Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
__________________ О.Г. Прохоренко
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 570/б.

АЛГЕБРА
Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-13-2023, примерного учебного плана № 6-05-05-031/пр. от 30.01.2023 и учебных планов: № 6-5.4-61/01, № 6-5.4-62/01 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Тихонов Сергей Викторович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Иванов Константин Александрович – старший преподаватель кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Балащенко Виталий Владимирович, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Бусел Татьяна Сергеевна, старший научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации БГУ
(протокол № 11 от 08.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор В.В. Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Алгебра» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Целью дисциплины «Алгебра» является изложение основ современной алгебры.

Образовательная цель: обучить студентов фундаментальным методам общей алгебры, линейной алгебры, теории чисел; ознакомить с основными алгебраическими структурами — группами, кольцами и полями; создать базу для освоения основных понятий и методов современной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Алгебра»:

–ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений, теорию векторных пространств и линейных операторов;

–изучить комплексные числа и многочлены;

–развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;

–привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится **к модулю** «Алгебра и геометрия» государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Алгебра» является базовой для преподавания большинства математических дисциплин. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Аналитическая геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Алгебра» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК-9. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных задач механики и математики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

–основные понятия и результаты линейной алгебры;

–методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Алгебра»;

–алгоритмы решения задач по алгебре;

уметь:

–выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме, извлекать корни из комплексных чисел, применять формулу Муавра;

–вычислять определители;

–выполнять операции над матрицами;

–решать системы линейных уравнений;

–находить базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе, находить ранг матрицы и системы векторов;

–находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;

владеть:

–основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, многочленами, комплексными числами;

–методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Алгебра».

– навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины.

Дисциплина изучается в 1 и 2 семестрах очной формы получения высшего образования.

Всего на изучение дисциплины отведено 198 часов, в том числе 122 аудиторных часа, из них лекции – 60 часов, практические занятия – 54 часа и управляемая самостоятельная работа – 8 часов, из них:

1 семестр – всего 108 часов, в том числе аудиторных — 72 часа, из них лекции — 36 часов, практические занятия — 32 часов и управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

2 семестр – всего 90 часов, в том числе аудиторных — 50 часов, из них лекции — 24 часов, практические занятия — 22 часа и управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен в каждом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Арифметика целых чисел. Комплексные числа

Теорема о делении с остатком для целых чисел. Алгоритм Евклида. Определение комплексных чисел, сопряженные комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра, геометрия операций над комплексными числами. Корни n-ой степени из комплексного числа, корни n-ой степени из единицы, первообразные корни и их свойства.

Тема 2. Матрицы и операции над ними.

Прямоугольные матрицы, равенство матриц, сложение и умножение матрицы на скаляр, транспонирование матриц. Умножение матриц, ассоциативность умножения матриц, связь между операциями сложения, умножения и транспонирования матриц. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Тема 3. Перестановки и подстановки. Определители и их применение.

Число перестановок конечного множества, четность перестановки, число четных (нечетных) перестановок конечного множества. Число подстановок конечного множества, четность подстановки, разложение подстановки в произведение независимых циклов. Определение определителя и его свойства. Теорема Лапласа. Построение обратной матрицы, правило Крамера.

Тема 4. Многочлены от одной переменной.

Определение многочлена от одной переменной, равенство многочленов, теорема о делении с остатком, теорема Безу, схема Горнера. Корни многочленов, кратные корни, рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами. Основная теорема алгебры комплексных чисел, формулы Виета, неприводимые многочлены над R и C.

Тема 5. Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля.

Определения и примеры групп, колец, полей и их свойства. Определение бинарной алгебраической операции, нейтральный и симметричный элементы.

Тема 6. Векторные пространства.

Определение и примеры. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная зависимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса. Матрица перехода. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Подпространство, его размерность. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Прямая сумма подпространств.

