda} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \geqslant \frac{1}{s}\mu(A)$$

и $\mu(A) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\mu^*(D_s) \leqslant \mu^*(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) = \mu(A) < \varepsilon$$

(в силу измеримости A и B объединение $A \cup B$ измеримо). Таким образом, $\mu^*(D_s) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $\mu(D_s) = 0$, что и требовалось.

2) $\Longrightarrow$ 1). Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем конечный или счетный набор открытых кубов $\{Q_k\}$ так, чтобы

$$D \subset \bigcup_{k} Q_k, \quad \sum_{k} \mu(Q_k) < \varepsilon.$$

Далее для любой точки $x \in E \setminus D$ найдем открытый куб I_x с центром в точке x так, чтобы

$$\omega\left(E \cap I_x\right) < \varepsilon,$$

и пусть $I_x^* = 1/2 I_x$. По теореме 1.167 найдем фигуры X и Y так, чтобы

$$X \subset E \subset Y, \quad \mu\left(Y\right) - \mu\left(X\right) < \varepsilon.$$

Тогда множество $W = \overline{Y \setminus X}$ является фигурой (п. 1) леммы 1.51), представимая в виде дизъюнктного объединения сегментов $W = \bigsqcup_{i=1}^{m} \overline{J_i}$ в силу утверждения 4) леммы 1.51.

Совокупность открытых интервалов

$$\{Q_k, I_x^*\}_{k \in \mathbb{N}, x \in E \setminus D}$$

образует открытое покрытие компакта X, из которого можно выделить конечное подпокрытие X

$$Q_{k_1}, \, \ldots, Q_{k_p}, \quad I_{x_1}^*, \, \ldots, I_{x_q}^*.$$

Обозначим через δ_1 минимальное из ребер интервалов $I_{x_1}^*, \, \ldots, I_{x_q}^*$, δ_2 — минимальное из ребер интервалов $J_1, \, \ldots, J_m$, а также

$$\delta = \frac{1}{2} \min\left\{\delta_1, \delta_2\right\}.$$

Возьмем любое разбиение $\Pi = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества E с $\lambda_\Pi < \delta$ и покажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \omega\left(E_k\right) \mu\left(E_k\right) < c\varepsilon,$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая только от размерности d, функции f и множества E.

Для этого разобьем множества E_k на три группы. Если $E_k \cap W \neq \varnothing$, то $k \in \Lambda_1$. Остальные E_k целиком содержатся в X. Если $E_k \cap \bigcup_{i=1}^{q} I_{x_i}^* \neq \varnothing$, то $k \in \Lambda_2$. Наконец, множество номеров оставшихся E_k обозначим Λ_3, такие E_k целиком содержатся в $\bigcup_{i=1}^{p} Q_{k_i}$.

Если $k \in \Lambda_1$, то E_k пересекается с одним из J_i и

$$\bigcup_{k \in \Lambda_1} E_k \subset \bigcup_{i=1}^{m} 2J_i,$$

поэтому

$$\sum_{k \in \Lambda_1} \omega\left(E_k\right) \mu\left(E_k\right) \leqslant \omega(E) \mu\left(\bigcup_{k \in \Lambda_1} E_k\right) \leqslant 2^d \omega(E) \sum_{k=1}^{m} \mu\left(J_i\right) < 2^d \omega(E) \varepsilon.$$

Кроме того, так как для каждого $k \in \Lambda_2$ найдется такой номер i, что $E_k \subset 2I^*_{x_i} = I_{x_i}$, то $\omega(E_k) < \varepsilon$. Отсюда

$$\sum_{k\in\Lambda_2} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \varepsilon\mu(E).$$

Наконец, $E_k \subset \bigcup_{i=1}^{p} Q_{k_i}$ при $k \in \Lambda_3$ и

$$\sum_{k\in\Lambda_3} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \omega(E)\mu\Bigg(\bigcup_{k\in\Lambda_3} E_k\Bigg) \leqslant \omega(E)\mu\Bigg(\bigcup_{k\in\Lambda_3} Q_k\Bigg) < \omega(E)\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(E_k)\,\mu(E_k) \leqslant \left[2^{d+1}\omega(E) + \mu(E)\right]\varepsilon$$

и по критерию интегрируемости (теорема 1.171) $f \in R(E)$. □

Свойства интеграла

Удобно дополнить определение 1.131 таким соглашением (ср. с определением 1.68): если $\mu(E) = 0$, то положим

$$\int\limits_E f\,dx = 0.$$

Следующая теорема представляет собой коллекцию важнейших и наиболее употребительных свойств интеграла. Доказательства этих свойств ничем не отличаются от соответствующих рассуждений в гл. 1.5 (проверьте это самостоятельно).

Теорема 1.173 (свойства интеграла). 1) *Если* $\mu(E) = 0$, *то на* E *интегрируема любая функция и* $\int\limits_E f\,dx = 0$.

2) *Если* E *измеримо по Жордану, то* $\int\limits_E dx = \mu(E)$.

3) *Если* $f \in R(E)$ *и* $A \subset E$ *— измеримое по Жордану подмножество, то* $f \in R(A)$.

4) *Если функция* f *интегрируема на каждом из множеств* E_1 *и* E_2, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, *то она интегрируема на* $E_1 \sqcup E_2$ *и*

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f\,dx = \int\limits_{E_1} f\,dx + \int\limits_{E_2} f\,dx.$$

5) *Пусть функции* f *и* g *заданы на множестве* E, *измеримом по Жордану, и жорданова мера множества* $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ *равна нулю. Тогда если* $f \in R(E)$, *то* $g \in R(E)$ *и их интегралы Римана совпадают.*

6) *Если функции* $f, g \in R(E)$, *то* $fg \in R(E)$, *кроме того, при* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *линейная комбинация* $\alpha f + \beta g \in R(E)$ *и*

$$\int\limits_E (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_E f\, dx + \beta \int\limits_E g\, dx.$$

7) *Если* $f, g \in R(E)$ *и* $f(x) \leqslant g(x)$ *на* E, *то*

$$\int\limits_E f\, dx \leqslant \int\limits_E g\, dx.$$

8) *Если* $f \in R(E)$, *то* $|f| \in R(E)$ *и*

$$\left|\int\limits_E f\, dx\right| \leqslant \int\limits_E |f|\, dx.$$

9) *Если* $f \in R(E)$ *и* $M = \sup f(E)$, $m = \inf f(E)$, *то*

$$m\mu(E) \leqslant \int\limits_E f\, dx \leqslant M\mu(E).$$

1.13.3. Кратные интегралы

Мера декартового произведения множеств

Для того чтобы отличать меры для разных пространств $\mathbb{R}^d$, будем писать в случае необходимости μ_d вместо μ.

Теорема 1.174. *Если множества* $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ $(i = 1, 2)$ *измеримы по Жордану, то* $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ *также измеримо по Жордану и*

$$\mu_{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \mu_{d_1}(E_1) \cdot \mu_{d_2}(E_2). \tag{1.301}$$

Доказательство. Для сегментов равенство (1.301) очевидно (см. определение 1.289).

Далее рассмотрим случай фигур: если $X_i = \bigsqcup_{k=1}^{n_i} I_k^i$ — дизъюнктное разложение фигур X_i, $i = 1, 2$, то

$$X_1 \times X_2 = \bigsqcup_{j=1}^{n_1} I_j^1 \times \bigsqcup_{k=1}^{n_2} I_k^2 = \bigsqcup_{j=1}^{n_1} \bigsqcup_{k=1}^{n_2} I_j^1 \times I_k^2 \quad —$$

дизъюнктное разложение фигуры $X_1 \times X_2$ и по уже доказанному для сегментов

$$\mu(X_1 \times X_2) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \mu\left(I_j^1 \times I_k^2\right) = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \left[\mu\left(I_j^1\right) \cdot \mu\left(I_k^2\right)\right] = \mu(X_1) \cdot \mu(X_2).$$

В общем случае рассуждаем так: если X_1 и X_2 — фигуры, $X_i \subset E_i$, то $X_1 \times X_2 \subset E_1 \times E_2$ и

$$\mu(X_1) \cdot \mu(X_2) = \mu(X_1 \times X_2) \leqslant \mu_*(E_1 \times E_2).$$

Переход к точной верхней грани по X_1 и X_2 дает неравенство

$$\mu(E_1) \cdot \mu(E_2) \leqslant \mu_*(E_1 \times E_2).$$

Точно так же доказывается неравенство

$$\mu^*(E_1 \times E_2) \leqslant \mu(E_1) \cdot \mu(E_2).$$

Отсюда $\mu^*(E_1 \times E_2) = \mu_*(E_1 \times E_2) = \mu(E_1) \cdot \mu(E_2)$. $\square$

Отметим для дальнейшего, что доказано также равенство

$$\int\limits_{E_1 \times E_2} d(x,y) = \mu_{d_1}(E_1) \cdot \mu_{d_2}(E_2). \tag{1.302}$$

Основная теорема

Теорема 1.175. *Пусть множества $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2$, измеримы по Жордану и $f \in R(E_1 \times E_2)$. Пусть $I^*(x)$ и $I_*(x)$ — соответственно верхний и нижний интегралы Дарбу для $\int\limits_{E_2} f(x,y)\,dy$.*

Тогда любая функция $I : E_1 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенствам

$$I_*(x) \leqslant I(x) \leqslant I^*(x), \quad x \in E_1,$$

интегрируема на E_1 и справедливо равенство

$$\int\limits_{E_1 \times E_2} f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_{E_1} I(x)\,dx. \tag{1.303}$$

Доказательство. Пусть $\Pi_1 = \left\{E_i^1\right\}_{i=1}^{n_1}$ и $\Pi_2 = \left\{E_j^2\right\}_{j=1}^{n_2}$ — любые разбиения множеств E_1 и E_2 соответственно, тогда $\Pi = \left\{E_i^1 \times E_j^2\right\}$ — разбиение множества $E_1 \times E_2$.

Из очевидного неравенства

$$I(x) \geqslant I_*(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n_2} \inf_{y \in E_j^2} f(x,y)\mu\left(E_j^2\right)$$

выводим следущее:

$$s_*(I, \Pi_1) = \sum_{i=1}^{n_1} \inf_{x \in E_i^1} I(x)\mu\left(E_i^1\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n_1} \inf_{x \in E_i^1} \sum_{j=1}^{n_2} \inf_{y \in E_j^2} f(x,y)\mu\left(E_j^2\right)\mu\left(E_i^1\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \inf_{(x,y)\in E_i^1\times E_j^2} f(x,y)\mu\left(E_i^1\right)\mu\left(E_j^2\right) = s_*(f,\Pi).$$

Аналогично доказывается, что $s^*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(f,\Pi)$. Таким образом,

$$s_*(f,\Pi) \leqslant s_*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(I,\Pi_1) \leqslant s^*(f,\Pi).$$

Крайние выражения в последних неравенствах сходятся к интегралу от f по $E_1 \times E_2$, поэтому к нему же сходятся и средние. Последнее означает, что $I \in R(E_1)$ и справедливость равенства (1.303). □

Может показаться странным, что в (1.303) справа под интегралом находится весьма произвольная функция, в то время как слева — вполне определенное число. На самом деле, в большинстве точек $x \in E_1$ выполнено равенство $I_*(x) = I^*(x)$. Покажем это.

Пусть для простоты E_1 — открытое множество. Тогда из теоремы 1.175 вытекает, что разность $g = I^* - I_* \in R(E_1)$ и

$$\int\limits_{E_1} [I^*(x) - I_*(x)]\, dx = 0.$$

Если $x_0 \in E_1$ — точка непрерывности g и $g(x_0) > 0$, то найдется такой куб

$$\overline{I}(x_0,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : \max_{1\leqslant k\leqslant d_1} |x_k - x_k^0| \leqslant \delta\}, \quad \delta > 0,$$

что

$$g(x) \geqslant \frac{g(x_0)}{2} > 0, \quad x \in \overline{I}(x_0,\delta) \subset E_1.$$

Отсюда $g(x_0) = 0$, потому что

$$0 = \int\limits_{E_1} [I_*(x) - I^*(x)]\, dx \geqslant \int\limits_{B(x_0,\delta)} g(x)\, dx \geqslant \frac{g(x_0)}{2}\mu\left(\overline{I}(x_0,\delta)\right).$$

В силу критерия Лебега (теорема 1.172) неравенство $I_*(x) \neq I^*(x)$ возможно лишь на подмножестве точек из E_1 лебеговой меры нуль.

Следствия из основной теоремы

Следствие 1.11. *Если множества $E_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1,2$, измеримы по Жордану и функция f ограничена и непрерывна на $E_1 \times E_2$, то*

$$\int\limits_{E_1\times E_2} f(x,y)\, d(x,y) = \int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2} f(x,y)\, dy\right) dx = \int\limits_{E_2}\left(\int\limits_{E_1} f(x,y)\, dx\right) dy.$$

Доказательство. Это непосредственное следствие теоремы 1.175, так как для каждого $x \in E_1$ функция $y \mapsto f(x, y)$, $y \in E_2$, интегрируема на E_2 (она непрерывна), поэтому (в обозначениях теоремы 1.175)

$$I(x) = I_*(x) = I^*(x) = \int\limits_{E_2} f(x, y)\, dy. \quad \square$$

Следствие 1.12. *Если $f \in C(I)$, где $I = \prod_{k=1}^{d} [a_k, b_k]$, то*

$$\int\limits_I f(x)\, dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_d}^{b_d} f(x)\, dx_d \ldots dx_1.$$

Доказательство получается по индукции — из теоремы 1.175 вытекает равенство

$$\int\limits_I f(x)\, dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{\prod_{k=2}^{d} [a_k, b_k]} f(x)\, dx_d \ldots dx_2 \right) dx_1.$$

Для вычисления внутреннего $(d-1)$-мерного интеграла надо применить предположение индукции. $\square$

Следствие 1.13. *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану и $\varphi_1, \varphi_2 \in R(D)$, причем $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда если*

$$E = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leqslant t \leqslant \varphi_2(x)\}$$

и функция f ограничена и непрерывна на E, то

$$\int\limits_E f(x, t)\, d(x, t) = \int\limits_D \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, t)\, dt \right) dx.$$

Доказательство. Пусть

$$m = \inf \{\varphi_1(x) : x \in D\}, \quad M = \sup \{\varphi_2(x) : x \in D\}.$$

Продолжим функцию f с множества E на множество $D \times [m, M]$ равенством

$$g(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & \text{при } (x, t) \in E, \\ 0 & \text{при } (x, t) \in (D \times [m, M]) \setminus E. \end{cases}$$

Тогда функция g интегрируема на $D \times [m, M]$ (множество ее точек разрыва содержится в объединении графиков функций φ_1 и φ_2, а потому его мера Жордана равна нулю). По теореме 1.175

$$\int\limits_E f(x,t)\,d(x,t) = \int\limits_{D\times[m,M]} g(x,t)\,d(x,t) = \int\limits_D \left(\int\limits_m^M g(x,t)\,dt\right)\,dx.$$

Внутренний интеграл в силу свойства аддитивности равен

$$\int\limits_m^M g(x,t)\,dt = \int\limits_m^{\varphi_1(x)} g(x,t)\,dt + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x,t)\,dt + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{M} g(x,t)\,dt.$$

Первый и третий интегралы в правой части этого равенства равны нулю (в них подынтегральная функция равна нулю), а в среднем интеграле можно заменить g на f. $\square$

Следствие 1.14 (принцип Кавальери). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^{d+1}$ измеримо по Жордану,*

$$a = \inf\left\{x_{d+1} : x \in E\right\}, \quad b = \sup\left\{x_{d+1} : x \in E\right\},$$

$$E_t = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x,t) \in E\right\}, \quad t \in [a,b]$$

(сечение множества E гиперплоскостью $\mathbb{R}^d \times \{t\}$).

Тогда для всех $t \in [a,b]$, кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль, множество E_t измеримо по Жордану и

$$\mu_{d+1}(E) = \int\limits_a^b \mu_d\left(E_t\right)\,dt.$$

Вычислим, например, меру d-мерного шара $B(0,r)$, обозначив ее $V_d(r)$.

Сначала по индукции покажем, что

$$V_d(r) = c_d r^d,$$

где c_d — некоторая постоянная. При $d = 2$, вычисляя двойной интеграл, найдем $V_2(r) = \pi r^2$ и $c_2 = \pi$.

Далее действуем по индукции, применяя следствие 1.14:

$$V_d(r) = \int\limits_{-r}^{r} V_{d-1}\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)\,dt = c_{d-1}\int\limits_{-r}^{r}\left(r^2-t^2\right)^{(d-1)/2}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = r\sin\varphi, \\ dt = r\cos\varphi\,d\varphi \end{array}\right] = c_{d-1}r^d \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d\varphi\,d\varphi.$$

Итак, доказано, что $V_d(r) = c_d r^d$, причем постоянная удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$c_d = c_{d-1} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d \varphi \, d\varphi.$$

Отсюда, используя формулы Валлиса (1.280), найдем

$$c_{2d+1} = 2 \cdot \frac{(2\pi)^d}{(2d+1)!!}, \quad c_{2d} = \frac{(2\pi)^d}{(2d)!!}.$$

1.13.4. Замена переменной в интеграле Римана

Диффеоморфизм

Определение 1.133. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество. Функция $f : G \to \mathbb{R}^d$ называется **диффеоморфизмом** на G, если*
1) $f \in C^1(G)$;
2) f — биекция;
3) $f^{-1} \in C^1(f(G))$.

Напомним, что $\mathbf{J}f(a)$ обозначает определитель матрицы Якоби дифференцируемой функции (см. (1.116)). Отметим, что якобиан $\mathbf{J}f(x)$ диффеоморфизма отличен от нуля для любого $x \in G$.

