

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12320/уч.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности 1-31 03 01-02

Математика (научно-педагогическая деятельность)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01- 2021, типового учебного плана № G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021, учебных планов: № G31-1-208/уч. от 22.03.2022, № G31-1-220/уч. ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

Чесалин Владимир Иванович, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Гороховик Валентин Викентьевич, заведующий отделом нелинейного анализа ИМ НАН Беларуси, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой



А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Дополнительные главы анализа» – освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

1. Формирование у студентов корректных понятий длины, площади и объема. Изучение понятия меры Жордана.
2. Изучение непрерывных, равномерно непрерывных, абсолютно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в конечномерных пространствах.
3. Изучение интегрируемых по Риману функций: интегрируемость в собственном и несобственном смысле.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к дисциплинам специализации компонента учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи и вариационное исчисление», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дополнительные главы анализа» должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций**:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- корректные определения длины, площади, объема;
- общее понятие меры Жордана;
- основные свойства функций в конечномерных пространствах;

- методы доказательства основных свойств множеств и отображений в конечномерных пространствах.

уметь:

- корректно находить меры множеств на прямой, плоскости;
- устанавливать свойства отображений в конечномерных пространствах;
- применять результаты анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

- основными методами вычисления площади и длины;
- методами доказательств непрерывности, равномерной непрерывности отображений;
- навыками самообразования и способами использования аппарата анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дополнительные главы анализа» отведено:

- в очной форме получения высшего образования: 90 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. МЕРА ЖОРДАНА.

Тема 1.1. *Корректное определение длины, площади, объема.*
Необходимость изучения корректных определений длины, площади, объема.

Тема 1.2. *Общее понятие меры Жордана.* Примеры измеримых и неизмеримых по Жордану множеств.

Раздел 2. СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ.

Тема 2.1. *Свойства отображений.* Определения непрерывных, равномерно непрерывных и абсолютно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица.

Тема 2.2. *Связь между различными классами непрерывных отображений.* Теорема о продолжении.

Раздел 3. ФУНКЦИИ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО РИМАНУ В НЕСОБСТВЕННОМ СМЫСЛЕ.

Тема 3.1. *Функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле.*
Определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося интегралов Римана.

Тема 3.2. *Примеры функций, интегрируемых и неинтегрируемых по Риману.* Вычисление интегралов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы,	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	МЕРА ЖОРДАНА	6			4			
1.1.	<i>Корректное определение длины, площади, объема.</i>	2			2			Опрос, собеседование
1.2.	<i>Общее понятие меры Жордана.</i>	4			2			Дискуссия
2.	СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ	6			6		2	
2.1.	<i>Свойства отображений.</i>	4			4		2	Проверка индивидуальных заданий
2.2	<i>Связь между различными классами непрерывных отображений.</i>	2			2			Контрольная работа № 1
3.	ФУНКЦИИ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО РИМАНУ В НЕСОБСТВЕННОМ СМЫСЛЕ	6			4		2	
3.1	<i>Функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле.</i>	4			2		2	Проверка индивидуальных заданий
3.2.	<i>Примеры функций, интегрируемых и неинтегрируемых по Риману.</i>	2			2			Контрольная работа № 2
	ВСЕГО	18			14		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — <https://e.lanbook.com/book/189430>
2. Антоневи́ч А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955>
3. Антоневи́ч А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907>
4. Кротов В.Г. Математический анализ. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2017. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394>
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
7. Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. М., МЦНМО, 2017.

Перечень дополнительной литературы

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневи́ч А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, собеседование, дискуссия, контрольная работа, проверка индивидуальных заданий.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дополнительные главы анализа» учебным планом предусмотрены **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

1. Проверка индивидуальных заданий – 50 %;
2. контрольная работа – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для самостоятельной работы студентов

Тема 2.1. Свойства отображений. Определения непрерывных, равномерно непрерывных и абсолютно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица.

Студент изучает свойства отображений, исследует отображения на непрерывность, равномерную непрерывность, абсолютную непрерывность, на выполнение условия Липшица для данного отображения.