Тема 7. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений, однородные системы. Теорема Кронекера—Капелли. Фундаментальная система решений. Структура множества решений произвольной системы линейных уравнений.

Тема 8. Линейные операторы векторных пространств.

Линейный оператор, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Алгебраические действия над линейными операторами. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Условия обратимости оператора. Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен матрицы и оператора.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
	1 семестр							
1	Арифметика целых чисел, комплексные числа	6	6					Устный опрос
2	Матрицы и операции над ними	8	6				2	Контрольная работа
3	Перестановки, подстановки. Определители и их применение.	10	12					Устный опрос
4	Многочлены от одной переменной	8	4					Устный опрос
5	Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля.	4	4				2	Контрольная работа
	Всего за семестр	**36**	**32**				**4**	
	2 семестр							
6	Векторные пространства.	10	10					Контрольная работа
7	Системы линейных уравнений.	6	4				2	Устный опрос
8	Линейные операторы векторных пространств.	8	8				2	Контрольная работа
	Всего за семестр	**24**	**22**				**4**	
	Всего по дисциплине	**60**	**54**				**8**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: группы, кольца, поля. / В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. – Минск: БГУ, – 2015. – 152 с. http://elib.bsu.by/handle/123456789/149209.
2. Беняш-Кривец В.В. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. // В.В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский. Минск: БГУ, 2015. 152 с. 116 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/149208
3. Алгебра: учебно-методический комплекс для специальности 1-31 03 02 «Механика» (по направлениям) / сост. В.-В. Беняш-Кривец, А.А. Бондаренко, А.А. Шаромет. – Минск: БГУ, 2015. https://elib.bsu.by/handle/123456789/125192
4. Алгебра и теория чисел: учебно-методический комплекс для специальностей 1-31 03 01-01 «Математика» (научно-производственная деятельность), 1-31 03 01-02 «Математика» (научно-педагогическая деятельность), 1-31 03 01-03 «Математика» (экономическая деятельность), 1-31 03 01-05 «Математика» (информационные технологии), 1-31 03 01-06 «Математика» (анализ и моделирование информационных систем) / сост. В.-В. Беняш-Кривец, Г.Е. Пунинский, А.А. Шаромет. – Минск: БГУ, 2015. https://elib.bsu.by/handle/123456789/133857
5. Геометрия и алгебра [Электронный ресурс]: электронный учебно-методический комплекс для специальностей 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)», 1-31 03 04 «Информатика», 1-31 03 05 «Актуарная математика», 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики ; сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов. - Минск : БГУ, 2020. - URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/242860.
6. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-31 03 07 «Прикладная информатика (по направлениям)» / БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики ; сост.: Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов. - Минск : БГУ, 2019. - URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/219726.
7. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 476 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/183752

Перечень дополнительной литературы

1. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. / М.В. Милованов, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13295
2. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. / М.В. Милованов, М.М. Толкачев, Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Минск: Амалфея, 2001. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296
3. Размыслович Г. П. Геометрия и алгебра. В 5 - ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики Г.П. Размыслович - Минск: БГУ, 2010. - 73 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/2336
4. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. пособие для студ. мат. и физических спец. ун–тов / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, М. М. Толкачев, А. С. Феденко ; Под ред. А. С. Феденко. – 2–е изд. – Минск: Універсітэцкае, 1999. – 302 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294
5. Монахов В.С. Алгебра и теория чисел: практикум. // В.С. Монахов, А.В. Бузланов. - Минск: Изд. центр БГУ, 2007. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13297
6. Размыслович Г.П. Геометрия и алгебра. Практикум: учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по спец. "Прикладная математика", "Информатика", "Актуарная математика" и напр. спец. "Экономическая кибернетика", "Комп. безопасность", "Прикладная информатика" / Г. П. Размыслович, А. В. Филипцов, В. М. Ширяев. - Минск: Вышэйшая школа, 2018. - 382 с.
7. Геометрия и алгебра : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики : в 5 ч. Ч. 2 : Векторные пространства / Г. П. **Размыслович** ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики. - Минск : БГУ, 2013. - 56 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/50318
8. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств / Г. П. Размыслович. — Минск :БГУ, 2014. - 71 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/98210
9. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 4. Полиномиальные и нормальные формы матриц. Евклидово и унитарное пространства / Г. П. Размыслович. — Минск :БГУ, 2014. - 65 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/105019