Будем использовать определение равномерной нормы (1.146) и неравенства (1.147), связывающие ее с евклидовой:

$$|x|^* = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|, \quad |x|^* \leqslant |x| \leqslant \sqrt{d}|x|^*.$$

С помощью равномерной нормы легко записать куб

$$I = \left\{ t \in \mathbb{R}^d : |t - t_I|^* < l/2 \right\},$$

где t_I — центр куба I, а l — длина его ребра.

Преобразование меры при диффеоморфизмах

Лемма 1.56. *Пусть $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — невырожденное линейное преобразование и множество $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Жордану. Тогда его образ $\lambda(E)$ измерим по Жордану и*

$$\mu(\lambda(E)) = |\det \lambda| \, \mu(E). \tag{1.304}$$

Доказательство. Для случая сегментов это утверждение известно из курса линейной алгебры. Отсюда сразу следует, что оно справедливо и для фигур. Наконец, если E — произвольное измеримое множество и $X \subset E$ — фигура, то $\lambda(X) \subset \lambda(E)$ и

$$|\det\lambda|\,\mu\,(X) = \mu\lambda(X) \leqslant \mu_*\,(\lambda(E))\,.$$

Перейдя к точной верхней грани по X, получим $|\det\lambda|\,\mu\,(E) \leqslant \mu_*\,(\lambda(E))$. Точно так же доказывается, что $|\det\lambda|\,\mu\,(E) \geqslant \mu^*\,(\lambda(E))$. $\square$

Лемма 1.57. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм, $K \subset G$ — компактное множество.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого куба $I \subset K$, $\operatorname{diam} I < \delta$, выполнено неравенство

$$\mu^*\,(\varphi(I)) \leqslant (1+\varepsilon)\,|\mathbf{J}\varphi(t_I)|\,\mu\,(I)\,.$$

Доказательство. Зафиксируем куб $I \subset K$ и введем обозначения

$$A = \varphi'(t_I), \quad H(t) = \varphi(t_I) + A(t - t_I), \quad \psi(t) = \varphi(t) - H(t).$$

Докажем следующее основное включение:

$$\varphi(I) \subset H(J), \tag{1.305}$$

где J — куб с тем же центром, что и I, но с большей длиной ребра $(1+\eta)l$, где l — длина ребра I, а η определяется из равенства $(1+\eta)^d = 1+\varepsilon$.

Пусть $x \in \varphi(I)$, тогда найдется единственное $t \in I$, для которого $\varphi(t) = x$. Кроме того, существует также единственное $\tau \in \mathbb{R}^d$ со свойством $H(\tau) = x$ (последнее равенство можно рассматривать как систему уравнений, определитель которой совпадает с $\det A \neq 0$).

Оценим

$$|t-\tau|^* = \left|A^{-1}(At) - A^{-1}(A\tau)\right|^* \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \cdot |At - A\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |H(t) - H(\tau)|^* = \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |\varphi(t) - H(t)|^* =$$

$$= \sqrt{d}\left\|A^{-1}\right\| \cdot |\psi(t) - \psi(t_I)|^*\,.$$

Так как $\psi'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(t_I)$, то из соображений равномерной непрерывности на K можно указать $\delta > 0$ так, чтобы для любого куба $I \subset K$

$$ad \max_{1\leqslant i\leqslant d}\sup_{s\in I}|\operatorname{grad}\psi_i(s)| < \eta \quad \text{при} \quad |s - t_I| < \delta, \quad \text{где}$$

$$a = \sup_{s\in K}\left\|(\varphi'(s))^{-1}\right\| < +\infty.$$

Можно продолжить оценку:

$$|t-\tau|^* \leqslant a\sqrt{d}\max_i |\operatorname{grad}\psi_i(s)| \cdot |t-t_I| \leqslant$$

$$\leqslant ad\max_i |\operatorname{grad}\psi_i(s)| \cdot |t-t_I|^* \leqslant \eta\,|t-t_I|^* .$$

Следовательно,

$$|\tau-t_I|^* \leqslant |\tau-t|^* + |t-t_I|^* \leqslant (1+\eta)\,|t-t_I|^* .$$

Отсюда $\tau \in J$. Это означает, что $\varphi(t) = H(\tau) \in H(J)$. Поэтому и включение (1.305) доказано. В силу предыдущей леммы

$$\mu^*(\varphi(I)) \leqslant \mu^*(H(J)) = |\det H|\,\mu(J) =$$

$$= (1+\eta)^d\,|\mathbf{J}\varphi(t_I)|\,\mu(I) = (1+\varepsilon)\,|\mathbf{J}\varphi(t_I)|\,\mu(I) . \quad \square$$

Формула замены переменной

Теорема 1.176 (замена переменной). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\varphi : G \to \mathbb{R}^d$ — диффеоморфизм, $f \in C(\varphi(G))$.*

Тогда для любого измеримого по Жордану компакта $K \subset G$ его образ $\varphi(K)$ измерим по Жордану и справедливо равенство

$$\int\limits_{\varphi(K)} f\,dx = \int\limits_K (f\circ\varphi)\cdot|\mathbf{J}\varphi|\;dt. \tag{1.306}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем измеримость образа $\varphi(K)$ любого измеримого компакта $K \subset G$. Прежде всего отметим, что

$$\partial\varphi(K) = \varphi(\partial(K)).$$

В самом деле,

$$\partial\varphi(K) = \overline{\varphi(K)} \cap \overline{\varphi(G\setminus K)} = \varphi(\overline{K}) \cap \varphi(\overline{G\setminus K}) = \varphi(\overline{K}\cap\overline{G\setminus K}) = \varphi(\partial K).$$

Пусть X_0 — фиксированная фигура, $K \subset X_0 \subset G$.

Так как K измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать фигуру $X = \bigsqcup_{k=1}^n \overline{I}_k$ (дизъюнктное разложение) так, чтобы

$$\partial K \subset X, \quad \mu(X) < \varepsilon,$$

причем $\operatorname{diam}\overline{I}_k < \delta$, где $\delta > 0$ определяется по лемме 1.57 (этого легко добиться, разбивая сегменты $\overline{I}_k$ на части). Кроме того, можно считать, что $X \subset X_0$ (иначе вместо X рассмотрим $X \cap X_0$).

Тогда

$$\mu^*\left(\partial\varphi(K)\right)=\mu^*\left(\varphi(\partial(K))\right)\leqslant\mu^*\left(\varphi(X)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(\varphi(\overline{I}_k)\right)\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\sup_{t\in X_0}|\mathbf{J}\varphi(t)|\sum_{k=1}^{n}\mu\left(\overline{I}_k\right)\leqslant\varepsilon(1+\varepsilon)\sup_{t\in X_0}|\mathbf{J}\varphi(t)|$$

и при $\varepsilon\to0$ получим $\mu^*\left(\partial\varphi(K)\right)=0$. По теореме 1.167 образ $\varphi(K)$ измерим по Жордану.

Шаг 2. Докажем равенство (1.306). Для этого сделаем сначала дополнительное предположение: $f(x)\geqslant0$.

Пусть $\varepsilon>0$, $X\subset K$ — любая фигура и $X=\bigsqcup_{k=1}^{n}\overline{I}_k$ — ее дизъюнктное разложение, причем $\operatorname{diam}\overline{I}_k<\delta$. Пусть еще t_k — центр $\overline{I}_k$. По лемме 1.57

$$\mu\left(\varphi(\overline{I}_k)\right)\leqslant(1+\varepsilon)\left|\mathbf{J}\varphi(t_k)\right|\mu\left(\overline{I}_k\right).$$

Умножим неравенство на $f(x_k)=f(\varphi(t_k))$ и сложим по $k=1,\ldots,n$:

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\mu\left(\varphi(\overline{I}_k)\right)\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}f(\varphi(t_k))\left|\mathbf{J}\varphi(t_k)\right|\mu\left(\overline{I}_k\right).$$

Устремляя к нулю ранг разбиения, получим

$$\int\limits_{\varphi(X)}f\,dx\leqslant(1+\varepsilon)\int\limits_{X}(f\circ\varphi)\left|\mathbf{J}\varphi\right|\,dt.$$

Так как $\varepsilon>0$ в этом неравенстве любое, то отсюда следует

$$\int\limits_{\varphi(X)}f\,dx\leqslant\int\limits_{X}(f\circ\varphi)\left|\mathbf{J}\varphi\right|\,dt\leqslant\int\limits_{K}(f\circ\varphi)\left|\mathbf{J}\varphi\right|\,dt.$$

Теперь возьмем две последовательности фигур $X_n\subset K\subset Y_n\subset G$ так, чтобы $\mu\left(X_n\right)\to\mu\left(K\right)$, $\mu\left(Y_n\right)\to\mu\left(K\right)$. Тогда $\overline{Y_n\setminus X_n}$ — фигура, и по доказанному

$$0\leqslant\int\limits_{\varphi(K)}f\,dx-\int\limits_{\varphi(X_n)}f\,dx=\int\limits_{\varphi(K\setminus X_n)}f\,dx\leqslant\int\limits_{\varphi(\overline{Y_n\setminus X_n})}f\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\overline{Y_n\setminus X_n}}(f\circ\varphi)\cdot\left|\mathbf{J}\varphi\right|\,dt\leqslant\sup_{x\in\varphi(K)}|f(x)|\sup_{t\in K}|\mathbf{J}\varphi(t)|\,\mu\left(\overline{Y_n\setminus X_n}\right)\to0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\varphi(K)}f\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\varphi(X_n)}f\,dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в неравенстве

$$\int\limits_{\varphi(X_n)} f\,dx \leqslant \int\limits_K (f\circ\varphi)\,|\mathbf{J}\varphi|\;dt,$$

получим

$$\int\limits_{\varphi(K)} f\,dx \leqslant \int\limits_K (f\circ\varphi)\,|\mathbf{J}\varphi|\;dt.$$

Меняя ролями K и $\varphi(K)$, получим противоположное неравенство. Проверьте это самостоятельно.

Наконец, избавимся от предположения $f(x)\geqslant 0$ с помощью разложения $f=f^+-f^-$, где $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$. □

Некоторые замены переменной

В заключение приведем несколько наиболее распространенных замен переменных.

1) **Полярные координаты** в $\mathbb{R}^2$ задаются равенствами

$$\begin{cases} \mathcal{F}(r,\theta)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\\[2ex] \quad r>0,\ \ \varphi\in[0,2\pi) \end{cases}$$

(рис. 1.49, *а*). В этом случае $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\varphi)=r$.

2) **Цилиндрические координаты** в $\mathbb{R}^3$ задаются равенствами

$$\begin{cases} \mathcal{F}(r,\varphi,z)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),\\[2ex] r>0,\ \ \varphi\in[0,2\pi),\ \ z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\varphi,z)=r$.

3) **Сферические координаты** в $\mathbb{R}^3$ (рис. 1.49, *б*) задаются равенствами

$$\begin{cases} \mathcal{F}(r,\varphi,\psi)=(r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\varphi),\\[2ex] r>0,\ \ \varphi\in[0,\pi),\ \ \psi\in[0,2\pi). \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{J}\mathcal{F}(r,\varphi,\psi)=r^2\sin\varphi$.

4) Последний пример обобщает сферические координаты на случай произвольной размерности:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(r,\varphi_1,\,\ldots,\varphi_{d-1})=r\cos\varphi_1,\\[2ex] \mathcal{F}_i\,(r,\varphi_1,\,\ldots,\varphi_{d-1})=r\left(\prod_{k=1}^{i-1}\sin\varphi_k\right)\cos\varphi_i,\quad i=2,\,\ldots,d-1,\\[2ex] \mathcal{F}_d\,(r,\varphi_1,\,\ldots,\varphi_{d-1})=r\left(\prod_{k=1}^{d-1}\sin\varphi_k\right), \end{cases}$$

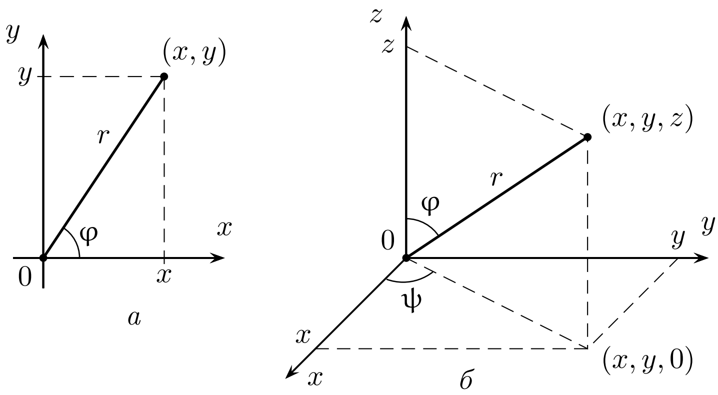

Рис. 1.49. Полярные (a) и сферические ($б$) координаты

где

$$r > 0, \quad \varphi_i \in [0, \pi), \quad i = 1, \ldots, d-2, \quad \varphi_{d-1} \in [0, 2\pi].$$

Якобиан этого преобразования вычисляется по формуле

$$\mathbf{J}\mathcal{F}\,(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}) = r^{d-1} \prod_{i=1}^{d-2} \sin^{d-i-1} \varphi_i.$$

1.14. Криволинейные интегралы

1.14.1. Функции ограниченной вариации

Вариация функции

Пусть задана функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиение

$$\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$. Число

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f, \Pi) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{1.307}$$

называется **вариацией по разбиению** Π функции f.

Определение 1.134. ***Полной вариацией*** *функции f на отрезке $[a, b]$ называется величина*

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) := \sup_{\Pi} \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f, \Pi). \tag{1.308}$$

Если полная вариация конечна, то будем говорить, что функция f имеет ***ограниченную вариацию*** *на $[a, b]$. Класс всех функций ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ обозначим $BV = BV[a, b]$.*

Упражнение 1.58. Доказать следующие утверждения:

1) если $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = 0$, то f — тождественная постоянная;

2) если f монотонна на $[a, b]$, то $f \in BV[a, b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = |f(b) - f(a)|$;

3) если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и функция монотонна на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, то $f \in BV[a, b]$ и

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f, \Pi);$$

4) если $f \in C^1[a, b]$, то $f \in BV[a, b]$ и $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \leqslant (b - a)\, \|f'\|_C$;

5) Доказать, что $H^1 \subset BV$ и существует функция $f \in \bigcap_{0<\alpha<1} H^\alpha$, не имеющая ограниченной вариации; напомним (см. (1.49)), что классы Гельдера H^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ определяются следующим образом:

$$H^\alpha = H^\alpha[a, b] := \left\{ f : \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} < +\infty \right\};$$

6) если $f \in BV[a, b]$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(\lambda f) = |\lambda|\, \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$;

7) если $f, g \in BV[a,b]$, то $\alpha f + \beta g \in BV[a,b]$ и

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) + |\beta| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g);$$

8) множество $BV[a,b]$ с обычными операциями над функциями является полным линейным нормированным пространством относительно нормы

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f).$$

Упражнение 1.59. 1) Доказать, что если $f \in BV[a,b]$, то f ограничена на $[a,b]$. Построить пример функции $f \in C[0,1]$, не имеющей ограниченной вариации на $[0,1]$.

2) Для каких $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ функция $f(x) = x^\alpha \sin\left(\pi x^{-\beta}\right)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$?

Упражнение 1.60. Доказать следующие утверждения:

1) если $\Pi_1 \subset \Pi_2$, то $\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi_1) \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi_2)$;

2) если $f \in C[a,b] \cap BV[a,b]$, то $\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi)$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \Pi \quad \lambda_\Pi < \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) - \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi) < \varepsilon.$$

Это упражнение показывает, в частности, аналогию между нижними суммами Дарбу (см. подп. 1.5.3) и вариациями по разбиениям. Свойства последних в нем доказываются точно так же, как и соответствующие свойства сумм Дарбу.

Аддитивность и непрерывность вариации

В следующей теореме приводятся менее очевидные свойства полной вариации, рассматриваемой теперь как функция отрезка, по которому она берется.

Теорема 1.177. *Пусть функция $f \in BV[a,b]$. Тогда*

1) $f \in BV[c,d]$ для любого отрезка $[c,d] \subset [a,b]$ и для любого $c \in [a,b]$ выполнено равенство

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) = \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f) \quad \textit{(аддитивность полной вариации);}$$

2) если f непрерывна в точке $x_0 \in [a,b]$, то функция $x \mapsto \mathop{\mathbf{V}}_a^x(f)$ также непрерывна в точке x_0.

Доказательство. 1) Возьмем любое разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ и пусть $c \in [x_{m-1}, x_m]$. Тогда

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi) = \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f).$$

Перейдя в полученном неравенстве к точной верхней грани по всем разбиениям Π, получим

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f).$$

Обратно зададим $\varepsilon > 0$ и найдем разбиения

$$\Pi_1 : a = x_0 < \ldots < x_m = c, \quad \Pi_2 : c = x_m < \ldots < x_n = b$$

так, чтобы

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^c(f, \Pi_1) > \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) - \varepsilon, \quad \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f, \Pi_2) > \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f) - \varepsilon.$$

Тогда для разбиения $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) \geqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f, \Pi) = \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f, \Pi_1) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f, \Pi_2) > \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f) - 2\varepsilon$$

и при $\varepsilon \to 0$ получим неравенство

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) \geqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f).$$

2) Докажем, например, непрерывность $\mathop{\mathbf{V}}_a^x(f)$ справа в точке $x_0 \in [a, b)]$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|f(x_0) - f(x_0 + h)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta.$$

Далее найдем разбиение

$$\Pi : x_0 < x_0 + h = x_1 < \ldots < x_n = b$$

так, чтобы $0 < h < \delta$ и $\mathop{\mathbf{V}}_{x_0}^b(f, \Pi) > \mathop{\mathbf{V}}_{x_0}^b(f) - \varepsilon$. Тогда

$$\mathop{\mathbf{V}}_{x_0}^b(f) < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant 2\varepsilon + \mathop{\mathbf{V}}_{x_0+h}^b(f).$$

Отсюда в силу аддитивности вариации

$$0 \leqslant \mathop{\mathbf{V}}_a^{x_0+h}(f) - \mathop{\mathbf{V}}_a^{x_0}(f) = \mathop{\mathbf{V}}_a^{x_0}(f) + \mathop{\mathbf{V}}_{x_0}^{x_0+h}(f) - \mathop{\mathbf{V}}_a^{x_0}(f) = \mathop{\mathbf{V}}_{x_0}^b(f) - \mathop{\mathbf{V}}_{x_0+h}^b(f) < 2\varepsilon$$

при $0 < h < \delta$. Непрерывность слева доказывается точно так же. $\square$

Критерий Жордана

Следующая теорема дает несколько неожиданное описание класса функций ограниченной вариации.