Форма контроля – проверка индивидуального задания.

Тема 3.1. Функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле. Определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося интегралов Римана.

Студент изучает основные понятия, связанные с интегрируемостью, проверяет, является ли функция интегрируемой по Риману в собственном или несобственном смысле.

Форма контроля – проверка индивидуального задания.

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие № 1. *Корректное определение длины, площади, объема.* Необходимость изучения корректных определений длины, площади, объема.

Занятие № 2 *Общее понятие меры Жордана. Примеры измеримых и неизмеримых по Жордану множеств.*

Занятие № 3. *Свойства отображений. Определения непрерывных, равномерно непрерывных и абсолютно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица.*

Занятие № 4. *Связь между различными классами непрерывных отображений. Теорема о продолжении.*

Занятие № 5. *Функции, интегрируемые по Риману в несобственном смысле. Определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося интегралов Римана.*

Занятие № 6. *Примеры функций, интегрируемых и неинтегрируемых по Риману. Вычисление интегралов.*

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется *метод учебной дискуссии*, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и согласования существующих позиций в определенной задаче.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний при решении задач, определение способов их решения.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- научно-исследовательские работы.

Примерный перечень заданий для контрольных работ

Контрольная работа 1.

Выяснить, является ли множество A измеримым по Жордану (по Лебегу), если

- а) A – множество точек отрезка $[0,1]$, у которых существует десятичное представление, не содержащее цифру 7.
- б) A – множество точек отрезка $[0,1]$, у которых существует пятеричное представление, не содержащее цифру 3.
- с) A – множество всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$.

Контрольная работа 2.

На полуинтервале $[0,1[$ задана мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией

$$F(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \left[0, \frac{6}{13}\right], \\ \frac{3}{4}, & t \in \left]\frac{6}{13}, \frac{7}{13}\right], \\ t + \frac{2}{3}, & t \in \left]\frac{7}{13}, 1\right[, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – канторова лестница.

- а) Доказать, что любое одноточечное множество измеримо по данной мере и найти его меру Лебега-Стилтьеса. Является ли оно измеримым по Жордану?
- б) Найти меру Лебега-Стилтьеса множества рациональных чисел на полуинтервале $[0,1[$.
- с) Найти меру Лебега-Стилтьеса канторова множества K . Является ли оно измеримым по Жордану?

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Множества, операции над множествами, система всех подмножеств $P(X)$.
2. Необходимость введения корректных определений длины, площади, объема.
3. Мера Жордана.
4. Различные свойства отображений. Примеры.
5. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.
6. Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры.
7. σ -аддитивность длины, как меры на системе полуинтервалов.
8. Мера Лебега на отрезке и на прямой: конструкция, множества меры нуль, множество Кантора, неизмеримые множества, сравнение измеримых множеств с борелевскими.

9. Меры Лебега-Стилтьеса: конструкция, мера одноточечного множества, множества меры нуль.
10. Абсолютная непрерывность меры относительно другой меры.
11. Конструкция продолжения меры по Лебегу: внешняя мера, измеримые множества, субаддитивность, критерий измеримости.
12. Основная теорема о продолжении меры по Лебегу.
13. σ -конечные меры и их продолжение по Лебегу.
14. Абсолютно непрерывные функции и порожденные ими меры Лебега-Стилтьеса. Функция Кантора.
15. Необходимость пересмотра понятия интеграла.
16. Измеримые функции, простые функции.
17. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.
18. Различные типы сходимости последовательностей функций. Теорема о пределе последовательности измеримых функций. Замкнутость множества измеримых функций относительно алгебраических операций.
19. Интегрируемые по Лебегу функции, интегральные суммы Лебега, сравнение с интегральными суммами Римана.
20. Непрерывные отображения. Примеры.
21. Равномерно непрерывные отображения. Примеры.
22. Абсолютно непрерывные отображения. Примеры.
23. Отображения, удовлетворяющие условию Липшица. Примеры.
24. Примеры различных типов отображений.
25. Интегрируемые по Риману (в собственном и несобственном смысле) функции.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
2. Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