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Контроль работы студента проходит в форме устных опросов, выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, контрольных работ. Задания к самостоятельным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Алгебра» учебным планом предусмотрен **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации:

Формирование отметки за текущую аттестацию:

– выполнение контрольной работы – 50 %;
– устные опросы – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40 %, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2. Матрицы и операции над ними. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Две квадратные матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Докажите, что если матрицы B, C перестановочны с A, то $B+C$ и BC также перестановочны с A.
2. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то $(A+B)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i A^i B^{n-i}$.
3. Вычислить BC и CB^T, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}$.
4. Вычислить $AA^\top$ и $f(B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1-2i & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $f(x) = -x^2 + 3x - 6$.
5. Для матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и полинома $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 4$ вычислить $f(C)$.
6. С помощью элементарных преобразований найти матрицу C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
7. Используя явные формулы для обратной матрицы, вычислить C^{-1}, где $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
8. Найти A^{-1}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
9. Найти все матрицы X, перестановочные с данной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Получающуюся при решении систему линейных уравнений решить методом Гаусса.
10. Пусть A – квадратная матрица порядка n, такая, что $A^2 = A$. Докажите, что $(2A - E_n)^2 = E_n$.

11. Найдите все квадратные матрицы порядка 2, такие, что A^2 – нулевая матрица.
12. Матрица S называется симметрической, если $S^T = S$. Докажите, что если A – произвольная квадратная матрица, то матрицы $A + A^T$, AA^T являются симметрическими.
13. Пусть A – обратимая квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 5. Алгебраическая операция, понятие группы, кольца, поля. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Охарактеризуйте каждую из заданных алгебраических операций на множестве M, т.е. выясните, является ли операция коммутативной, ассоциативной, существует ли нейтральный относительно нее элемент e, для каких элементов существуют симметричные элементы: а) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = НОД(a,b)$; б) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = a^b$; в) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = \max\{a,b\}$; г) $M = \mathbb{N}$, $a \circ b = a^2b^2$; д) $M = \mathbb{R}^{>0}$, $a \circ b = \sqrt{ab}$; е) $M = \mathbb{R}^{>0}$, $a \circ b = \dfrac{a}{b}$.
2. Выясните, образует ли группу каждое из множеств относительно названной операции:

   а) четных чисел относительно сложения;

   б) нечетных чисел относительно сложения;

   в) рациональных (действительных) чисел, отличных от нуля, относительно умножения;

   г) рациональных чисел, знаменатели которых – степени числа 2 с целыми неотрицательными показателями относительно сложения.
3. Выясните, какие из множеств являются кольцами и какие полями относительно обычных операций сложения и умножения:

   а) множество $\mathbb{Z}$; б) множество $m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$; в) $\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$; г) $\{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$; д) $\{a + b\sqrt{2}i \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$; е) $\{a + b\sqrt{2}i \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$; ж) множество рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на данное простое число p; з) $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

   Форма контроля – контрольная работа.

Тема 7. Системы линейных уравнений. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Решите следующие системы, используя правило Крамера:

а) $\begin{cases} -3x_1+2x_2=-8 \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15 \\ 2x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-2 \\ 4x_1+3x_3=-1 \\ x_1+3x_2+x_3=3 \end{cases}$.

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-2 \\ 4x_1+3x_3=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3ix_1+x_2-x_3=-1 \\ 2x_1-ix_2+2x_3=i-2 \\ -x_1+3x_2-ix_3=3 \end{cases}$; в) $2x_1+3x_2-x_3+4x_4=5$.