Теорема 1.178 (Жордана). *Следующие условия равносильны:*
1) $f \in BV[a,b]$;
2) f *представима в виде разности возрастающих функций*

$$f = g - h. \tag{1.309}$$

Если f непрерывна, то g и h в (1.309) можно взять непрерывными.

Доказательство. В силу аддитивности вариации (теорема 1.177) функция

$$g(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f), \quad x \in [a,b]$$

возрастает, так как

$$g(x_2) = \overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathbf{V}}}(f) \geqslant \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = g(x_1)$$

при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ (и непрерывна, если f непрерывна).

Положим $h = g - f$, тогда, снова используя аддитивность полной вариации, при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ получим

$$h(x_2) - h(x_1) = \left[\overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - f(x_2)\right] - \left[\overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - f(x_1)\right] =$$

$$= \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathbf{V}}}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geqslant \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathbf{V}}}(f) - |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant 0.$$

Следовательно, функция h возрастает (и непрерывна, если непрерывна f). $\square$

1.14.2. Интеграл Стилтьеса

Рассмотрим другое обобщение одномерного интеграла Римана, которое является полезным для многих разделов математики.

Определение интеграла Стилтьеса

В отличие от определения интеграла Римана (см. подп. 1.5.2) будем исходить из пары функций $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Зададим разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$, введем его ранг

$$\lambda = \lambda_\Pi = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})$$

(см. определение 1.100). На каждом частичном отрезке отметим точки

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, n,$$

и составим **интегральные суммы Стилтьеса**:

$$s = s(\Pi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

Определение 1.135. *Число $I \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом интегральных сумм Стилтьеса****, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Краткая запись этого: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} s(\Pi, \xi)$. Если этот предел существует, то он называется ***интегралом Стилтьеса*** *функции f по функции g на $[a, b]$ и обозначается*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f\,dg.$$

В частном случае $g(x) = x$, конечно, получим интеграл Римана, изученный ранее.

Свойства интеграла

Почти дословно повторяя материал п. 1.5.2–1.5.4, можно построить теорию интегрирования для нового интеграла. Исключение составляет лишь п. 1.5.3. Однако если дополнительно потребовать возрастания функции g, то все результаты и этого пункта дословно переносятся на рассматриваемый случай интеграла Римана – Стилтьеса. Проверка этого является хорошим упражнением.

В следующей теореме перечислены некоторые свойства интеграла Римана – Стилтьеса, необходимые для дальнейшего. Они вполне аналогичны соответствующим свойствам интеграла Римана.

Теорема 1.179. 1) *Линейность по f:*

$$\alpha \int_a^b f_1\,dg + \beta \int_a^b f_2\,dg = \int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg.$$

2) *Линейность по g:*

$$\alpha \int_a^b f\,dg_1 + \beta \int_a^b f\,dg_2 = \int_a^b f\,d(\alpha g_1 + \beta g_2).$$

3) *Аддитивность:*

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^c f\,dg + \int\limits_c^b f\,dg.$$

4) *Формула интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b f\,dg = fg\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b g\,df$$

(из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов в правой части).

Доказательство. Обоснуем формулу интегрирования по частям, остальные утверждения докажите самостоятельно.

Возьмем произвольно разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ и отмеченные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} f(\xi_{k-1}) g(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) g(x_{k-1}) =$$

$$= f(\xi_n) g(b) - f(\xi_1) g(a) - \sum_{k=2}^{n} g(x_{k-1})\,[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]\,.$$

Добавим к последнему выражению $\pm[f(b)g(b) - f(a)g(a)]$ и преобразуем его:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = fg\,\Big|_a^b - \sum_{k=1}^{n+1} g(x_{k-1})\,[f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})]\,,$$

где $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$. Совершая здесь предельный переход, получим требуемое равенство. $\square$

Условия существования интеграла

Теорема 1.180. *Если $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f\,dg$ существует и*

$$\left| \int\limits_a^b f\,dg \right| \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \, \mathop{\mathbf{V}}_a^b (g).$$

Доказательство. В силу теоремы 1.178 Жордана и теоремы 1.179 существование достаточно доказать для случая возрастающей функции g. При таком предположении можно использовать путь с суммами Дарбу (см. начало подп. 1.14.2):

$$s_*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad s^*(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

доказав, что условие

$$\lim_{\lambda\to 0} \left[s^*(\Pi) - s_*(\Pi)\right] = 0$$

достаточно для существования интеграла.

После этого надо использовать теорему 1.36 (Кантора):

$$s^*(\Pi) - s_*(\Pi) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|g(x_k) - g(x_{k-1})| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \lambda_\Pi < \delta.$$

Оценка интеграла получается предельным переходом в неравенстве

$$|s(\Pi, \xi)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\, |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(g). \quad \square$$

Вычисление интеграла Римана – Стилтьеса

Следующая теорема показывает, что при достаточно широких условиях интеграл Стилтьеса можно вычислять как интеграл Римана.

Теорема 1.181. *Если $f \in C[a,b]$, функция g представима в виде*

$$g(x) = \int_a^x h(t)\, dt,$$

где $h \in R[a,b]$, то интеграл $\int_a^b f\, dg$ существует и

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f(x)h(x)\, dx.$$

Доказательство. Возьмем любое разбиение $\Pi : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ и отмеченные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)h(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\,h(x)\,dx.$$

Первое слагаемое справа — это интеграл $\int\limits_a^b fh\,dx$, второе стремится к нулю при $\lambda_\Pi \to 0$, так как

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [f(\xi_k) - f(x)]\,h(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega\,(\lambda_\Pi, f) \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |h|\;dx = \omega\,(\lambda_\Pi, f) \int\limits_a^b |h|\;dx \to 0. \quad \square$$

Следствие 1.15. *Если $f \in C[a,b]$, $g \in C^1[a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f\,dg$ существует и*

$$\int\limits_a^b f\,dg = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Выведите это следствие из теоремы 1.181 самостоятельно.

1.14.3. Интегралы по путям

Длина пути

Напомним некоторые понятия (см. определение 1.91 для случая общих метрических пространств). Путем в $\mathbb{R}^d$ называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^d$. Если при этом $\gamma \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^d_+)$ (см. определение 1.115), то путь γ называется **гладким**.

Образ $\Gamma = \gamma\,([\alpha, \beta])$ — след пути, $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ — соответственно начало и конец пути γ. В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

Для любого разбиения $\Pi : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ области определения пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ положим

$$l_\gamma(\Pi) := \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|\,. \tag{1.310}$$

Геометрический смысл $l_\gamma(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в след пути в точках $\gamma(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$ (рис. 1.50).

Упражнение 1.61. Доказать, что если $\Pi \subset \Pi'$, то $l_\gamma(\Pi) \leqslant l_\gamma(\Pi')$.

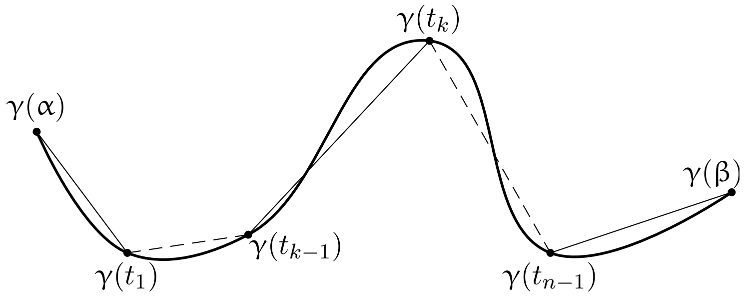

Рис. 1.50. Ломаная, вписанная в след пути

Определение 1.136. *Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ называется* ***спрямляемым****, если множество $\{l_\gamma(\Pi)\}$ ограничено. В таком случае число*

$$l_\gamma := \sup_\Pi l_\gamma(\Pi) \tag{1.311}$$

называется ***длиной пути****.*

Следующая теорема дает условия на путь, при которых он будет спрямляемым. Напомним (см. (1.154) и (1.181)), что для векторного отображения $f : X \to \mathbb{R}^d$ (X — любое множество) обозначим f_k его компоненты (координатные функции):

$$f_k = \pi_k \circ f, \quad k = 1, \ldots, d. \tag{1.312}$$

Теорема 1.182 (Жордана). *Для любого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ следующие условия равносильны:*

1) *γ спрямляем;*

2) *$\gamma_k \in BV[\alpha, \beta]$, $k = 1, \ldots, d$.*

Доказательство является простым следствием неравенств (1.147). Проверьте это самостоятельно. $\square$

В дальнейшем будем часто использовать обозначение $l_\gamma[\alpha', \beta']$ для длины сужения пути γ на отрезок $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$. Как показывается в следующей теореме, такое обозначение корректно для спрямляемых путей, кроме того, длина пути обладает важнейшим свойством аддитивности.

Теорема 1.183. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — спрямляемый путь. Тогда*

1) *для любого отрезка $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ сужение $\gamma|_{[\alpha', \beta']}$ — также спрямляемый путь и для любого $t \in [\alpha, \beta]$ справедливо равенство*

$$l_\gamma[\alpha, \beta] = l_\gamma[\alpha, t] + l_\gamma[t, \beta] \quad \textit{(аддитивность длины пути);}$$

2) *функция $t \mapsto l_\gamma[\alpha, t]$ возрастает и непрерывна на $[\alpha, \beta]$.*

Доказательство. 1) Возьмем любое разбиение Π отрезка $[\alpha', \beta']$ и пусть $\Pi' = \Pi \cup \{\alpha, \beta\}$, тогда очевидно, что

$$l_\gamma(\Pi, [\alpha', \beta']) \leqslant l_\gamma(\Pi', [\alpha, \beta]) \leqslant l_\gamma.$$

Это доказывает спрямляемость сужения $\gamma|_{[\alpha',\beta']}$.

Далее рассмотрим любое разбиение $\Pi : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$ и пусть $\Pi' = \Pi \cup \{t\}$. Тогда в силу упражнения 1.61

$$l_\gamma(\Pi, [\alpha,\beta]) \leqslant l_\gamma(\Pi', [\alpha,\beta]) = l_\gamma(\Pi_1, [\alpha,t]) + l_\gamma(\Pi_2, [t,\beta]) \leqslant$$

$$\leqslant l_\gamma[\alpha,t] + l_\gamma[t,\beta],$$

где

$$\Pi_1 : \alpha = t_0 < \ldots < t_n = t, \quad \Pi_2 : t = t_n < \ldots < t_m = \beta. \tag{1.313}$$

Перейдя к точной верхней грани по всем разбиениям Π, получим неравенство

$$l_\gamma[\alpha,\beta] \leqslant l_\gamma[\alpha,t] + l_\gamma[t,\beta].$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, зададим $\varepsilon > 0$ и найдем такие разбиения (1.313) отрезков $[\alpha,t]$ и $[t,\beta]$ соответственно, что

$$l_\gamma(\Pi_1, [\alpha,t]) > l_\gamma[\alpha,t] - \varepsilon, \quad l_\gamma(\Pi_2, [t,\beta]) > l_\gamma[t,\beta] - \varepsilon.$$

Тогда для объединенного разбиения $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ отрезка $[\alpha,\beta]$ получим следующую цепочку неравенств:

$$l_\gamma[\alpha,\beta] \geqslant l_\gamma(\Pi, [\alpha,\beta]) = l_\gamma(\Pi_1, [\alpha,t]) + l_\gamma(\Pi_2, [t,\beta]) >$$

$$> l_\gamma[\alpha,t] + l_\gamma[t,\beta] - 2\varepsilon.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получим требуемое.

2) Возрастание функции $t \mapsto l_\gamma[\alpha,t]$ вытекает из уже доказанного свойства 1): если $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, то

$$l_\gamma[\alpha,t_2] = l_\gamma[\alpha,t_1] + l_\gamma[t_1,t_2] \geqslant l_\gamma[\alpha,t_1].$$

Докажем непрерывность $l_\gamma[\alpha,t]$ справа в точке $t \in [\alpha,\beta)$. Для этого зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|\gamma(t+h) - \gamma(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < h < \delta.$$

Это можно сделать в силу непрерывности γ.

Далее найдем такое разбиение

$$\Pi : t_0 = t < t + h = t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

отрезка $[t,\beta]$, чтобы $0 < h < \delta$ и $l_\gamma(\Pi, [t,\beta]) > l_\gamma[t,\beta] - \varepsilon$. Тогда

$$l_\gamma[t,\beta] < \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < 2\varepsilon + \sum_{i=2}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leqslant 2\varepsilon + l_\gamma[t+h,\beta].$$

Отсюда в силу аддитивности длины, доказанной в первой части теоремы, получим

$$0 \leqslant l_\gamma[\alpha, t+h] - l_\gamma[\alpha, t] = l_\gamma[\alpha, t] + l_\gamma[t, t+h] - l_\gamma[\alpha, t] =$$
$$= l_\gamma[t, t+h] = l_\gamma[t, \beta] - l_\gamma[t+h, \beta] < 2\varepsilon$$

при $0 < h < \delta$.

Непрерывность слева доказывается точно так же (проведите это доказательство самостоятельно). □

Упражнение 1.62. Доказать, что $\lim\limits_{\lambda\to 0} l_\gamma(\Pi) = l_\gamma$.

Интегралы по путям

Определение 1.137. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — спрямляемый путь и на следе пути $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана функция $f \in C(\Gamma)$.* ***Интегралом первого рода по пути γ*** *от функции f называется интеграл Стилтьеса*

$$\oint\limits_\gamma f\,dl := \int\limits_\alpha^\beta (f\circ\gamma)\,dl, \quad \text{где} \quad l(t) = l_\gamma[\alpha, t]. \tag{1.314}$$

По теореме 1.180 интеграл справа в (1.314) существует, поэтому определение 1.137 является корректным.

Определение 1.138. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — спрямляемый путь и на следе пути $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана функция $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$.* ***Интегралом второго рода по пути γ*** *от функции f называется*

$$\oint\limits_\gamma f\,dx = \oint\limits_\gamma \sum_{k=1}^d f_k\,dx_k := \sum_{k=1}^d \int\limits_\alpha^\beta (f_k\circ\gamma)\,d\gamma_k. \tag{1.315}$$

В этом определении f_k и γ_k означают компоненты векторных функций f и γ соответственно (см. (1.181)).

Интегралы справа в (1.315) существуют и определение 1.138 является корректным в силу теоремы 1.180.

Упражнение 1.63. Доказать следующие утверждения:

1) если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — гладкий путь и $f \in C(\Gamma)$, то

$$\oint\limits_\gamma f\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \left(\sum_{k=1}^d [\gamma_k'(t)]^2\right)^{1/2} dt;$$

2) если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — гладкий путь и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$, то

$$\oint\limits_\gamma f\,dx = \sum_{k=1}^d \int\limits_\alpha^\beta f_k(\gamma(t))\cdot\gamma_k'(t)\,dt.$$

1.14.4. Кривые и криволинейные интегралы

Жордановы кривые и их параметризации

Определение 1.139. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ называется **жордановой кривой**, если существует взаимно однозначный путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$, для которого*

$$\Gamma = \gamma\left([\alpha, \beta]\right).$$

*Путь γ называется в этом случае **параметризацией** кривой. Точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ называются **концами** Γ.*

Другими словами, жорданова кривая в $\mathbb{R}^d$ — это след взаимооднозначного пути в $\mathbb{R}^d$ (рис. 1.51).

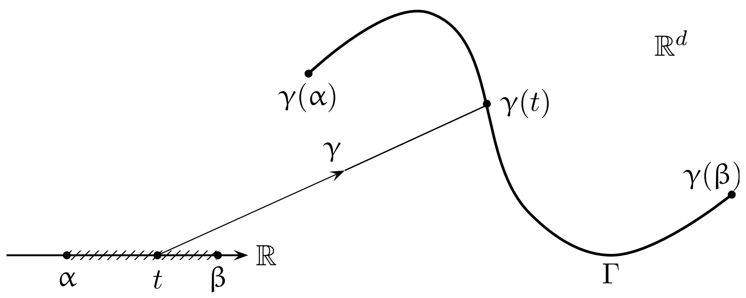

Рис. 1.51. Жорданова кривая

Параметризация жордановой кривой определяется неоднозначно. Действительно, если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^d$ — параметризация кривой Γ, то для любой строго монотонной непрерывной функции φ, отображающей некоторый отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ на $[\alpha, \beta]$, композиция $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией кривой Γ.

Класс всех параметризаций кривой Γ обозначается $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, то любую непрерывную строго монотонную функцию $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ будем называть **заменой параметра**. Таким образом, предыдущее утверждение можно переформулировать так: если γ — параметризация жордановой кривой и φ — замена параметра, то $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией. Справедливо и обратное утверждение, для доказательства которого понадобится следующая лемма.

