Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

_____________ О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12323/уч.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2021, типового учебного плана №G31-1-025/тип. от 30.06.2021 г., учебных планов: № G31-1-029/уч.-СИБД от 30.06.2021 г., №G31-1-029/уч. от 30.06.2021 г, №G31-1-209/уч. от 22.03.2022 г. и №G31-1-209/уч. – СИБД от 22.03.2022 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Чесалин Владимир Иванович, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой ________________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Функциональный анализ» – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

1. Ознакомление студентов с основными принципами функционального анализа и примерами их приложений
2. Формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в задачах
3. Повышение их математической культуры.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится **к модулю** «Математические методы» компонента учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей», «Уравнения математической физики», «Вариационное исчисление и методы оптимизации», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующей ***специализированной*** компетенции:

СК-4. Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

знать:

- основные понятия функционального анализа;
- основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

- выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
- устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;
- применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

– основными методами функционального анализа

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

– для очной формы получения высшего образования– 92 часа, в том числе 50 аудиторных часов, из них: лекции – 24 часа, практические занятия – 22 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Тема 1.1. *Метрические пространства.* Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств.

Тема 1.2. *Полные пространства.* Теорема о пополнении. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.

Раздел 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ, РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫЕ И ЛИПШИЦЕВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Тема 2.1. *Теоремы о продолжении.* Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.

Раздел 3. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА.

Тема 3.1. *Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.* Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры Продолжение меры по Лебегу. Основная теорема. Мера Лебега и меры Лебега-Стилтьеса на прямой.

Тема 3.2. *Измеримые функции, простые функции.* Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Раздел 4. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Тема 4.1. *Векторные, нормированные, банаховы пространства.* Ряды в банаховых пространствах.

Тема 4.2. *Линейные операторы.* Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Раздел 5. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА.

Тема 5.1. *Определение скалярного произведения.* Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Раздел 6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Тема 6.1. *Обратимые операторы.* Теоремы об обратимости.

Обратимость оператора, близкого к единичному. Открытость множества обратимых операторов.

Тема 6.2. *Теорема Банаха об обратном операторе.* Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.

Раздел 7. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Тема 7.1. *Линейные ограниченные функционалы.* Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.

Тема 7.2. *Сопряженное пространство.* Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.

Раздел 8. УРАВНЕНИЯ С КОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ.

Тема 8.1. *Компактные операторы.* Альтернатива Фредгольма для уравнений с операторами конечного ранга. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Критерий конечномерности нормированного пространства.

Тема 8.2. *Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.* Уравнения с компактными операторами. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных операторов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	**Название раздела, темы,**	**Количество аудиторных часов**					**Количество часов УСР**	**Форма контроля знаний**
		лекции	**практические Занятия**	**семинарские занятия**	**лабораторные занятия**	**иное**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.	**Метрические пространства**	**4**	**4**					
1.1.	*Метрические пространства.*	2	2				2	Проверка индивидуальных заданий, собеседование
1.2.	*Полные пространства.*	2	2					Проверка индивидуальных заданий
2.	**Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения**	**2**	**2**					
2.1.	*Теоремы о продолжении*	2	2					Контрольная работа 1
3.	**Мера и интеграл Лебега**	**2**	**2**					
3.1	*Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.*	1	1					Коллоквиум
3.2.	*Измеримые функции, простые функции.*	1	1					Контрольная работа 2
4.	**Нормированные пространства**	**4**	**4**					
4.1.	*Векторные, нормированные, банаховы пространства.*	2	2					дискуссия
4.2.	*Линейные операторы.*	2	2				2	Проверка индивидуальных заданий

5.	**Гильбертовы пространства**	**4**	**2**					
5.1.	*Определение скалярного произведения*	4	2					Проверка индивидуальных заданий
6.	**Линейные уравнения в банаховых пространствах**	**2**	**2**					
6.1.	*Обратимые операторы.*	1	2					Опрос
6.2.	*Теорема Банаха об обратном операторе.*	1						Опрос
7.	**Сопряженные пространства и сопряженные операторы**	**4**	**4**					
7.1.	*Линейные ограниченные функционалы.*	2	2					Опрос
7.2.	*Сопряженное пространство.*	2	2					Контрольная работа 3
8	**Уравнения с компактными операторами**	**2**	**2**					
8.1.	*Компактные операторы.*	1	1					Опрос, собеседование
8.2.	*Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.*	1	1					Опрос, собеседование
	ВСЕГО	**24**	**22**				**4**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антоневич, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. - Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907.
2. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/210290.
3. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/189430.
4. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система — URL: — https://e.lanbook.com/book/212048.
5. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/212057

Перечень дополнительной литературы

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.
5. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
7. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. М., МЦНМО, 2017.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, собеседование, дискуссия, коллоквиум; контрольные работы, проверка индивидуальных заданий.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

1. Коллоквиум – 50 %;
2. контрольная работа – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.1. Метрические пространства. Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств.

Студент изучает понятия метрического пространства и метрики. Анализирует варианты задания метрики в различных пространствах. Выполняет индивидуальное задание.

Форма контроля – проверка индивидуального задания, собеседование.

Тема 4.2. Линейные операторы. Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Студент изучает понятие линейного оператора, ограниченного оператора. Выполняет индивидуальное задание, состоящее в проверке линейности, ограниченности конкретных операторов, оценки их норм.