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX=0$, где а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & -3 & -14 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -22 & -6 & -4 \\ 7 & 11 & -12 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A:=\begin{bmatrix} 10 & 18 & 8 & 14 & 10 \\ -5 & -9 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -19 & -4 & -2 \\ 15 & 25 & -10 & 15 & 9 \end{bmatrix}$; г) $A:=\begin{bmatrix} 13 & 23 & 6 & 17 & 13 \\ -6 & -11 & -7 & -9 & -5 \\ -7 & -14 & -21 & -14 & -8 \\ 11 & 19 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$; д) $A=(1,2,-1,0,3)$.

4. Линейную оболочку следующей системы векторов задайте системой линейных уравнений: а) $v_1=(1,1,1,1)$; б) $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,3,4)$; в) $v_1=(1,1,1,1), v_2=(1,2,3,4), v_3=(1,0,1,0)$.

Форма контроля – устный опрос.

Тема 8. Линейные операторы векторных пространств. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Является ли преобразование f, заданное путем задания координат вектора $f(x)$ как функций координат вектора x, линейным:

   а) $f(x)=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)$; б) $f(x)=(x_1+x_2, x_1+x_3+1, x_1-x_2)$;

   в) $f(x)=(2x_2+3x_3, x_1+x_2-x_3, x_3^2)$

2. Доказать, что преобразование $f: M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, $f(X)=AX$, где A – фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f в стандартном базисе, а также собственные векторы, собственные значения и инва-

риантные подпространства f в случае, когда: а) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

3. Пусть $L=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]\,|\,\deg(f)\le n\}$ – пространство всех полиномов с вещественными коэффициентами, степени которых не превосходят n. Укажите, какие из приведенных отображений $f:L\to L$ являются линейными операторами и найдите их матрицы в базисе $1,x,x^2,\dots,x^n$:

   а) $f(\alpha(x))=\alpha(ax+b)$, где $\alpha(x)\in L$, $a\ne 0$ и b – фиксированные числа;

   б) $D(\alpha(x))=\alpha'(x)$.

4. Верно ли, что линейный оператор переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую?

5. Существует ли линейный оператор двумерного пространства, переводящий векторы a_1,a_2 соответственно в векторы b_1,b_2, и если существует, то найдите его матрицу в базисе e_1,e_2:

   а) $a_1=e_1+3e_2,\ a_2=2e_1-e_2,\ b_1=e_1+5e_2,\ b_2=2e_1+10e_2$;

   б) $a_1=e_1+2e_2,\ a_2=2e_1+4e_2,\ b_1=e_1+5e_2,\ b_2=e_1-e_2$;

   в) $a_1=e_1+e_2,\ a_2=2e_1+2e_2,\ b_1=e_1+3e_2,\ b_2=2e_1+6e_2$.

6. Пусть $e_1,e_2,\dots e_n$ – базис пространства V над полем P. Постройте матрицу оператора φ, в этом базисе, если φ(e_i) равно соответственно:

   а) $e_1+e_2,e_2,\dots,e_n$; б) $e_3,e_2,e_1,e_4,\dots e_n$; в) $e_{s(1)},e_{s(2)},\dots,e_{s(n)}$; где $s\in S_n$ – подстановка.

7. В некотором базисе даны матрица A отображения f и векторы e_1,e_2,e_3. Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами отображения f: а) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\6&3&2\\3&0&1\end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix}-1&2&0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1&0&-3\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}-4&0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}-3&1&1\end{pmatrix}$.

8. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей A: а) $A=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&0&3\\1&3&0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&3\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Форма контроля – контрольная работа

Примерные варианты контрольных работ.

Контрольная работа 1.

1. Найти $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_1 + \overline{z_2}}$, где $z_1 = n + i$, $z_2 = 1 + ni$, n --- номер варианта.