Лемма 1.58. *Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее параметризация, то $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $x_n \in \Gamma$, $x_n \to x_0 \in \Gamma$, но

$$\left|\gamma^{-1}(x_n) - \gamma^{-1}(x_0)\right| \geqslant \delta > 0.$$

По свойству Больцано – Вейерштрасса из ограниченной последовательности $t_n = \gamma^{-1}(x_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $t_{n_j} \to t_0$. Тогда $x_{n_j} \to \gamma(t_0) = x_0$ в силу непрерывности γ. Это противоречит тому, что

$$\left|\gamma^{-1}(x_{n_j}) - \gamma^{-1}(x_0)\right| = \left|t_{n_j} - t_0\right| > \delta > 0. \quad \square$$

Теорема 1.184. *Для любых двух параметризаций $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{R}^d$ $(k = 1, 2)$ жордановой кривой Γ существует замена параметра φ, для которой $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Доказательство. В силу леммы 1.58 функция

$$\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to [\alpha_1, \beta_1]$$

непрерывна и взаимно однозначна как композиция непрерывных и взаимно однозначных отображений

$$\gamma_1^{-1} : \Gamma \to [\alpha_1, \beta_1] \quad \text{и} \quad \gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \Gamma.$$

По теореме 1.38 φ строго монотонна и является заменой параметра. $\square$

Длина и натуральная параметризация

Определение 1.140. ***Длиной*** *l_Γ жордановой кривой Γ называется длина любой ее параметризации.*

Упражнение 1.64. Доказать, что длина жордановой кривой не зависит от выбора параметризации.

Лемма 1.59. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая, то существует такая параметризация $\gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $\gamma_0 : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$, что*

$$l_{\gamma_0}[0, s] = s, \quad s \in [0, l_\Gamma].$$

Доказательство. Пусть γ — какая-нибудь параметризация Γ. Функция $l(t) = l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна и строго возрастает (см. теорему 1.183), следовательно, по теореме 1.38 у нее есть непрерывная обратная функция $l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\gamma_0 = \gamma \circ l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$$

является искомой параметризацией. $\square$

Параметризацию γ_0 из леммы 1.59 называют **натуральной** для Γ.

Интегралы по жордановым кривым

Определение 1.141. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая и $f \in C(\Gamma)$, то* ***криволинейным интегралом первого рода*** *от f по Γ называется*

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dl = \oint\limits_{\gamma} f\,dl, \quad \text{где} \quad \gamma \in \mathcal{P}(\Gamma).$$

Упражнение 1.65. Доказать следующие утверждения:
1) определение 1.141 не зависит от выбора $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$;
2) справедливо равенство

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dl = \int\limits_{0}^{l_\Gamma} (f(\gamma_0(t))\,dt.$$

Определение 1.142. *Задать* ***ориентацию*** *жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется* ***ориентированной****.*

Задание ориентации жордановой кривой означает, что указывается, какой из ее концов является началом кривой. Другими словами, выбор ориентации задает направление обхода кривой (от начала к концу).

Определение 1.143. *Если Γ — спрямляемая ориентированная жорданова кривая и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^d)$, то криволинейным* ***интегралом второго рода*** *от функции f по Γ называется*

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dx = \oint\limits_{\gamma} f\,dx,$$

где $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — любая параметризация Γ, сохраняющая ориентацию.

Упражнение 1.66. Доказать следующие утверждения:

1) все параметризации ориентированной жордановой кривой разбиваются на два класса — сохраняющие и меняющие ориентацию;

2) две параметризации одного класса связаны возрастающей заменой параметра;

3) определение 1.143 не зависит от выбора γ.

Контур: ориентация и интеграл по контуру

Определение 1.144. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ называется* ***контуром*** *(замкнутой жордановой кривой) в $\mathbb{R}^d$, если существует гомеоморфизм (см. п. 1.8.2) $\varphi : B \to \mathbb{R}^d$ единичного круга*

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющий условию $\gamma(C) = \Gamma$, *где* $\gamma = \varphi|_C$ *и*

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\} \quad —$$

единичная окружность на плоскости (рис. 1.52).

Отображение

$$\eta : t \mapsto (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi),$$

задает стандартную параметризацию окружности C, используя которую мы определим параметризации контура следующим образом.

Если γ — функция из определения 1.144, то композиция $\gamma \circ \eta : [0, 2\pi) \to \Gamma$ называется **параметризацией** контура Γ. Как и для жордановых кривых, класс всех параметризаций контура Γ будем обозначать $\mathcal{P}(\Gamma)$.

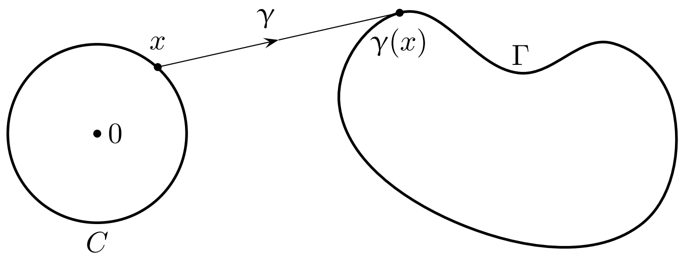

Рис. 1.52. Контур

Заметим, что любая параметризация γ контура Γ взаимнооднозначна. Точно так же, как и в лемме 1.58, доказывается, что обратная функция γ^{-1} является непрерывной, а следовательно, и равномерно непрерывной.

Длина контура и криволинейный интеграл первого рода по контуру определяются точно так же, как и для жордановой кривой (см. определения 1.140 и 1.141).

Для того чтобы ввести понятие интеграла второго рода по контуру $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, необходимо сначала определить его ориентацию. Способ, использованный в случае жордановой кривой (см. определение 1.142), не подходит для этого, так как контур не имеет концов.

Ориентацию контура можно задать порядком прохождения трех точек этого контура

$$x \to y \to z \to x \quad \text{или} \quad x \to z \to y \to x$$

(ясно, что возможны только два указанных варианта прохождения трех точек). Соответственно этому все параметризации контура тогда разбиваются на два класса — сохраняющие ориентацию и меняющие ориентацию.

Можно доказать, что задание ориентации не зависит от выбора точек x, y, z в том смысле, что если параметризация проходит какие-то три точки x_1, y_1, z_1 в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

После этого криволинейный интеграл второго рода по ориентированному спрямляемого контуру вводится как и в определении 1.143 для ориентированной жордановой кривой.

1.14.5. Первообразная функции на $\mathbb{R}^d$

Области

Жорданова кривая называется **гладкой**, если она является следом гладкого пути (см. подп. 1.14.3).

Жорданова кривая называется **кусочно-гладкой**, если она есть объединение конечного числа гладких жордановых кривых с последовательно соединенными началами и концами.

Ломаной называется объединение конечного числа отрезков с последовательно соединенными началами и концами. Ясно, что ломаная — кусочно-гладкая жорданова кривая. Представление об этих понятиях дает рис. 1.53.

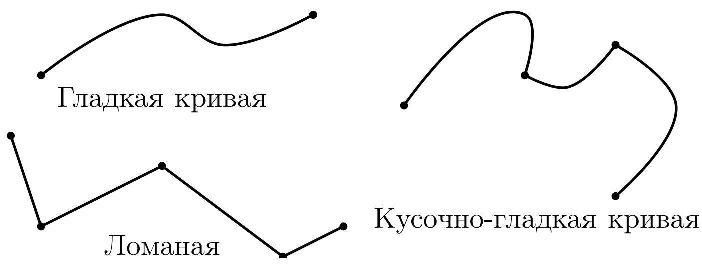

Рис. 1.53

Непустое открытое связное множество в $\mathbb{R}^d$ называется **областью**. Как известно из упражнения 1.31, линейно связное множество (определение 1.92) является связным. Для открытых множеств в $\mathbb{R}^d$ справедливо и обратное.

Лемма 1.60. *Область является линейно связным множеством.*

Более того, любые две точки области можно соединить ломаной, лежащей в области.

Доказательство. Пусть D — область и $x_0 \in D$ — фиксированная точка. Пусть D_1 — множество точек из D, которые можно соединить с x_0 ломаной, лежащей в D. Тогда D_1 содержит некоторый шар $B(x_0, r)$. Это же верно и для любой другой точки из D_1. Таким образом, D_1 открыто.

Множество $D_2 = D \setminus D_1$ также открыто, так как если $x \in D_2$ и шар $B(x, r)$ содержится в D, то ни одна точка $B(x, r)$ не входит в D_1.

Итак, множества D_1, D_2 открыты, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \neq \varnothing$. Так как D связно, то $D_2 = \varnothing$ и $D = D_1$. $\square$

Первообразная

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество.

Определение 1.145. *Скалярная функция $F : D \to \mathbb{R}$ называется* ***первообразной*** *для векторной функции $f : D \to \mathbb{R}^d$, если для всех $i = 1, \ldots, d$*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x), \quad x \in D. \tag{1.316}$$

Конечно, (1.316) можно переписать в терминах градиента (см. определение 1.109)

$$f(x) = \nabla F(x).$$

Найдем условия, при которых первообразная F существует, а также укажем способ ее определения. При этом ограничимся случаем $f \in C^1(D)$.

Упражнение 1.67. Если F — первообразная для $f \in C^1\left(D, \mathbb{R}^d\right)$ в области D, то

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad (x \in D).$$

Определение 1.146. *Криволинейный интеграл $\oint\limits_{\Gamma} f\,dx$* ***не зависит от пути*** *в области D, если для любых точек $x_0, x_1 \in D$ и любой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в x_0 и концом в x_1 интеграл $\oint\limits_{\Gamma} f\,dx$ имеет одно и то же значение.*

Теорема 1.185. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — область и $f \in C\left(D, \mathbb{R}^d\right)$. Следующие условия равносильны:*

1) *f имеет первообразную в D;*
2) *$\oint\limits_{\Gamma} f\,dx$ не зависит от пути в D.*

Если эти условия выполнены, то

$$F(x) = F(x_0) + \oint\limits_{\Gamma} f\,dx \tag{1.317}$$

для любых точек $x, x_0 \in D$ и для любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в x_0 и концом в x.

Доказательство. 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть точки x_0 и x принадлежат области D и $\Gamma \subset D$ — любая кусочно-гладкая кривая, соединяющая эти точки. Положим тогда

$$F(x) = \oint\limits_{\Gamma} f\,dx$$

(в силу условия 2) это определение не зависит от выбора Γ).

Если в качестве Γ взять ломаную в D, соединяющую точки x_0 и x, продолжить ее отрезком, соединяющим точки x и $x + te_i$ (рис. 1.54), то

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + te_i) - F(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f_i(x + se_i)\,ds = f_i(x).$$

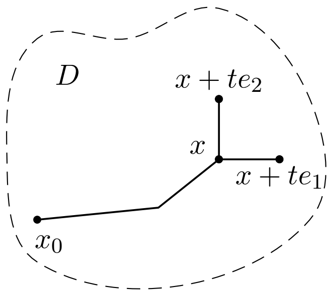

Рис. 1.54

Обратно, для гладкой кривой $\Gamma \subset D$

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^{d} (f_i \circ \gamma)(t) \cdot \gamma_i'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = F(x) - F(x_0). \quad \square$$

Находить первообразную с помощью равенства (1.317) удобно в случае, когда D — интервал (рис. 1.55).

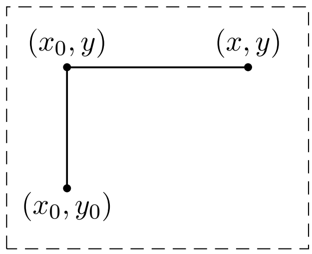

Рис. 1.55

Например, для функций двух переменных первообразная может быть найдена по формуле

$$F(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t)\,dt + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}(t, y)\,dt + F(x_0, y_0).$$

Отметим, что теорема 1.185, хотя и дает условия существования первообразной, однако их не так легко проверить. Позже (см. подп. 1.14.6) будет указан более простой способ.

1.14.6. Формула Грина

Рассматривая функции на подмножествах из $\mathbb{R}^2$, будем обозначать $\iint_D$ интегралы по плоским множествам, напоминая этим, что интегрирование происходит по двумерному множеству.

Положительная ориентация контура

Спрямляемый контур можно ориентировать двумя способами (подп. 1.14.4). При этом положительной принято называть ту ориентацию, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (рис. 1.56), т. е. обход совершается против часовой стрелки.

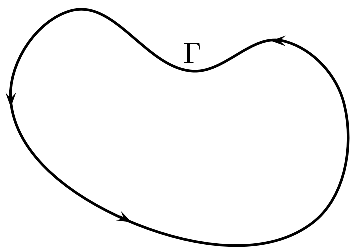

Рис. 1.56. Положительная ориентация контура

Это определение не является, конечно, строгим, но оно интуитивно ясно в случае, когда контур гладкий или кусочно-гладкий, например в случае ломаной.

Условимся в дальнейшем **многоугольником** называть любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, границей которого служит ломаная.

Основная теорема

Следующая теорема является очень важной и имеет большое число приложений, основные из которых относятся к теории функций комплексной переменной и к теории уравнений с частными производными.

Теорема 1.186 (формула Грина). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $D \subset G$ — компакт, граница которого ∂D — спрямляемый контур. Пусть также задана функция $f \in C\left(G, \mathbb{R}^2\right)$.*

Тогда

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \oint\limits_{(\partial D)^+} f\, dx, \qquad (1.318)$$

где $(\partial D)^+$ — положительно ориентированная граница D.

Доказательство теоремы 1.186 разбивается на несколько частей.

Формула Грина для многоугольника

Пусть D — многоугольник. Докажем, что

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = - \oint\limits_{(\partial D)^+} f_1\, dx_1. \tag{1.319}$$

Это равенство очевидно, если D — треугольник, одна из сторон которого параллельна оси Ox_2. Для проверки этого достаточно вычислить интеграл слева как повторный.

Отсюда сразу следует, что оно верно для любого треугольника, так как его можно разбить на два треугольника, одна из сторон которых параллельна оси Ox_2 (рис. 1.57, *б*).

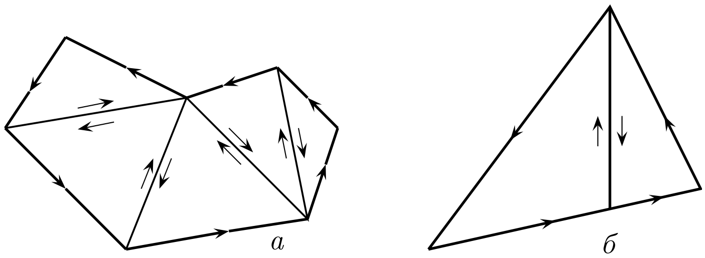

Рис. 1.57. Разбиение многоугольника (*а*), треугольника (*б*)

Так как любой многоугольник можно разбить на конечное число треугольников (рис. 1.57, *а*), то отсюда следует формула (1.319) и для многоугольника.

Равенство

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \oint\limits_{(\partial D)^+} f_2\, dx_2 \tag{1.320}$$

доказывается точно так же, только на первом шаге надо рассматривать треугольники, одна из сторон которых параллельна оси Ox_1.

Из (1.319) и (1.320) вытекает (1.318) для случая многоугольника.

Для того чтобы доказать (1.318) в общем случае, будем исходить из идеи аппроксимации области D некоторыми многоугольниками.

Вспомогательная конструкция

Пусть $\Gamma = (\partial D)^+$ — спрямляемый контур, $l = l_\Gamma$ и $\gamma : [0, 2\pi)$ — какая-нибудь его параметризация. Пусть $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Разобьем $\mathbb{R}^2$ с помощью сетки прямых

$$x_1 = \frac{l}{2^n} i,\ x_2 = \frac{l}{2^n} j, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

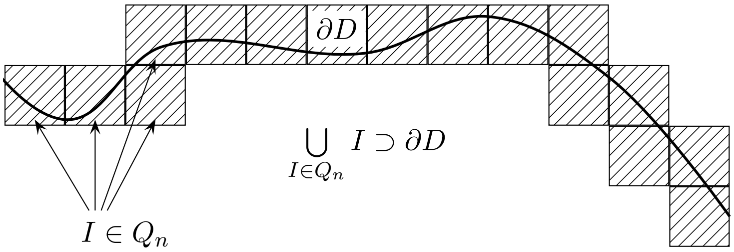

Рис. 1.58

на замкнутые квадраты с непересекающимися внутренностями и обозначим Q_n множество квадратов I, пересекающихся с Γ (рис. 1.58). Тогда Q_n состоит из конечного числа квадратов, так как Γ ограничена.

Обозначим еще

$$S_n = \bigcup_{I \in Q_n} I \supset \Gamma$$

и покажем, что

$$\mu(S_n) < \frac{9l^2}{2^n}. \tag{1.321}$$

Найдем точки $0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{2^n} = 2\pi$ так, что $l_\gamma[\tau_{k-1}, \tau_k] = l2^{-n}$. Тогда $\gamma([\tau_{k-1}, \tau_k])$ содержится не более чем в 9 квадратах из сетки, поэтому S_n состоит из не более чем $9 \cdot 2^n$ квадратов площади $(l2^{-n})^2$. Общая площадь этих квадратов не превосходит $9l^2 2^{-n}$.

Лемма 1.61. *Жорданова кривая, или контур, имеет меру нуль.*

Доказательство сразу следует из неравенства (1.321), правую часть которого можно сделать сколь угодно малой с помощью выбора $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Из леммы 1.61 и теоремы 1.167 вытекает, что двойной интеграл в формуле Грина (1.318) берется по множеству, измеримому по Жордану, и может пониматься как интеграл Римана (см. также теорему 1.172).