Форма контроля – проверка индивидуального задания.

Примерная тематика практических занятий

Занятие № 1. *Метрические пространства.* Топология, порожденная метрикой. Основные примеры функциональных метрических пространств.

Занятие № 2 *Полные пространства.* Теорема о пополнении.

Занятие № 3. *Теоремы о продолжении.* Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.

Занятие № 4. *Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.* Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры Продолжение меры по Лебегу.

Занятие № 5. *Измеримые функции, простые функции.* Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.

Занятие № 6. *Векторные, нормированные, банаховы пространства.* Ряды в банаховых пространствах.

Занятие № 7. *Линейные операторы.* Норма ограниченного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Занятие № 8. *Гильбертовы пространства.* Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье.

Занятие № 9. *Обратимые операторы.* Теоремы об обратимости.

Занятие № 10. *Теорема Банаха об обратном операторе.* Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.

Занятие № 11. *Линейные ограниченные функционалы.* Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.

Занятие № 12. *Сопряженное пространство.* Сопряженный оператор и его свойства. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения.

Занятие № 13. *Компактные операторы.* Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений. Критерий конечномерности нормированного пространства.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***метод учебной дискуссии,*** который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и согласования существующих позиций в определенной задаче.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний при решении задач, определение способов их решения.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

– научно-исследовательские работы.

Примерный перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа 1.

1. Найти интеграл Лебега $\int_{[0,1]} f(t)dt$, если он существует, где

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{3^n}, & t \epsilon \left]\dfrac{1}{3^{n+1}}, \dfrac{1}{3^n}\right[\setminus K, \ \ n \in \mathbb{N}, \\ [5^t], & t \in K, \\ \cos t, & t \in \left]\dfrac{1}{3}, 1\right[\setminus K. \end{cases}$$

2. На полуинтервале $[0,1[$ задана мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией

$$F(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in\left[0,\frac{6}{13}\right],\\ \frac{3}{4}, & t\in\left]\frac{6}{13},\frac{7}{13}\right],\\ t+\frac{2}{3}, & t\in\left]\frac{7}{13},1\right[,\end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – канторова лестница.

a) Доказать, что любое одноточечное множество измеримо и найти его меру Лебега-Стилтьеса.
b) Найти меру Лебега-Стилтьеса множества рациональных чисел на полуинтервале $[0,1[$.
c) Найти меру Лебега-Стилтьеса канторова множества K.

Контрольная работа 2.

1. Проверить, сходятся ли последовательность $x_n=\left(\underbrace{1,0,\dots,0}_{n},\underbrace{1+\frac{1}{n},\dots,1+\frac{1}{n}}_{n^2},0,0,\dots\right)$ точек метрического пространства $l_{\frac{5}{3}}$ к точке $x_0=(1,1,0,0,0,\dots)$?
2. Найти предел последовательности $x_n=\left(\underbrace{\frac{\sin 3^n}{n^2},\dots,\frac{\sin 3^n}{n^2}}_{n},0,0,\dots\right)$ в метрическом пространстве l_1, если он существует.
3. Найти проекцию вектора $x_0\in H$ на подпространство M, если $H=L_2[0,1]$, $\quad M=\left\{x:\ \int_0^1 x(t)dt=0\right\}$, $\ x_0=\ t^n$.

Контрольная работа 3.

1. С помощью сопряженного уравнения при каждом значении $\lambda\in\mathbb{R}$ выяснить, для каких значений параметров $\alpha,\beta,\gamma\ \in\mathbb{R}$ существует решение интегрального уравнения Фредгольма
$$x(t)=\lambda\int_0^1 K(t,s)x(s)ds\ +y(t)$$
в пространстве $L_2[a,b]$, если $K(t,s)=2ts+s^2$, $y(t)=\alpha t^2-\beta t\ +\gamma$.
2. Найти сопряженный к оператору $A\colon X\to Y$ где $X=L_1[0,1], Y=L_3[0,1]$ и $(Ax)(t)=\int_0^1\frac{s}{\sqrt[3]{t}}x(s)ds$.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Метрические пространства.
2. Основные примеры функциональных метрических пространств.
3. Полные пространства. Теорема о пополнении.
4. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения.
5. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.
6. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.
7. Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры.
8. Продолжение меры по Лебегу.
9. Измеримые функции, простые функции.
10. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.
11. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.
12. Векторные, нормированные, банаховы пространства.
13. Ряды в банаховых пространствах.
14. Линейные операторы.
15. Норма ограниченного оператора.
16. Пространство линейных ограниченных операторов.
17. Теорема Банаха-Штейнгауза
18. Определение скалярного произведения.
19. Неравенство Коши-Буняковского.
20. Гильбертовы пространства.
21. Теорема о проекции.
22. Теорема о рядах Фурье.
23. Обратимые операторы.
24. Теоремы об обратимости.
25. Теорема Банаха об обратном операторе.
26. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.
27. Линейные ограниченные функционалы.
28. Теорема Хана-Банаха.
29. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.
30. Сопряженное пространство.
31. Сопряженный оператор и его свойства.
32. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения
33. Компактные операторы.
34. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах.
35. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.
36. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Уравнения математичес-кой физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
2 .Вариацион-ное исчисление и методы оптимизации	Кафедра функциональног о анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________