2. Изобразить на плоскости комплексные числа z_1, z_2, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $z_1 - \overline{z_2}$, $z_1 + \overline{z_2}$, где z_1, z_2 – числа из задачи 1.

3. Вычислить: $\sqrt[3]{2 - i\sqrt{12}}$.

4. Вычислить α^{-1}, $\alpha\beta$, α^{100n}, где: $\alpha, \beta \in S_8$ – некоторые подстановки.

5. Вычислить $AA^{\top}$ и $f(B)$, где $f(x) = x^2 - 2X + 1$, а A, B – заданные матрицы второго порядка.

Контрольная работа 2.

1. Вычислить произведение подстановок и разложить его в произведение независимых циклов и произведение транспозиций: $(1,2,5,6,9)(2,3,4,5,9)(5,6,7,8,9)$.

2. Вычислить АВ и ВА, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Выбрать i, j, k так, чтобы произведение $a_{2i}a_{44}a_{j5}a_{5k}a_{12}a_{64}$ входило в развернутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.

4. Вычислите определитель данной матрицы.

5. Найти матрицу, обратную к заданной матрице.

Контрольная работа 3.

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы уравнений $AX = 0$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 := [10,17,-3,11], a_2 := [5,12,-8,6], b_1 := [-1,-2,-3,-2], b_2 := [1,0,-1,0]$.

3. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства следующая совокупность векторов: последовательности вещественных чисел, имеющие предел: 1) 0; 2) $a \neq 0$.

4. Является ли следующая система функций линейно независимой: $\sin x, \sin(x+1),\ \sin x + 2$?

5. При каких значениях x ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2.

Контрольная работа 4.

1. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе $e_1, \dots, e_n$ вектор e_1 заменить на $e_1 + e_2$?

2. Доказать, что преобразование $f : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$, $f(X) = AX$, где A --- фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f, а также собственные векторы, собственные значения и (по возможности) инвариантные подпространства f в случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. При каких значениях x ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x \\ 2 & x & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ равен 2?

4. В некотором базисе даны матрица A отображения f и векторы e_1, e_2, e_3. Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами отображения f: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Примерная тематика практических занятий
1 семестр

Практическое занятие 1. Теорема о делении с остатком для целых чисел. Алгоритм Евклида. НОД и НОК целых чисел.

Практическое занятие 2. Определение комплексных чисел, сопряженные комплексные числа. Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра.

Практическое занятие 3. Корни n-ой степени из комплексного числа, корни n-ой степени из единицы, первообразные корни и их свойства.

Практическое занятие 4. Прямоугольные матрицы, равенство матриц, сложение и умножение матрицы на скаляр, транспонирование матриц.

Практическое занятие 5. Умножение матриц, ассоциативность умножения матриц, связь между операциями сложения, умножения и транспонирования матриц.

Практическое занятие 6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Практическое занятие 7. Перестановки и подстановки.

Практическое занятие 8. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и произведение транспозиций, четность подстановки. Умножение подстановок и его свойства.

Практическое занятие 9. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства.

Практическое занятие 10. Миноры и алгебраические дополнения.

Практическое занятие 11. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке, столбцу.

Практическое занятие 12. Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Теорема Крамера.

Практическое занятие 13. Определение многочлена от одной переменной, теорема о делении с остатком, НОД и НОК многочленов.Разложение многочлена на неприводимые множители. Теорема Безу, схема Горнера.

Практическое занятие 14. Корни многочленов, кратные корни. Основная теорема алгебры комплексных чисел, формулы Виета, неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Практическое занятие 15. Определение бинарной алгебраической операции, нейтральный и симметричный элементы.

Практическое занятие 16. Определения и примеры групп, колец, полей и их свойства.

2 семестр

Практическое занятие 1. Определение и примеры векторных пространств. Система образующих, конечномерные пространства. Линейная зависимость векторов.