Для каждого квадрата $I \in Q_n$ обозначим $x(I)$ последнюю точку выхода Γ из I.

Пусть I_0 — какой-нибудь квадрат из Q_n. В качестве I_1 возьмем квадрат, для которого $x(I_0)$ является точкой входа в него и т. д. Продолжая процесс, построим квадраты

$$I_0, \ldots, I_{m_n} \in Q_n$$

(рис. 1.59), причем $x(I_{k-1})$ — точка входа в I_k. Процесс закончим тогда, когда I_{m_n} совпадет с одним из предыдущих уже выбранных (это обязательно произойдет). Можно считать, что $I_{m_n} = I_0$ (иначе повторим процесс, начиная с I_{m_n} на месте I_0).

Пусть Γ_n — ломаная с вершинами в точках $x^k := x(I_k)$, которые соединяются последовательно отрезками $[x^{k-1}, x^k]$. Очевидно тогда, что ломаная

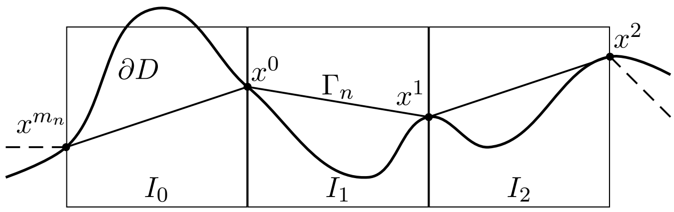

Рис. 1.59

Γ_n является контуром, так как его звенья $[x^{k-1}, x^k]$ лежат в различных квадратах I_k.

Можно считать, что $x^0 = \gamma(0)$. Если это не так, то заменим γ на другую параметризацию, которая начинается в точке x^0 и принадлежит одному классу с γ.

Окончание доказательства

Сначала покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \oint\limits_{\Gamma_n^+} f\,dx = \oint\limits_{(\partial D)^+} f\,dx. \tag{1.322}$$

Пусть

$$\gamma_n(t) = \frac{\gamma(t_k^n) - \gamma(t_{k-1}^n)}{t_k^n - t_{k-1}^n}(t - t_{k-1}^n) + \gamma(t_{k-1}^n) \quad \text{при } \ t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]\,,\ k = 0, \ldots, m_n.$$

Тогда $\gamma_n \in \mathcal{P}(\Gamma_n)$ и она проходит точки $\{\gamma(t_k^n)\}_{k=0}^{m_n}$ в таком же порядке, что и γ. Заметим, что для разбиения $\Pi_n : t_0^n < \ldots < t_{m_n}^n$ выполнено $\lambda_{\Pi_n} \to 0$. Это вытекает из того, что функция γ^{-1} равномерно непрерывна (см. замечание после определения 1.144). Запишем интеграл

$$\oint\limits_{\Gamma_n^+} f\,dx = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{\gamma(t_k^n) - \gamma(t_{k-1}^n)}{t_k^n - t_{k-1}^n} \int\limits_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f\left(\gamma_n(t)\right)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} f\left(\gamma_n(\tau_k^n)\right)\left[\gamma(t_k^n) - \gamma(t_{k-1}^n)\right] = \sum_{k=1}^{m_n} f\left(\gamma(\tau_k^n)\right)\left(\gamma(t_k^n) - \gamma(t_{k-1}^n)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_n} \left[f\left(\gamma_n(\tau_k^n)\right) - f\left(\gamma(\tau_k^n)\right)\right]\left(\gamma(t_k^n) - \gamma(t_{k-1}^n)\right),$$

где $\tau_k^n \in [t_{k-1}^n, t_k^n]$ — некоторые точки. Первая сумма справа — интегральные суммы для интеграла Стилтьеса $\oint\limits_{(\partial D)^+} f\,dx$, а предел второй равен нулю. Это следует из того, что

$$\left|f\left(\gamma_n(\tau_k^n)\right) - f\left(\gamma(\tau_k^n)\right)\right| \leqslant \omega\left(\left|\gamma_n(\tau_k^n) - \gamma(\tau_k^n)\right|, f\right) \leqslant \omega\left(2\omega(\lambda_{\Pi_n}, \gamma), f\right),$$

так как
$$|\gamma_n(\tau_k^n) - \gamma(\tau_k^n)| \leqslant 2\omega(\lambda_{\Pi_n}, \gamma).$$

Далее покажем, что если D_n — многоугольник, для которого Γ_n является границей, то
$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2. \tag{1.323}$$

В самом деле, поскольку
$$(D \setminus D_n) \cup (D_n \setminus D) \subset S_n,$$
то, обозначая для краткости $g = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$, получим
$$\left| \iint\limits_{D} g dx_1 dx_2 - \iint\limits_{D_n} g dx_1 dx_2 \right| = \left| \iint\limits_{D\setminus D_n} g dx_1 dx_2 - \iint\limits_{D_n\setminus D} g dx_1 dx_2 \right| \leqslant$$
$$\leqslant \iint\limits_{(D\setminus D_n)\cup(D_n\setminus D)} |g|\, dx_1 dx_2 \leqslant \iint\limits_{S_n} |g|\, dx_1 dx_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$
так как $\mu(S_n) \to 0$ в силу (1.321).

Для завершения доказательства формулы Грина запишем для многоугольника D_n уже доказанное равенство (1.318) и, используя (1.322), (1.323), перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$. $\square$

Вычисление площадей

Рассмотрим одно приложение формулы Грина, отметив, что основные ее применения лежат в основе теории функций комплексного переменного.

Если $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество, границей которого является спрямляемый контур, то
$$\mu(D) = \oint\limits_{(\partial D)^+} x_1 dx_2 = - \oint\limits_{(\partial D)^+} x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \oint\limits_{(\partial D)^+} (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2).$$

Для первой формулы надо применить формулу Грина к функции $f(x) = (0, x_1)$, для второй — к функции $f(x) = (x_2, 0)$, третья формула получается сложением первых двух.

Возвращение к первообразным

Определение 1.147. *Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется* ***односвязной****, если любой кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset G$ является границей области, содержащейся в G.*

Иначе это означает, что в G «нет дыр». Другими словами, область односвязна, если для любой области D с кусочно-гладкой границей

$$\partial D \subset G \implies D \subset G.$$

Теорема 1.187. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, $f \in C^1\left(G, \mathbb{R}^2\right)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *f имеет первообразную в G;*
2) $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ *в G;*
3) $\oint\limits_{\Gamma} f\,dx = 0$ *для любого кусочно-гладкого контура в $\Gamma \subset G$;*
4) $\oint\limits_{\Gamma} f\,dx$ *не зависит от пути в G.*

Доказательство. Утверждение 1) $\implies$ 2) отмечалось выше (см. упражнение 1.67) и следует из теоремы Шварца 1.100 о равенстве непрерывных смешанных производных.

2) $\implies$ 3). Это вытекает из формулы Грина.

3) $\implies$ 4). Используя соображения компактности, легко показать, что для любых двух кусочно-гладких кривых в G с общими концами существует ломаная, дополняющая каждую из них до контура. К каждому из этих контуров надо применить условие 3).

3) $\implies$ 4). См. теорему 1.185. □

1.15. Поверхностные интегралы. Формула Стокса

1.15.1. Поверхности

Параметрические поверхности

Напомним некоторые сведения из геометрии, касающиеся параметрического задания поверхностей.

Определение 1.148. *Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется **элементарной параметрической гладкой поверхностью**, если существуют такие открытое множество $G \subset \mathbb{R}^2$ и гомеоморфизм $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, что*

1) *ранг матрицы Якоби $\mathbf{J}F(u)$ функции F равен двум при $u \in G$;*

2) *$F(G) = S$.*

*Функцию F будем называть **параметризацией** элементарной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$.*

График гладкой функции является частным случаем элементарной параметрической гладкой поверхности. Точнее, если $G \subset \mathbb{R}^2$ и задана функция $f \in C^1(G, \mathbb{R})$, то множество

$$S = \Big\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in G\Big\} \tag{1.324}$$

является элементарной параметрической гладкой поверхностью, параметризация которой — отображение

$$F(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)), \quad u = (u_1, u_2) \in G.$$

В самом деле, матрица Якоби в таком случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) \end{pmatrix},$$

и ее верхний минор второго порядка равен единице в любой точке $u \in G$.

Определение 1.149. *Множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется **параметрической** (гладкой) поверхностью, если для любой точки $a \in S$ существует такая окрестность U_a, что $U_a \cap S$ — элементарная параметрическая поверхность.*

*Параметризацию для $U_a \cap S$ будем называть также локальной **параметризацией** поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в точке $a \in S$.*

Следующее рассуждение показывает, что локально (в некоторой окрестности каждой своей точки) параметризованная поверхность устроена как график гладкой функции.

Действительно, если $a \in S$ — точка поверхности, F — ее локальная параметризация в точке $a \in S$, $b = F^{-1}(a)$. Запишем матрицу Якоби параметризации

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}(b) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}(b) \\ \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_2}(b) \end{pmatrix}.$$

Один из ее миноров второго порядка отличен от нуля. Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}(b) \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}(b) \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда для функции

$$g : u \mapsto (F_1(u), F_2(u))$$

выполнены все условия теоремы 1.106 об обратной функции. Поэтому существуют такие открытые множества $V \subset G$ и W, содержащие точки $b = (b_1, b_2)$ и $\widetilde{a} = (a_1, a_2)$ соответственно, что сужение $g|_V$ имеет обратную функцию $g^{-1} : W \to V$. Тогда образ $F(u_1, u_2)$ любой точки $(u_1, u_2) \in V$ принадлежит S и, если $(x_1, x_2) = g(u)$, то

$$F(u_1, u_2) = (F \circ g^{-1})(x_1, x_2) = \big(g \circ g^{-1}(x_1, x_2), (F_3 \circ g^{-1})(x_1, x_2)\big) =$$

$$= \big(x_1, x_2, (F_3 \circ g^{-1})(x_1, x_2)\big)\,.$$

Аналогичное рассуждение проходит и в случае, когда другой из миноров второго порядка отличен от нуля. Таким образом, «кусок» поверхности S, содержащий точку a, задается графиком гладкой функции.

Часто встречается способ задания параметрической поверхности с помощью неявного уравнения. Так, пусть задана функция $F \in C^1(D)$ на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$, причем $\operatorname{grad} F(x) \neq 0$ в каждой точке $x \in D$. Пусть еще $b \in F(D)$ и $b = F(a)$, где a — некоторая точка из D и, например, $\dfrac{\partial F}{\partial x_3}(a) \neq 0$. Тогда к отображению $F - b$ можно применить теорему 1.107 о неявной функции, согласно которой существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^2$ точки

(a_1, a_2), на которой определена неявная функция $g : U \to \mathbb{R}$ из класса $C^1(U)$, удовлетворяющая равенству

$$F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) - b = 0 \quad \text{при } (x_1, x_2) \in U.$$

Таким образом, для каждой точки b, принадлежащей области определения функции F, уравнение $F(x) - b = 0$ локально задает поверхность — график функции g.

Примером такого способа задания поверхности может служить сфера

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

с центром в начале координат радиуса $R > 0$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — параметрическая поверхность, F — локальная параметризация S, $a \in S$, $b = F^{-1}(a)$. Ниже систематически будем использовать обозначения

$$A(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_1} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \ B(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} \\ \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial u_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \ C(a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \tag{1.325}$$

(все частные производные вычисляются в точке $b = F^{-1}(a)$).

Нормальным для поверхности S в точке a называется вектор

$$(A(a), B(a), C(a)).$$

Если поверхность задана явным уравнением, как график функции $f \in C^1(G)$, то

$$A(a) = -\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad B(a) = -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad C(a) = 1, \tag{1.326}$$

где частные производные вычисляются в точке (a_1, a_2). Тогда нормальный вектор в точке $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ поверхности приобретает вид

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right)$$

(частные производные вычисляются в точке (a_1, a_2)).

Равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}(b) & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_1}(b) \\ \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}(b) & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}(b) & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_2}(b) \end{vmatrix} = 0$$

задает уравнение **касательной плоскости** к S в точке a.

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, видим, что касательная плоскость к S в точке a — множество точек $x \in \mathbb{R}^3$, для которых разность $x - a$ ортогональна нормальному вектору.

Пример 1.8. Найти нормаль и касательную плоскость к винтовой поверхности

$$(u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, u_2), \quad u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0.$$

Площадь поверхности

Сначала введем понятие площади элементарной поверхности.

Определение 1.150. ***Площадью*** *элементарной поверхности называется*

$$\sigma(S) = \iint\limits_G \sqrt{A^2(u) + B^2(u) + C^2(u)}\, du. \tag{1.327}$$

Приведем некоторые аргументы в пользу такого определения. Если элементарная поверхность S задана явным уравнением как график функции $f \in C^1(G)$, то разобьем G на измеримые (по Жордану) множества

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i, \quad G_i \cap G_j = \varnothing,$$

в каждом множестве G_i зафиксируем точку x_i и будем считать, что площадь графика сужения $f|_{G_i}$ приблизительно равна площади той части касательной плоскости к S в точке (x_1^i, x_2^i), которая проектируется на G_i. Последняя равна $\mu(G_i)/\,|\cos\alpha_i|$, где α_i — угол между нормалью к S в точке $(x_1^i, x_2^i, f((x_1^i, x_2^i)))$ и вектором $(0,0,1)$. Таким образом, приближенное значение площади поверхности равно

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(G_i)}{|\cos\alpha_i|}.$$

Предельный переход и приводит к интегралу

$$\iint\limits_G \frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

В рассматриваемом случае (поверхность задана явным уравнением) нормальным является вектор $\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1\right)$ и (см. (1.326))

$$\frac{1}{|\cos\alpha|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Аналогичные аргументы подходят и в случае элементарной поверхности. Так, пусть S — элементарная поверхность, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$ — ее параметризация и в области $G_0 \subset G$ эту поверхность можно задать явным уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$. Обозначим D_0 образ G_0 при отображении $\varphi : u \mapsto (F_1(u), F_2(u))$. Тогда, совершая замену переменной с помощью обратного отображения $\varphi^{-1} : D_0 \to G_0$, по теореме 1.176 получим

$$\iint\limits_{G_0} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du_1\, du_2 =$$

$$= \iint\limits_{D_0} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}\, dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{D_0} \frac{dx_1 dx_2}{|\cos\alpha|}.$$

В геометрии часто используются величины

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\right)^2, \\ \mathcal{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{\partial F_2}{\partial u_2} + \frac{\partial F_3}{\partial u_1}\frac{\partial F_3}{\partial u_2}, \\ \mathcal{G} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial u_2}\right)^2, \end{aligned} \tag{1.328}$$

которые называются **гауссовыми коэффициентами** поверхности. Они связаны с коэффициентами (1.325) равенством

$$A^2 + B^2 + C^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2,$$

которое проверяется непосредственно. Формулу (1.327) для площади поверхности можно переписать в виде

$$\sigma(S) = \iint\limits_{G} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\, du.$$

Как следует из рассуждения выше, в случае, когда поверхность задана графиком функции $f \in C^1(G)$, ее площадь вычисляется по формуле

$$\sigma(S) = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\, dx.$$

1.15.2. Формула Стокса

Поверхностные интегралы первого рода

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая элементарная поверхность и задана ее параметризация $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, область определения G которой измерима по Жордану. Тогда **поверхностным интегралом первого рода** (интегралом по площади поверхности) по поверхности S от функции $P \in C(S)$ называется

$$\iint\limits_S P\, d\sigma = \iint\limits_G (P \circ F)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du_1 du_2. \tag{1.329}$$

К такому интегралу приводит следующая конструкция. Разобьем поверхность S на части $S_1, \ldots, S_n$, например с помощью системы кусочно-гладких кривых на поверхности, на каждой части S_i возьмем точку $\xi^i \in S_i$ и составим интегральные суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi^i)\sigma(S_i).$$

Предел таких сумм, когда диаметр наибольшей из частей S_i стремится к нулю, будем считать поверхностным интегралом первого рода (интеграл слева в (1.329)).

С другой стороны, используя формулу (1.327) для площади поверхности, можно переписать интегральную сумму в виде

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi^i)\sigma(S_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi^i) \iint\limits_{G_i} \sqrt{A^2(u) + B^2(u) + C^2(u)}\, du_1 du_2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(F(v^i))\sqrt{A^2(u^i) + B^2(u^i) + C^2(u^i)}\mu(G_i),$$

где $v^i = F^{-1}(\xi^i) \in G_i$ и $G_i = F^{-1}(S_i)$. Последняя сумма напоминает интегральную сумму для интеграла в правой части равенства (1.329), отличаясь от последней лишь тем, что значения функций-сомножителей берутся не в одной точке, из G_i, а в различных. Однако нетрудно проверить, что разность между последним выражением и интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^{n} P(F(u^i))\sqrt{A^2(u^i) + B^2(u^i) + C^2(u^i)}\mu(G_i)$$

для интеграла справа в (1.329) стремится к нулю, если наибольшей из диаметров частей S_i стремится к нулю.

Если поверхность S задана явным уравнением, как график функции $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, то поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S P\,d\sigma = \iint\limits_D P(x_1, x_2, f(x_1, x_2))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\,dx_1 dx_2.$$

Физические приложения интегралов первого рода

Рассмотрим физическую трактовку поверхностного интеграла первого рода. Пусть на элементарной поверхности непрерывно распределена масса с плотностью $\rho : S \to \mathbb{R}_+$, где $\rho \in C(S)$ — неотрицательная функция. Для того чтобы вычислить массу поверхности, разобьем ее на части $S_1, \ldots, S_n$ и будем считать, что на каждой части S_i плотность приблизительно постоянна и для точки $\xi^i \in S_i$ число $\rho(\xi^i)$ примерно равно средней плотности на S_i. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi^i)\sigma(S_i)$$

дает приближенное значение для массы поверхности. Совершая предельный переход, придем к тому, что естественным значением для массы поверхности S является поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \rho\,d\sigma,$$

где ρ — плотность распределения массы по поверхности.

Пусть в точке x^0, не принадлежащей поверхности S, сосредоточена единичная масса. Рассмотрим задачу определения величины и направления действия силы притяжения точки x^0 поверхностью S, исходя из того, что в основу положен закон всемирного тяготения Ньютона.

Если бы точка x^0 притягивалась лишь одной материальной точкой x с сосредоточенной в ней массой m, то величина силы притяжения была бы равна

$$F = \frac{m}{r^2}, \quad \text{где} \quad r = |x - x^0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}$$

(для простоты будем считать, что постоянная тяготения равна 1). Так как эта сила направлена от x^0 к x, то ее направляющие косинусы будут равны

$$\frac{x_1 - x_1^0}{|x - x^0|}, \quad \frac{x_2 - x_2^0}{|x - x^0|}, \quad \frac{x_3 - x_3^0}{|x - x^0|}.$$

Поэтому проекции силы тяжести на оси координат выражаются равенствами

$$F_k = m\frac{x_k - x_k^0}{|x - x^0|^3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Разобьем теперь, как и выше, поверхность S на части $S_1, \ldots, S_n$ и будем считать, что вся масса i-й части в силу ее малости сосредоточена в некоторой ее точке $x^i \in S_i$. Тогда k-я проекция суммарной силы воздействия на точку x^0 равна

$$F_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_k^i - x_k^0}{|x^i - x^0|^3}\rho(x^i)\sigma(S_i), \quad k = 1, 2, 3.$$

Совершая, как и раньше, предельный переход, получим следующие формулы для проекций на координатные оси силы притяжения поверхностью S единичной массы, сосредоточенной в x^0:

$$F_k = \iint_S \rho(x)\frac{x_k - x_k^0}{|x - x^0|^3}\, d\sigma(x), \quad k = 1, 2, 3.$$

Ориентация поверхности

Понятие стороны поверхности связано с понятием направления нормали. У гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в каждой точке $a \in S$ есть два единичных нормальных вектора: $\nu(a)$ и $-\nu(a)$. Поэтому кажется естественным, что у поверхности должно быть две стороны. Однако это не так. В отличие, например, от сферы или плоскости лист Мебиуса или бутылка Клейна имеет лишь одну сторону.

Ориентировать поверхность означает возможность зафиксировать одну из двух сторон поверхности.

Определение 1.151. *Гладкая поверхность S называется* ***ориентируемой****, если существует непрерывное отображение $a \mapsto \nu(a)$, $a \in S$ ($\nu(a)$ — единичный нормальный вектор к S в точке a).*

Если выбрано такое отображение, то говорят, что на поверхности задана ориентация или выбрана сторона поверхности.

Отображение $a \mapsto \nu(a)$ называется **ориентирующим полем нормалей**. Часто непрерывное поле нормалей и ориентация поверхности отождествляются.

Теорема 1.188. *Ориентируемая связная поверхность имеет в точности две ориентации.*

Доказательство. Так как наша поверхность ориентируема, то существует непрерывное поле нормалей $a \mapsto \nu(a)$, тогда $a \mapsto -\nu(a)$ — также непрерывное поле нормалей. Итак, найдены две ориентации.

Предположим, что есть еще одна ориентация $a \to \mu(a)$, не совпадающая с указанными выше. Тогда найдутся точки $a_1, a_2 \in S$, для которых $\mu(a_1) = \nu(a_1)$, $\mu(a_2) = -\nu(a_2)$. Рассмотрим функцию

$$f(a) = (\nu(a), \mu(a)), \quad a \in S$$

(справа находится скалярное произведение векторов), которая непрерывна на S и может принимать лишь два значения ± 1 (в каждой точке есть только два единичных нормальных вектора) и оба принимает, так как $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = -1$. Следовательно, $f(S) = \{-1, +1\}$, что противоречит теореме 1.96 о непрерывном образе связного множества. □

Упражнение 1.68. 1) Если гладкая поверхность задана неявным уравнением

$$f(x) = 0, \quad \nabla f(x) \neq 0,$$

то она ориентируема и ориентацию можно задать полем нормалей

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}, \quad a \in S.$$

2) Параметрическая гладкая поверхность S ориентируема и ориентацию можно задать равенством

$$\nu(a) = \frac{(A(a), B(a), C(a))}{\sqrt{A_2(a) + B_2(a) + C_2(a)}}, \quad a \in S,$$

где F — параметризация S (см. (1.325)).

Поверхностные интегралы второго рода

Снова рассмотрим гладкую элементарную поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ и ее параметризацию $F \in C^1(G, \mathbb{R}^3)$, считая ее область определения G измеримой по Жордану. Пусть дополнительно поверхность S ориентирована, при этом ориентирующим полем нормалей является

$$\nu = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.330}$$

(ниже этот выбор поля нормалей будет использован для согласования ориентации поверхности и ее края). Тогда положим

$$\iint_S P\,dx_1 dx_2 = \iint_G (P \circ F) C\,du.$$

Аналогично можно определить интегралы

$$\iint\limits_S P\,dx_2dx_3 = \iint\limits_G (P\circ F)A\,du,$$

$$\iint\limits_S P\,dx_3dx_1 = \iint\limits_G (P\circ F)B\,du.$$

Общий **поверхностный интеграл второго рода** от векторной функции $P\in C\left(S,\mathbb{R}^3\right)$ по элементарной ориентированной поверхности S определяется как

$$\iint\limits_S P_1\,dx_2dx_3 + P_2\,dx_3dx_1 + P_3\,dx_1dx_2 =$$
$$= \iint\limits_G \left[(P_1\circ F)A + (P_2\circ F)B + (P_3\circ F)C\right]\,du.$$

Упражнение 1.69. 1) Общий поверхностный интеграл второго рода можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_S P_1\,dx_2dx_3 + P_2\,dx_3dx_1 + P_3\,dx_1dx_2 = \iint\limits_G \begin{vmatrix} P_1\circ F & P_2\circ F & P_3\circ F \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial u_2} \end{vmatrix}\,du.$$

2) Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны равенством

$$\iint\limits_S P_1\,dx_2dx_3 + P_2\,dx_3dx_1 + P_3\,dx_1dx_2 = \iint\limits_S (P,\nu)\,d\sigma, \tag{1.331}$$

где ν — ориентирующее поле нормалей.

Если поверхность удается разбить на конечное число элементарных поверхностей, то интегралом (первого и второго рода) по ней будем называть сумму соответствующих интегралов по ее частям.

Поверхности с краем

Пусть $S_0\subset\mathbb{R}^3$ — гладкая ориентированная параметрическая поверхность и $F\in C^1(G_0,\mathbb{R}^3)$ — ее параметризация, причем ориентирующим полем нормалей является

$$\nu = \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

как в определении поверхностного интеграла второго рода (см. (1.330)).

Пусть область $G \subset G_0$ такова, что $\overline{G} \subset G_0$ и ее граница — кусочно-гладкий контур. Тогда образ $S = F(G)$ — также элементарная параметрическая поверхность. Образ $F(\partial G)$ будем называть **краем** поверхности S и обозначать ∂S.

Не следует путать край поверхности с ее топологической границей, которая совпадает с $\overline{S}$.

Ясно, что ∂S является кусочно-гладким контуром и $F \circ \boldsymbol{\gamma}$ — его естественная параметризация, если $\boldsymbol{\gamma}$ — параметризация ∂G.

Ориентация (выбор стороны) поверхности S определяет положительное направление обхода контуров на поверхности по тому же правилу, которое использовалось на плоскости в начале п. 1.14.6 — при обходе контура с помощью положительной параметризации часть поверхности, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается против часовой стрелки).

Будем считать ориентации поверхности S и ее края ∂S согласованными в том смысле, что если $\boldsymbol{\gamma}$ — положительная параметризация ∂G, то $F \circ \boldsymbol{\gamma}$ — положительная параметризация ∂S.

Все обозначения и соглашения этого пункта используются при выводе так называемой формулы Стокса.

Формула Стокса

Пусть в окрестности U поверхности S задана функция $P \in C^1(U, \mathbb{R})$. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(\partial S)^+} P\, dx_1 = \oint\limits_{(\partial G)^+} P\frac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1 + P\frac{\partial F_1}{\partial u_2}du_2 \tag{1.332}$$

(это равенство легко проверить, сводя каждый из интегралов к интегралу Римана). К последнему интегралу применим формулу Грина

$$\oint\limits_{(\partial G)^+} P\frac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1 + P\frac{\partial F_1}{\partial u_2}du_2 = \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(P\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(P\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\right)\right] du$$

и преобразуем выражение под знаком двойного интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(P\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(P\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_2} + P\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_1 \partial u_2} -$$
$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial F_2}{\partial u_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial F_3}{\partial u_2}\right)\frac{\partial F_1}{\partial u_1} - P\frac{\partial^2 F_1}{\partial u_2 \partial u_1} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x_1}\left[\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} - \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2}\right] +$$

$$+\frac{\partial P}{\partial x_2}\left[\frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} - \frac{\partial F_2}{\partial u_2}\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\right] + \frac{\partial P}{\partial x_3}\left[\frac{\partial F_3}{\partial u_1}\frac{\partial F_1}{\partial u_2} - \frac{\partial F_3}{\partial u_2}\frac{\partial F_1}{\partial u_1}\right] =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x_3}B - \frac{\partial P}{\partial x_2}C.$$

Таким образом, из равенства (1.332) получим соотношение

$$\oint\limits_{(\partial S)^+} P\,dx_1 = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_3}dx_3dx_1 - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_2}dx_1dx_2.$$

Точно так же можно доказать равенства

$$\oint\limits_{(\partial S)^+} P\,dx_2 = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1dx_2 - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_3}dx_2dx_3,$$

$$\oint\limits_{(\partial S)^+} P\,dx_3 = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_2}dx_2dx_3 - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_3dx_1$$

(они получаются из первого с помощью циклической перестановки в x_1, x_2, x_3). Применяя эти равенства к компонентам векторной функции $P \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, получим

$$\oint\limits_{(\partial S)^+} P\,dx = \iint\limits_S \left[\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right] dx_1dx_2 +$$

$$+\iint\limits_S \left[\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right] dx_2dx_3 + \iint\limits_S \left[\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1}\right] dx_3dx_1. \qquad (1.333)$$

Это равенство называют обычно **формулой Стокса**.

Формула Гаусса – Остроградского

Приведем еще одно тождество, содержащее поверхностный интеграл. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество, границей которого является гладкая замкнутая поверхность. Ориентируем границу с помощью внешнего поля нормалей. Тогда если U — некоторая окрестность V и $P \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, то справедливо равенство

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\right) dx_1dx_2dx_3 =$$

$$= \iint\limits_{(\partial V)^+} P_1\,dx_2dx_3 + P_2\,dx_3dx_1 + P_3\,dx_1dx_2, \qquad (1.334)$$

называемое **формулой Гаусса – Остроградского**.

Равенство (1.334) распадается на следующие:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P_1}{\partial x_1}\,dx = \iint\limits_{(\partial V)^+} P_1\,dx_2dx_3,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P_2}{\partial x_2}\,dx = \iint\limits_{(\partial V)^+} P_2\,dx_3dx_1,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\,dx = \iint\limits_{(\partial V)^+} P_3\,dx_1dx_2.$$

Эти равенства доказываются одинаково, поэтому остановимся только на доказательстве последнего. Пусть D — проекция V на плоскость $x_3 = 0$. В силу выпуклости V каждая прямая, параллельная оси Ox_3 и проходящая через D, будет пересекать V по отрезку

$$[(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2)), (x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2))], \quad (x_1, x_2) \in D.$$

Тогда поверхность ∂V разобьется на три гладкие части:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = \varphi_1(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in D\},$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = \varphi_2(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in D\},$$

$$S_3 = \partial V \setminus (S_1 \cup S_2)$$

(S_3 — «боковая часть» границы V). В соответствии с этим поверхностный интеграл по $(\partial V)^+$ будет равен сумме интегралов по S_1 (интегрирование по нижней стороне S_1) и по S_2 (интегрирование по верхней стороне S_2). Интеграл по S_3 равен нулю, так как нормаль к S_3 перпендикулярна оси Ox_3. Следовательно, используя еще формулу сведения кратных интегралов к повторным (см. следствие 1.13) и формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\,dx = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} \frac{\partial P_3}{\partial x_3}\,dx_3\right] dx_1\,dx_2 =$$

$$= \iint\limits_D [P_3(x_1, x_2, \varphi_2(x_1, x_2)) - P_3(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2))]\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{S_2} P_3\,dx_1\,dx_2 + \iint\limits_{S_1} P_3\,dx_1\,dx_2 = \iint\limits_{(\partial V)^+} P_3\,dx_1\,dx_2.$$

1.15.3. Теория поля

Рассмотрим выпуклую область $V \subset \mathbb{R}^3$ и две функции

$$f : V \to \mathbb{R}, \quad F : V \to \mathbb{R}^3. \tag{1.335}$$

В приложениях математического анализа в математической физике и механике изучение таких функций традиционно выделяется в особый раздел, который носит название **векторного анализа** или **теории поля** и использует специфическую терминологию. Переведем результаты этой главы на язык теории поля.

Язык теории поля

Функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется **скалярным полем**, а функция $F : V \to \mathbb{R}^3$ — **векторным полем**. Примерами скалярных полей могут служить поле температуры или электрического потенциала. Силовое поле или поле скоростей движения жидкости — примеры векторных полей.

Предположим, что $f \in C^1(V)$ и $F \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$.

Векторное поле

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) \tag{1.336}$$

называется **градиентом** скалярного поля f.

Скалярное поле

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \tag{1.337}$$

называется **дивергенцией** векторного поля F.

Векторное поле

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \tag{1.338}$$

называется **ротором** векторного поля F.

Отметим следующие часто используемые в теории поля тождества:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F \equiv 0. \tag{1.339}$$

Они доказываются с помощью непосредственного вычисления.

Криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_C F\, dx$$

по ориентированному контуру $C \subset V$ называется **циркуляцией** векторного поля F по контуру C.

Если обозначить τ — единичный касательный вектор в положительном направлении обхода контура C, то циркуляцию можно записать в виде

$$\oint_C F\,dx = \oint_C (F,\tau)\,dl.$$

Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S F_1\,dx_2dx_3 + F_2\,dx_3dx_1 + F_3\,dx_1dx_2$$

по ориентированной поверхности S называется **потоком** векторного поля F через поверхность S.

Если ν — ориентирующее поле нормалей S, то поток можно записать в виде (см. (1.331))

$$\iint\limits_S P_1\,dx_2dx_3 + P_2\,dx_3dx_1 + P_3\,dx_1dx_2 = \iint\limits_S (P,\nu)\,d\sigma.$$

Основные теоремы теории поля

Следующие две теоремы дают перевод формул Гаусса – Остроградского и Стокса на язык теории поля.

Теорема 1.189 (формула Стокса). *Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность с кусочно-гладким краем C и $F \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$ — векторное поле, определенное в некоторой окрестности U поверхности S.*

Тогда циркуляция векторного поля F по поверхности S равна потоку ротора F через эту поверхность, т. е.

$$\oint\limits_C (F,\tau)\,dl = \iint\limits_S (\operatorname{rot} F,\nu)\,d\sigma.$$

Здесь τ — единичный касательный вектор к C, согласованный с ориентирующим полем нормалей ν так, чтобы обход контура C в направлении τ совершался против часовой стрелки.

Теорема 1.190 (формула Гаусса – Остроградского). *Пусть границей выпуклой области $V \subset \mathbb{R}^3$ является гладкая замкнутая поверхность S, $F \in C^1(V,\mathbb{R}^3)$ — векторное поле.*

Тогда поток поля F через S равен интегралу от его дивергенции по V

$$\iint\limits_S (F,\nu)\,d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} F\,dx$$

(ν — поле внешней нормали к S).

. 2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Введение в анализ

Упражнение 2.1. Доказать неравенство

$$n! < \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Упражнение 2.2. Написать разложение по формуле бинома Ньютона следующих выражений:

1) $(a+b)^4$; 3) $(1-\sqrt{3})^6$; 5) $\left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)^7$.
2) $(1+\sqrt{2})^5$; 4) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{12}\right)^8$;

Упражнение 2.3. Записать в виде обыкновенных следующие бесконечные периодические дроби:

1) $x = 4,(31)$; 2) $x = 5,2(324)$.

Упражнение 2.4. Найти $\sup X$ и $\inf X$, а также указать наибольший и наименьший элементы (в случае их существования):

1) $X = \left\{\dfrac{1}{1+n^{(-1)^n}} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$;
2) $X = \left\{\sin\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$;
3) $X = \left\{2^{-x} : \ 0 < x \leqslant 3\right\}$;
4) $X = \left\{\sqrt[4]{2-x} : \ -14 < x < 1\right\}$;

2.2. Предел последовательности

Упражнение 2.5. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^5 - 6n^3 + 2n - 1}{10n^5 - 4n^4 + 3n^2 - 2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{25^n + n^4 \cdot 2^n - n\sin n}{3\cdot 5^{2n} - 5^n + n3^n + \cos n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4k-2)(4k+2)}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)(1 + 2 + \ldots + n)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt[3^k]{2}\right)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 3 + \ldots + (2n-1)}{4 + 7 + \ldots + (3n+1)}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

Упражнение 2.6. Найти пределы последовательностей:

1) $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}(\cos n - \sin n)$;

2) $a_n = \dfrac{5n^3 - 6n + 3}{7n^3 - 4n^2 + 2} \sin\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

Упражнение 2.7. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательностей:

1) $a_n = \dfrac{3n+1}{4n+2}$;

2) $a_n = \dfrac{n^2 - 5n + 3}{n^2 + n + 2}$;

3) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\arccos \frac{1}{k!}}{4^k}$;

4) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k \sin 2k}{k(k+1)}$;

5) $a_n = 2{,}3\underbrace{44\ldots4}_{n-1}$.