Практическое занятие 2. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса.

Практическое занятие 3. Матрица перехода. Ранг системы векторов. Ранг матрицы.

Практическое занятие 4. Подпространство, его размерность. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей.

Практическое занятие 5. Прямая сумма подпространств.

Практическое занятие 6. Системы линейных уравнений, однородные системы. Теорема Кронекера—Капелли.

Практическое занятие 7. Фундаментальная система решений. Структура множества решений произвольной системы линейных уравнений.

Практическое занятие 8. Линейный оператор, его ядро и образ. Ранг и дефект. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису.

Практическое занятие 9. Алгебраические действия над линейными операторами. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Условия обратимости оператора. Инвариантное подпространство. Сужение оператора на инвариантное подпространство.

Практическое занятие 10. Матрица оператора при наличии инвариантного подпространства, при разложении пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Собственное значение и собственный вектор оператора.

Практическое занятие 11. Характеристический многочлен матрицы и оператора.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий практических занятий;

– выполнение домашних заданий;

– подготовка к практическим занятиям;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и промежуточной аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта–общего высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Свойства делимости целых чисел. Теорема о делении с остатком. НОД целых чисел. Алгоритм Евклида.
2. Алгебраическая операция, ее свойства. Теоремы о нейтральном и обратном элементе.
3. Группа, кольцо, поле. Определения и примеры.
4. Определение комплексных чисел, операции сложения и умножения и их свойства. Алгебраическая форма комплексных чисел.
5. Операция сопряжения комплексных чисел и ее свойства.
6. Комплексная плоскость, тригонометрическая форма комплексных чисел. Модуль комплексного числа, его свойства.
7. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
8. Геометрическая интерпретация действий над комплексными числами.
9. Извлечение корней из комплексных чисел.
10. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы и их свойства.
11. Определения перестановок и подстановок, их число. Транспозиции и циклы. Четность перестановки.
12. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
13. Матрицы и действия над ними. Умножение матрицы на число и его свойства.
14. Свойства сложения матриц. Операция транспонирования и ее свойства.
15. Свойства умножения матриц.
16. Определители. Свойства определителей порядка n.
17. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа.
18. Теорема о разложении определителя по строке.
19. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
20. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
21. Кольцо многочленов от одной переменной. Степень многочлена и ее свойства.
22. Теорема о делении многочленов с остатком.
23. Делимость многочленов и ее свойства. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
24. Неприводимые многочлены и их свойства. Разложение многочлена на неприводимые множители.
25. Корни многочленов. Теорема Безу и ее следствия. Кратные корни.
26. Схема Горнера.

27. Неприводимые многочлены над C и R. Каноническое разложение многочленов из C[x] и R[x].

2 семестр

1. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Линейная зависимость и линейная независимость. Свойства линейной зависимости.
3. Базис векторного пространства. Примеры.
4. Размерность векторного пространства. Свойства n-мерных векторных пространств.
5. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
6. Подпространства векторного пространства. Примеры
7. Операции над подпространствами. Размерности суммы и пересечения подпространств.
8. Прямая сумма подпространств. Критерии. Прямое дополнение.
9. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы. Методы вычисления ранга матрицы.
10. Критерий совместности системы линейных уравнений.
11. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
12. Линейные отображения. Примеры. Простейшие свойства линейных отображений.
13. Действия над линейными отображениями.
14. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и произведения операторов.
15. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
16. Ядро и образ и линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.
17. Инвариантные подпространства. Определение и примеры. Инвариантные подпространства и матрица линейного оператора.
18. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры. Нахождение собственных значений.
19. Характеристический многочлен оператора

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Аналитическая геометрия.	Кафедра геометрии и методики преподавания математики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 08.06.2023)
Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 08.06.2023)
Дифференциальные уравнения	Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 08.06.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от ________ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

_________________________ __________________ ___________________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_________________________ __________________ ___________________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)