2.3. Предел функции

Упражнение 2.8. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x^2+x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-x^2}{3x^3+2x^2-x+14}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^5-2x^3-3x-10}{x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt[3]{x-3}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{9\cos^3 x+(e^{5x}-1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^5(3x-7)^3}{(x-2)^2(x+21)^6}$;

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-8}-24x\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}$;

Упражнение 2.9. Используя известные пределы, найти:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x}{\arcsin\dfrac{x}{3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{3-\sqrt{8+\cos x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos 2x^2}{\sin^4 x}+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{(\pi-2x)^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{\frac{1}{x}}$;

8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1-x}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{x^2-17x+72}{x-9}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-3}}$;

Упражнение 2.10. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+5x)^{1/5}-1}{5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 3x\cdot \operatorname{tg}^3 2x}{\left(3^{\sqrt{x}}-1\right)^2\ln\left(1-2x^4\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\sqrt{1+\sin 4x}-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{\ln\cos(3x-3)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x7^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{1/\ln(2-x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x+2\arcsin 2x+18x^3}{\ln(1+7x+\sin^3 5x)+x^{15}}$.

2.4. Предел и непрерывность функции

Упражнение 2.11. Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

1) $f(x) = |-x^2 + 2|$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sign}^2(x+1)$; 3) $f(x) = x - [x]$;

$$4)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2}, & x < 0, \\[2ex] \dfrac{1}{3}x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{\pi}{2}x, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Упражнение 2.12. Найти точки разрыва и охарактеризовать их, если:
1) $y = (x - [x])^2$; 2) $y = \operatorname{sign}\sin x$;

$$3)\ y = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^x}, & x \neq 0, \\[2ex] 1, & x = 0; \end{cases} \qquad 4)\ y = \begin{cases} |[x]|^2, & x \notin \mathbb{Z} \\[2ex] (x-1)^2, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2.5. Производная

Упражнение 2.13. Пользуясь таблицей производных и основными правилами дифференцирования, найти производные:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$;
2) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$;
3) $f(x) = x^3\sqrt[3]{x^2} + x^7\sqrt[3]{x}$;
4) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;
5) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$;
6) $f(x) = 3^{2x}\cdot 2^{-3x}$;
7) $f(x) = x^2\sin x$;
8) $f(x) = 4^x \operatorname{tg} x$;
9) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$;
10) $f(x) = 3x^2\ln x - x^2$;
11) $f(x) = \log_x 2 + \operatorname{arctg} 8$;
12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;
13) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$;
14) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;
15) $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot 3^x$;
16) $f(x) = x^3\arcsin x$;
17) $f(x) = \sqrt[5]{x}\log_2 x$;
18) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;
19) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ при $x = 0$; $x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{4}$; $x = \dfrac{\pi}{8}$; $x = \sqrt{3}$.

Упражнение 2.14. Найти производные:

1) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$;
2) $f(x) = \sin^2 5x$;
3) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$;
4) $f(x) = 2^{\operatorname{tg}^2 3/x} + e^{\sin x^2}$;
5) $f(x) = \dfrac{e^x\cos x}{\sin x^2}$;
6) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{\sin x^2}$;
7) $f(x) = \sin x - \cos^2 x$;
8) $f(x) = \sqrt{3x + \cos 3x}$;
9) $f(x) = \sin^8\dfrac{x}{8}$;
10) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-3}\right)$;
11) $f(x) = \ln\dfrac{x+2}{x-2}$;
12) $f(x) = 3^{\cos^2 x}$;
13) $f(x) = \ln\left(2^{\sin^2 x}\right)$;
14) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x-3}$;
15) $f(x) = \ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\right)$;
16) $f(x) = \sqrt[3]{\ln^5\sin\dfrac{3}{5}x}$;
17) $f(x) = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;
18) $f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x^2-2}}$;
19) $f(x) = 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{x^2+3}$ в точке $x = 3$;
20) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x^2}$ в точке $x = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{4}$;
21) $f(x) = e^x\sin\sqrt{x^2+1}$ в точке $x = 0$.

Упражнение 2.15. Вычислить дифференциалы функций:

1) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}} + \ln(\operatorname{tg}(2x+7))$;
2) $y = x^{x^x} + \arcsin\dfrac{x}{2}$;
3) $y = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + \operatorname{arctg} e^{5x}$ в точке $x = 1$; при $x = 0$ и $dx = 0{,}1$.

Упражнение 2.16. Вычислить производные указанных порядков:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}, \quad f''$; 3) $f(x) = x^3 + 2x + 6, \quad f^{(4)}$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad f'''$; 4) $f(x) = (3x^4 - 5x + 3)e^{-x}, \quad f^{(24)}$.

Упражнение 2.17. Найти производные n-го порядка:

1) $f(x) = \ln x$;

2) $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x - 4\right)$;

3) $f(x) = \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin 2x \cos 3x$;

5) $f(x) = x^2 e^{5-3x}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 5x + 2}$.

2.6. Применение дифференциального исчисления

Упражнение 2.18. Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_2(3x+8)}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{x}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{2022}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)\arcsin x}{x\cos x-\sin x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Упражнение 2.19. Разложить функции по степеням $x-a$ с остаточным членом в форме Пеано:

1) $f(x)=\dfrac{1}{3x+2}, \quad a=0$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+2x}}, \quad a=0$;

3) $f(x)=\sqrt{x}, \quad a=4$;

4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}, \quad a=1$;

5) $f(x)=\ln(36x^2+17x+2), \quad a=0$;

6) $f(x)=x\cos 2x, \quad a=-\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}, \quad a=-1$;

8) $f(x)=\sin^2 6x, \quad a=0$;

9) $f(x)=\arcsin x, \quad a=0$.

Упражнение 2.20. Найти все функции, удовлетворяющие условию

$$f(x)=f'(x).$$

Упражнение 2.21. Доказать тождество

$$2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi, \quad x\geqslant 1.$$

2.7. Исследование функций и построение графиков

Упражнение 2.22. Исследовать функции и построить их графики:

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

3) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = e^{1/x}$;

6) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^x$;

7) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$;

8) $f(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$;

9) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{3 + \sin x}$;

10) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$;

11) $f(x) = e^{2x - x^2}$;

12) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

Упражнение 2.23. Представить число $a > 0$ в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

2.8. Неопределенный интеграл

Упражнение 2.24. Используя различные преобразования и свойства неопределенного интеграла, вычислить интегралы, сведя их к табличным:

1) $\displaystyle\int \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2-4x}{x^2}+\frac{2}{x^2-9}+\operatorname{ch} x\right) dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-5}-2\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^4-25}}\, dx;$ 3) $\displaystyle\int \frac{3^{x+1}-7^{x-2}}{10^x}\, dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+25};$ 5) $\displaystyle\int \left(x^2+5\right)^3 dx;$ 6) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$

Упражнение 2.25. Пользуясь методом поднесения под знак дифференциала, вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+5)^{18}};$

2) $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{2+e^x};$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x^6-4};$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}};$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}};$

6) $\displaystyle\int \sin^2 5x\, dx;$

7) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} 3x\, dx;$

8) $\displaystyle\int \frac{\ln x\, dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)};$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(1+x)}};$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(4x)+\sin^2(2x)};$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}};$

12) $\displaystyle\int \frac{e^{\arccos x}-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx;$

13) $\displaystyle\int e^{2x^2+\ln x}\, dx;$

14) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}\, dx.$

Упражнение 2.26. Методом замены переменной вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\, dx;$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}};$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}\, dx;$

4) $\displaystyle\int x^5\left(3+5x^2\right)^8 dx;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}};$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$

8) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sin^4(x^2+8)};$

9) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\, dx;$

10) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}\, dx.$

Упражнение 2.27. Методом интегрирования по частям вычислить интегралы:

1) $\int xe^{-3x}\,dx$;

2) $\int x\,\ln x\,dx$;

3) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$;

4) $\int (x^2+3x-8)\ln x\,dx$;

5) $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$;

6) $\int \dfrac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Упражнение 2.28. Выделить правильную часть неправильной рациональной дроби:

1) $\dfrac{2x^5+3x^2-x+8}{x+3}$;

2) $\dfrac{x^5-1}{x^5+8}$.

Упражнение 2.29. Записать вид разложения на простейшие дроби, не находя коэффициентов, следующих функций:

1) $\dfrac{x-2}{(x-3)(x+5)^3}$;

2) $\dfrac{x^2+x-3}{(x+7)^2\,(x^2+2x+3)}$;

3) $\dfrac{1}{(x^2+7)\,(x^2+3x+12)^2}$.

Упражнение 2.30. Разложить правильные дроби на простейшие:

1) $\dfrac{1}{1+x^3}$;

2) $\dfrac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}$;

3) $\dfrac{1}{x\,(4+x^2)^2\,(1+x^2)}$;

4) $\dfrac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}$.

Упражнение 2.31. Проинтегрировать простейшие дроби:

1) $\int \dfrac{2\,dx}{x-3}$;

2) $\int \dfrac{7\,dx}{(3x+2)^{13}}$;

3) $\int \dfrac{6x+1}{x^2+3x+5}dx$;

4) $\int \dfrac{x}{(x^2+x+7)^2}dx$.

Упражнение 2.32. Найти

$$\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx.$$

Упражнение 2.33. 1) $\int \sin 2x\cos^2 2x\,dx$;

2) $\int \cos^3 5x\,dx$;

3) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt{5+\sin x}}\,dx$;

4) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}$;

5) $\int \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$;

6) $\int \operatorname{ctg} 2x\,dx$;

7) $\int \operatorname{ctg}^2 2x\,dx$;

8) $\int \operatorname{ctg}^3 2x\,dx$;

9) $\int \operatorname{ctg}^4 2x\,dx$;

10) $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$;

11) $\int x \sin 3x\,dx$;

12) $\int \cos x \operatorname{sh} 8x\,dx$.

Упражнение 2.34. Найти интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\,(1 - \sqrt[3]{x})}\,dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int x \sqrt[5]{\frac{4+x}{4-x}}\,dx$.

Упражнение 2.35. Найти интегралы от квадратичных иррациональностей:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 7}}$;

2) $\displaystyle\int \frac{(5x-8)\,dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Упражнение 2.36. Найти интегралы, используя тригонометрические или гиперболические подстановки:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}\,dx$;

2) $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 + 12x + 1}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(5 + 2x + x^2)^3}}$.

Упражнение 2.37. Найти интегралы от дифференциального бинома:

1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt[5]{x}\right)^3\,dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2}\,dx$.

2.9. Определенный интеграл

Упражнение 2.38. Вычислить по определению интеграл

$$\int\limits_1^4 x^3\,dx,$$

разбивая отрезок [1,4]: а) на равные части; б) точками, образующими геометрическую прогрессию.

Для каждого разбиения в качестве ζ_k рассмотреть:

1) правые концы частичных отрезков;

2) левые концы частичных отрезков;

3) середины частичных отрезков.

Упражнение 2.39. Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница и свойствами интеграла Римана, вычислить:

1) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{(2+5x)^4}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{\cos\frac{1}{x^2}}{x^3}\,dx$;

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_{-4}^{1} \sqrt[6]{x^2+6x+9}\,dx$.

Упражнение 2.40. Пользуясь методом замены переменной в определенном интеграле, вычислить:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} \frac{9-x^2}{x^2}\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

5) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$;

7) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$;

8) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

Упражнение 2.41. Пользуясь методом интегрирования по частям в определенном интеграле, вычислить:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 3x \, dx$;

2) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx$;

3) $\int\limits_0^{1} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx$;

5) $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx$;

6) $\int\limits_0^{1/2} \arccos \sqrt{x} \, dx$.

2.10. Приложения определенный интеграл

Упражнение 2.42. Вычислить длины дуг кривых:
1) $y = -\ln\left(x^2 - 1\right),\ x \in [3, 6]$;
2) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + 5,\ x \in [0, 1]$;
3) $y = 1 + \arcsin e^x,\ x \in [-\ln 5, -\ln 3]$;
4) $y = \sqrt{x - x^2} + \arccos\sqrt{1 - x},\ x \in \left[\frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right]$.

Упражнение 2.43. Изобразить область, ограниченную данными кривыми, и найти ее площадь:
1) $y = x - 2x^2,\ y = 2x$;
2) $y = x + \dfrac{\pi}{2},\ y = \dfrac{1}{2}\cos x,\ x = 0$;
3) $y = \cos^2 x,\ y = 0,\ y = \dfrac{1}{2}$;
4) $y = 2e^{2x},\ y = x + 25,\ x = -2,\ x = 3$.

Упражнение 2.44. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми, заданными параметрически:
1) $x = \operatorname{sh} t + 1,\ y = 2\operatorname{th} t,\ t \in [1, 3]$;
2) $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ a > 0,\ b > 0,\ t \in [0, \pi]\ \ (y \geqslant 0)$;
3) $x = t - \cos t,\ y = 1 + \sin t,\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]\ \ (x \geqslant 0)$.

Упражнение 2.45. Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в полярных координатах:
1) $\rho^2(\varphi) = 8\sin 2\varphi,\ \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$;
2) $\rho(\varphi) = 5e^{\frac{3\varphi}{2}},\ \varphi \in [0, 4]$;
3) $\rho(\varphi) = a\varphi^3,\ \varphi \in [1, 2]$;
4) $\rho(\varphi) = \dfrac{1}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)},\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$;
5) $\rho(\varphi) = 4\cos 5\varphi,\ \rho = 2$.

Упражнение 2.46. Вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:
1) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = -4,\ z = 8$;
2) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} = 2,\ z = y,\ z = 1\quad (y \geqslant 0)$;
3) $2z = 2x^2 + 5y^2,\ z = 2$;
4) $x^2 + y^2 - z^2 = 9,\ z = 0,\ z = 1$;
5) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1,\ z = 0,\ z = 1$.

2.11. Несобственные интегралы

Упражнение 2.47. Вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$;

2) $\displaystyle\int\limits_5^{+\infty} \frac{x\,dx}{1-x^6}$;

3) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+1}$;

6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Упражнение 2.48. Исследовать интеграл на сходимость ($n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

1) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x^2\,dx}{1-x^2}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{e}}^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt[5]{x}}$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\frac{1}{2}\sqrt{\ln x}}$;

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{\beta x}x\,dx$;

6) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n}\,dx$;

7) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}}$;

8) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$.

Упражнение 2.49. Вычислить в смысле главного значения по Коши:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-2x}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arcctg} x\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+4x^2}{1+16x^4}\,dx$.

Упражнение 2.50. Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+x^2\right)}{1+\sqrt{x}-\sqrt{e^x}}\,dx$;

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{e^x+\ln x}\,dx$;

4) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)\,dx$.

Упражнение 2.51. Доказать, что несобственные интегралы сходятся условно:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \sin x^4\,dx$;

2) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx;$

3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sin x^2}{\sqrt{x}}\,dx;$

4) $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}};$

5) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\cos x}{x+1}\,dx;$

6) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2.12. Предел и непрерывность функций многих переменных

Упражнение 2.52. Исходя из определения предела, доказать:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x-y)\cos\dfrac{x}{y}=0;$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{3-x+y}{2x-y+1}=2;$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^3}{x^4+y^4}=0;$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{5}{(x-1)^3-y}=\infty.$

Упражнение 2.53. Вычислить двойной предел либо доказать, что он не существует:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 9}}\dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2y};$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{2x+3y}{x^2+xy+y^2};$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}(x+y)e^{-(x^2+y^2)};$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}};$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{|x|};$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2};$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Упражнение 2.54. Найти повторные пределы

$$\lim_{x\to a}\{\lim_{y\to b} f(x,y)\},\ \lim_{y\to b}\{\lim_{x\to a} f(x,y)\},$$

если:

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y}{x^2+y},\ a=0,\ b=0;$

2) $f(x,y)=\dfrac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y},\ a=0,\ b=0;$

3) $f(x,y)=x+y\sin\dfrac{1}{x},\ a=0,\ b=0;$

4) $f(x,y)=\log_{1+x}(1+x+y),\ a=0,\ b=0;$

5) $f(x,y)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi(x-y)}{6x+4y},\ a=\infty,\ b=\infty.$

2.13. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Упражнение 2.55. Исследовать на дифференцируемость функции:
1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$;
2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|}, & \text{если } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, y = 0; \end{cases}$
3) $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}},\ x \in \mathbb{R}^d$.

Упражнение 2.56. Найти частные производные и выписать полный дифференциал функции:

1) $z = x^4\cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$;
2) $z = \sin(xy) \cdot \sec(x+y)$;
3) $z = \arccos\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$;
4) $z = (x+y)\ln(x+y)$;
5) $z = e^{\frac{y}{x}}$;
6) $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$;
7) $u = z^{\frac{x}{y}}$;
8) $f = \sum\limits_{i,j=1}^{d} a_{ij}\dfrac{x_i}{x_j}, a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Упражнение 2.57. Найти производную по направлению функции:

1) $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ в направлении, параллельном биссектрисе угла между осями координат, в точке $(1,1)$;

2) $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ в точке $(-1,-1)$ по направлению к точке $(1,1)$;

3) $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)$ в точке $(1,1,1)$ в направлении $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Упражнение 2.58. Найти направление максимального возрастания функции в точке, а также наибольшее из значений производных по разным направлениям:

1) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ в точке $(1,1,1)$;
2) $f(x,y) = xy + x^y$ в точке $(1,-1)$.

Упражнение 2.59. Найти производную функции

$$f(x,y) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

в точке $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Упражнение 2.60. Найти частные производные и дифференциалы первого и второго порядка:

1) $z = \dfrac{xy}{x-y}$;
2) $u = x^{xyz}$;
3) $z = \dfrac{x}{y}e^{xy}$;
4) $u = \operatorname{ctg} xyz$;
5) $z = x\log_3(x+y)$;
6) $z = x^3\cos^2 y + y^3\cos^2 x$.

Упражнение 2.61. Исследовать на экстремум функции двух переменных:

1) $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$;
2) $f(x,y) = (x-3)^2 - (y-2)^2$;
3) $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$;
4) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
5) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ при $x, y > 0$;
6) $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;
7) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$;
8) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \cos(x-y)$ при $x, y \in (0,\pi)$.

2.14. Дифференцируемые векторные функции

Упражнение 2.62. Вычислить матрицу Якоби и якобиан:
1) системы функций

$$\begin{cases} f_1 = \sin x + \cos y + z, \\ f_2 = \cos x + \sin y - z, \\ f_3 = \operatorname{arctg} z; \end{cases}$$

2) системы функций

$$\begin{cases} f_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \\ f_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2, \\ \dots \\ f_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^n. \end{cases}$$

Упражнение 2.63. Вычислить первый и второй дифференциалы сложных функций:

1) $z = e^{x^2-y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$;
2) $z = x^3 - axy + y^3$, $x = t^2$, $y = t \sin t$;
3) $u = xy + yz + zx$, $x = \sin t$, $y = \ln t$, $z = e^t$;
4) $u = f(x, y, z)$, $x = \operatorname{arctg} t$, $y = t$, $z = t^2$;
5) $u = f(\sin x + \cos y)$;
6) $u = \ln f(\xi, \eta)$, $\xi = x$, $\eta = x + y$.

Упражнение 2.64. Уравнение с двумя переменными имеет решение (x_0, y_0). Установить, определяет ли это уравнение однозначную неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ и, если да, найти $y'(x)$ и $y'(x_0)$:

1) $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = x - y$, $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$;
2) $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$;
3) $y^3 + 3x^2y + 2xy^2 - 4x - 6y = 0$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$;
4) $x^3 - y^3 + 8x^2y + 6xy^2 = 14$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

2.15. Числовые ряды

Упражнение 2.65. Исследовать по определению сходимость следующих рядов. Для сходящихся рядов найти их суммы:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3^{k-1}}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^k}{11^k}$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$;

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$;

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9k^2-3k-2}$;

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[10k]{1000}}$;

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{1+2+\ldots+k}$.

Упражнение 2.66. Проверить необходимый признак сходимости ряда и указать ряды, которые заведомо расходятся:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+8}{3k^2+4}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{k+2}{k+3}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+1/k)^{k^2}}{e^k}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\sin\frac{1}{k}$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{0,03}$;

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^k$;

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1}$;

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k^{10}}$;

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k^2+2)\ln\frac{k^2+1}{k^2}$.

Упражнение 2.67. Убедиться, что выполнен необходимый признак сходимости ряда. Доказать, что ряд расходящийся:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+8}{(k+5)\sqrt[3]{k}}$.

Упражнение 2.68. Используя мажорантный признак сравнения положительных числовых рядов, исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+\cos k}{k}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+2k+5}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(3+2(-1)^k\right)(1+\sin^2 k)}{k\sqrt{k}}$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} k!}{k(k+2)(k+3)}$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(2k+1)^k\sqrt{k+1}}$;

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5(\sqrt{2}+\sin\sqrt{k})}{2^k+k^2}$;

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{\sqrt[4]{k^5}}$.

Упражнение 2.69. Пользуясь признаком сравнения положительных числовых рядов в предельной форме, исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sqrt{k}+7}{\sqrt{k^6+5k-3}}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^4\sin\frac{2\pi}{(k+1)^3}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}\ln\frac{k+1}{k}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{k+2}{5k+3}\right)^k$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+3}}$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{k}} + 2^{-\frac{1}{k}} - 1\right)$;

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - k \sin\frac{1}{k}\right)^{\alpha}$;

8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln\frac{2k+1}{2k-1} - 1\right)$;

9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{k-1}{k+1}}\right)^{\alpha}$;

10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[2k]{2k} - 1)$.

Упражнение 2.70. Пользуясь признаками Даламбера и Коши, исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}(2k)!}{5^{2k}(k!)^4}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{k!} \operatorname{arctg}\frac{1}{5^k}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^3+k}{3k^3-1}\right)^{k^2}$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{k+1}}$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (2k+3) \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

Упражнение 2.71. Пользуясь интегральным признаком, исследовать ряды на сходимость:

1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$;

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k!)}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\ln(k^2+1)}{\sqrt{k^5+3k+2}}$.

Упражнение 2.72. Исследовать ряды на сходимость с помощью признака Гаусса:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\right)^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!e^k}{k^{k+\alpha}}, \ \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)k^{\alpha}}, \ \beta > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Упражнение 2.73. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+100}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{\sqrt[5]{k}}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{e^k - k} \cos\frac{1}{k}$.

Упражнение 2.74. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k}{e^{2k}}$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k(k+1)} \frac{2^k + k^2}{3^k + k^3}$;

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k+1} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{k}}$;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\cos k}{\sqrt{k}}} - \cos \frac{1}{k}\right)$;

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin k^2$.

2.16. Функциональные последовательности и ряды

Упражнение 2.75. Доказать равномерную сходимость последовательности $f_n(x)$ на множестве D:

1) $f_n(x) = \dfrac{n}{x^2+n^2}\operatorname{arctg}\sqrt{nx}, \quad D = [0,\, +\infty);$

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}, \quad D = [1,\, +\infty);$

3) $f_n(x) = x^n + x^{2n} - 2x^{3n}, \quad D = [0,1];$

4) $f_n(x) = \dfrac{n}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right), \quad D = (0,10).$

Упражнение 2.76. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ на множестве D сходится неравномерно:

1) $f_n(x) = \sin^n x, \quad D = (0, \pi/2);$

2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x^n}, \quad D = (1, +\infty);$

3) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1+x/n}}{x^2}, \quad D = (0,1);$

4) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} n^2x}{x}, \quad D = (0,1);$

5) $f_n(x) = \sqrt{n}(\sqrt{1+nx} - \sqrt{nx}), \quad D = (0,1).$

Упражнение 2.77. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве D с помощью признака Вейерштрасса:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} kx}{x^4 + k\sqrt[3]{k}}, \quad D = \mathbb{R};$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{kx}\ln\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right), \quad D = (0,\, +\infty);$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x^2+k^3}, \quad D = \mathbb{R}.$

Упражнение 2.78. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве D с помощью признаков Абеля и Дирихле:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx \sin x}{\sqrt[3]{k-\sqrt{k}}}, \quad D = [0,\, +\infty);$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\ln kx}{kx}\cdot\left(1 - \dfrac{1}{2k^2+3}\right), \quad D = [1,\, +\infty).$

Упражнение 2.79. Исследовать сумму ряда на непрерывность:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n;$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x}\cdot 2^{-n\ln x};$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{e^{n^2x^2}}.$

Упражнение 2.80. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$, и вычислить интеграл I:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2}, \quad I = \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Упражнение 2.81. Исследовать функцию $f(x)$ на дифференцируемость:

1)$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$;

2)$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^{5/2}}$.

2.17. Степенные ряды

Упражнение 2.82. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{k!}(x+1)^k$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$;

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\dfrac{k^2}{2^k}\, x^k$;

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{kx}{e}\right)^k$;

5) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4^k+3^k}{1+(-2)^k}(x-1)^k$;

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k(x+3)^k}{2k+1}$;

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{\frac{1}{k}}-1\right)(x+\pi)^k$;

8) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}x^k$.

Упражнение 2.83. Найти область сходимости ряда:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\ln^k x}{3^k(k+1)}$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3^{3k}(k!)^3}{(3k)!}\operatorname{tg}^k x$;

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k+1\right)^k \sin^k x$;

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+1}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^k$.

Упражнение 2.84. Разложить функцию f в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$ и указать радиус сходимости:

1)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{3+x}, \quad x_0=-1$;

2)$f(x)=\dfrac{1}{(x^2-6x+18)^2}, \quad x_0=3$;

3)$f(x)=(2x+1)\sin x\sin(x+1), \quad x_0=-\dfrac{1}{2}$;

4)$f(x)=\ln\dfrac{x^2-2x+3}{2-x}, \quad x_0=1$.

2.18. Ряды Фурье

Упражнение 2.85. Построить ряды Фурье и изобразить графики их сумм для следующих функций:

1) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-\pi, \pi]$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ 2, & x \in [0, \pi); \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi, 0), \\ 2x, & x \in [0, \pi); \end{cases}$

4) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2\pi]$.

Упражнение 2.86. Разложить в ряд Фурье в указанных промежутках следующие функции:

1) $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$;
2) $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$;
3) $f(x) = x \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi]$;
4) $f(x) = (x + 1) \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

Упражнение 2.87. Разложить в ряд Фурье в отрезке $[0, \pi]$: а) по косинусам кратных дуг; б) по синусам кратных дуг следующие функции:

1) $f(x) = x^2$;
2) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi]; \end{cases}$
3) $f(x) = \cos x$.

Упражнение 2.88. Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)^2}$.

Упражнение 2.89. 1) $f(x) = 2 - x, \quad x \in [0, 4], \quad T = 4$;

2) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \in [-2, -1) \cup (-1, 2), \end{cases} \quad T = 4$;
3) $f(x) = |\cos x|, \quad x \in \mathbb{R}$;
4) $f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$;
5) $f(x) = 5 + x - \dfrac{x^2}{2}, \quad x \in [-1, 1]$;
6) $f(x) = 10 - x, \quad x \in [-5, 15]$.

Упражнение 2.90. Разложить в ряд Фурье $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$:

1) если $T = 2$ — период f;
2) по синусам, если $T = 2$ — полупериод f;
3) по косинусам, если $T = 2$ — полупериод f.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Вопросы для коллоквиумов

3.1.1. Предел последовательности

Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера. Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

3.1.2. Дифференцируемые функции

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков. Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши). Правила Лопиталя. Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши. Разложение элементарных функций. Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума. Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

3.1.3. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

3.1.4. Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$, гиперплоскость, общий вид линейного отображения из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}$. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца. Полином Тейлора, формула Тейлора. Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

3.1.5. Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

3.1.6. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^d$

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега. Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла. Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.

3.2. Вопросы к экзамену

1 семестр

1. Высказывания. Кванторы общности и существования.

2. Множества и операции над ними.

3. Декартово произведение множеств.

4. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции).

5. Сюръекция, инъекция, биекция.

6. Обратное отображение.

7. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.

8. Аксиоматика и модели множества действительных чисел.

9. Важнейшие подмножества.

10. Границы числовых множеств.

11. Ограниченные множества.

12. Точные границы множества.

13. Теорема Дедекинда.

14. Принцип Архимеда.

15. Позиционные системы счисления.

16. Понятие о мощности множества, основные мощности.

17. Теорема Кантора о несчетности континуума.

18. Ограниченные последовательности.

19. Предел последовательности и его свойства.

20. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.

21. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

22. Теорема о сходимости монотонных последовательностей.

23. Число Эйлера.

24. Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.

25. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

26. Определение предела функции по Коши и по Гейне.

27. Общие свойства предела функции.

28. Предел и операции над функциями.

29. Предел функции и неравенства.

30. Замечательные пределы.

31. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы.

32. Символы Харди и Ландау.

33. Критерий Коши существования предела функции.

34. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

35. Непрерывность функции в точке.

36. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями.

37. Непрерывность композиции.

38. Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши.

39. Теорема о непрерывном образе отрезка.

40. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

41. Колебание функции.

42. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции.

43. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

44. Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

45. Задачи, приводящие к понятию производной.

46. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

47. Производные элементарных функций.

48. Правила дифференцирования.

49. Связь непрерывности и дифференцируемости.

50. Связь дифференцирования с операциями над функциями.

51. Производная обратной функции.

52. Производные высших порядков.

53. Экстремумы функции.

54. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

55. Правила Лопиталя.

56. Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.

57. Разложение элементарных функций.

58. Монотонность и знак производной.

59. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

60. Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости.

61. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

62. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.

63. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.

64. Интегрирование по частям и замена переменной.

2 семестр

1. Интегрирование рациональных функций.

2. Интегрирование некоторых иррациональностей.

3. Примеры задач, приводящих к понятию интеграла.

4. Определение интеграла Римана.

5. Необходимое условие интегрируемости.

6. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу.

7. Классы интегрируемых функций.

8. Свойства определенного интеграла.

9. Теоремы о среднем значении.

10. Формула Ньютона-Лейбница.

11. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

12. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

13. Длина пространственной кривой.

14. Площадь криволинейной трапеции.

15. Площадь поверхности вращения.

16. Объем тела вращения.

17. Несобственные интегралы и их свойства.

18. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.

19. Главное значение по Коши.

20. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

21. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.

22. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.

23. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.

24. Метрика, шары, открытые множества.

25. Внутренние точки множества, внутренность.

26. Предельные и изолированные точки множества.

27. Замкнутые множества, замыкание, граница.

28. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств.

29. Компактные и связные множества.

30. Предел последовательности и функции в метрическом пространстве.

31. Непрерывность функции на метрическом пространстве.

32. Глобальный критерий непрерывности.

33. Ограниченные множества.

34. Последовательность Коши, полнота метрического пространства.

35. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

36. Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.

37. Непрерывные функции на метрических пространствах.

38. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества.

39. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве.

40. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

41. Линейные отображения из ?d в ?, гиперплоскость, общий вид линейного отображения.

42. Дифференцируемость, производная и ее свойства.

43. Формула Лагранжа.

44. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости.

45. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

46. Частные производные высших порядков.

47. Теорема Шварца.

48. Полином Тейлора, формула Тейлора.

49. Квадратичные формы и их матрицы.

50. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

51. Локальные экстремумы функции.

52. Необходимые условия локального экстремума, стационарные точки функции.

53. Достаточное условие локального экстремума.

54. Векторные функции, компоненты.

55. Линейные отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

56. Дифференцируемые векторные функции.

57. Свойства производной и связь с производными компонент.

58. Матрица Якоби.

59. Производная композиции.

60. Гомеоморфизм.

61. Теорема Брауера.

62. Теорема об обратной функции.

63. Теорема о неявной функции.

64. Формулы для определения производных неявной функции.

65. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы.

66. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда.

67. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда.

68. Операции над сходящимися рядами.

69. Необходимое условие сходимости ряда.

70. Критерий Коши.

71. Положительные ряды, критерий сходимости.

72. Признак сравнения и его различные формы.

73. Признак Коши.

74. Теорема Куммера.

75. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса.

76. Интегральный признак Коши.

77. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.

78. Преобразование Абеля.

79. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов.

80. Ряды Лейбница.

81. Ассоциативность и коммутативность в теории рядов.

82. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

3 семестр

1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов, критерий Коши.
2. Теорема о перестановке предельных переходов.
3. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.
4. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини.
5. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.
6. Тригонометрическая система, ряды Фурье.
7. Интегральные представления для сумм Фурье.
8. Лемма Римана-Лебега.
9. Принцип локализации.
10. Условия сходимости ряда Фурье в точке.
11. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье.
12. Теорема Дирихле-Жордана.
13. Элементарная теория интегралов с параметром.
14. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.
15. Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле.
16. Гамма- и бета-функции Эйлера.
17. Положительная ориентация плоского контура.
18. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
19. Формула Грина.
20. Односвязные области.
21. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.
22. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.
23. Поверхность, площадь поверхности.
24. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация.
25. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
26. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.
27. Теория поля.

. 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. – Изд. 10-е, испр. – Москва : МЦНМО, 2020.

2. *Кудрявцев, Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : Учебник. / Л. Д. Кудрявцев – 5-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 444 с.

3. *Кудрявцев, Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ : Учебник. / Л. Д. Кудрявцев – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 467 с.

4. *Кротов, В. Г.* Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2017. - 375 с. – URL:http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394.

5. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. – Изд. 24-е, стер. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 623 с. – URL: https://reader.lanbook.com/book/332675.

6. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 1 / [И. Л. Васильев и др.]. – 2022. – 293 с.

7. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 2 / [С. А. Бондарев и др.]. – 2023. – 355 с.

8. *Бровка, Н. В.* Практикум по математическому анализу упражнения : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н. В. Бровка, А. В. Ляцкая, А. П. Карпова – Минск : БГУ, 2023. – 455 с. – (Классическое университетское издание). – URL:https://elib.bsu.by/handle/123456789/303294.

Дополнительная

1. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу. / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М.: Высшая школа, 2000. – 695 с.

2. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1990 и другие издания.

3. *Зверович, Э. И.* Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. / Э. И. Зверович. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 2001 и другие издания.

5. Сборник задач по математическому анализу / Под ред. Л. Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.

6. *Ильин, В. А.* Математический анализ. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М.: Наука, 1985 и другие издания.

7. *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа. / А. М. Тер-Крикоров, И. И. Шабунин. – М.: Наука, 1988.

8. *Рудин, У.* Основы математического анализа. / У. Рудин. – М.: Мир, 1976 и другие издания.

9. *Полиа, Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. / Г. Полиа, Г. Сеге. – М.: Наука, 1978.

10. *Гелбаум, Б.* Контрпримеры в анализе. / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967.

4.2. Электронные ресурсы

1. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/31103 ЭУМК ММФ 2013. – Дата доступа: 22.12.2023.

2. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/257817ЭУМК ФПМИ 2021. – Дата доступа: 22.12.2023.