Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_______________ О.Г. Прохоренко
«05» июля_ 2023 г.

Регистрационный № УД – 12314/уч.

Функциональный анализ

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)

направления специальности:

1-31 03 08-01 Математика и информационные технологии (веб-программирование и интернет-технологии),

1-31 03 08-02 Математика и информационные технологии (математическое и программное обеспечение мобильных устройств)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 08 - 2021, типового учебного плана № G 31-1-012/пр.-тип от 31.03.2021 г., учебных планов: № G-31-1-011/уч. от 25.05.2021г., № G 31-1-003/уч.ин. от 31.05.2021, №G31-1-004/уч.з от 31.05.2021 г., № G-31-1-017/уч. от 25.05.2021 г., №G31-1-001/уч_ин. от 31.05.2021 г., №G31-1-003уч.з. от 31.05.2021 г., №G31-1-221уч. от 22.03.2022 г., №G31-1-220/уч. от 22.03.2022 г., №G31-1-218уч.з. от 27.05.2022 г., №G31-1-219/уч.з. от 27.05.2022 г., №G31-1-225/уч. ин. от 27.05.2022 г., №G31-1-235/уч. ин. от 27.05.2022 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Антоневич Анатолий Борисович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Лебедев Андрей Владимирович, заведующий кафедрой функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Штин Сергей Львович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доцент;

Чесалин Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Гороховик Валентин Викентьевич, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси;

Кротов Вениамин Григорьевич, профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор______________________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Функциональный анализ» освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

1. Формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега.
2. Изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах.
3. Применение принципа сжимающих отображений к различным задачам.
4. Изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств.
5. Изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов.
6. Изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;
7. Изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится **к модулю** «Основы анализа»1 государственного компонента.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи», «Численные методы».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

универсальные компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

базовые профессиональные компетенции:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты теории меры и интеграла Лебега;
– основные понятия и результаты теории нормированных пространств и операторов в них;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

– выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;
– устанавливать свойства отображений в функциональных пространствах;
– применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

– основными методами вычисления интегралов Лебега;
– методами доказательств и аналитического исследования отображений на непрерывность, равномерную непрерывность, выполнение условия Липшица;
– методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;
– навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ» изучается в 5 и в 6 семестрах очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

– для очной формы получения высшего образования– 210 часов, в том числе 140 аудиторных часов, из них: лекции – 70 часов, практические занятия – 58 часов, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

– в 5 семестре – всего 108 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, практические занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

– в 6 семестре – всего 102 часа, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические занятия – 28 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

Дисциплина изучается в 6-7 семестрах заочной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ» отведено:

– для заочной формы получения высшего образования – 210 часов, в том числе - 32 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, практические занятия – 14 часов, из них:

– в 6 семестре - 102 часа, в том числе 14 аудиторных часов, из них: лекции – 10 часов, практические занятия – 4 часа;

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единиц.

– в 7 семестре - 108 часов, в том числе 18 аудиторных часов, из них: лекции – 8 часов, практические занятия – 10 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет в 6 семестре, экзамен в 7 семестре, предусмотрено написание контрольной работы в 5 и 6 семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория меры и интеграл Лебега

Тема 1.1. Мера Лебега. Системы множеств. Кольца множеств, полукольца, алгебры, сигма-кольца и сигма-алгебры, борелевские множества. Общее понятие меры. Сигма-аддитивная мера. Продолжение меры по Лебегу. Внешняя мера, измеримые множества, множества меры нуль, основная теорема теории меры. Мера Лебега на прямой. Мера Лебега-Стилтьеса.

Тема 1.2. Интеграл Лебега. Измеримые функции, простые функции, интеграл от простой функции, интеграл от измеримой функции, простейшие свойства интеграла Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега. Произведение мер, теорема Фубини.

Раздел 2. Метрические пространства

Тема 2.1. Метрические пространства. Определение и основные примеры функциональных метрических пространств. Топология метрических пространств. Полные метрические пространства. Пополнение метрических пространств. Компактные метрические пространства.

Тема 2.2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. Определения и свойства. Теорема о продолжении. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Раздел 3. Нормированные и гильбертовы пространства

Тема 3.1. Нормированные пространства. Векторные пространства, нормированные пространства. Непрерывность операций сложения и умножения на число. Банаховы пространства. Пополнение нормированных пространств. Критерий конечномерности нормированного пространства.

Тема 3.2. Гильбертовы пространства. Определение скалярного произведения. Неравенство Коши-Буняковского. Гильбертовы пространства. Теорема о проекции. Теорема о рядах Фурье. Критерий существования счетного ортонормированного базиса. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Раздел 4. Линейные операторы

Тема 4.1. Линейные операторы в нормированных пространствах. Связь ограниченности с непрерывностью для линейных операторов. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Различные виды сходимости линейных ограниченных операторов. Теорема Банаха-Штейнгауза. Обратные операторы. Теорема Банаха об обратном операторе. Обратимость оператора, близкого к единичному. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

Тема 4.2. Линейные непрерывные функционалы. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Общий вид линейных непрерывных функционалов в конкретных пространствах. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Теорема о замыкании образа линейного ограниченного оператора.

Тема 4.3. Компактные операторы. Определения и свойства. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах. Уравнения с компактными операторами. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве. Альтернатива Фредгольма для интегральных операторов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	5 семестр							
1	**Теория меры и интеграл Лебега**							
1.1	Мера Лебега	12	10				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, опрос, собеседование
1.2	Интеграл Лебега	12	10				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, контрольная работа №1
2	**Метрические пространства**							
2.1	Метрические пространства	8	4					письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, коллоквиум
2.2	Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения	4	6				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, контрольная работа №2
	Всего за семестр	**36**	**30**				**6**	
	6 семестр							
3	**Нормированные и гильбертовы пространства**							
3.1	Нормированные пространства	4	2					письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, опрос, собеседование

3.2	Гильбертовы пространства	6	6				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, контрольная работа №3
4	**Линейные операторы**							
4.1	Линейные операторы в нормированных пространствах	12	10				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, коллоквиум
4.2	Линейные непрерывные функционалы	6	6					письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, опрос, собеседование
4.3	Компактные операторы	6	4				2	письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, контрольная работа №4
	Всего за семестр	**34**	**28**				**6**	
	Итого	**70**	**58**				**12**	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Теория меры и интеграл Лебега	8	2				письменный отчет по домашним практическим упражнениям
2	Метрические пространства	2	2				письменный отчет по домашним практическим упражнениям
3	Нормированные и гильбертовы пространства	4	4				письменный отчет по домашним практическим упражнениям
4	Линейные операторы	4	6				письменный отчет по домашним практическим упражнениям
	итого	**18**	**14**				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по мат. спец. / А. Б. Антоневич, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. - Минск : БГУ, 2011. – 319 с. – http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907.
2. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа : учебное пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — 2-е изд.,стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 272 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/210290.
3. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной : учебник для вузов / И. П. Натансон. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 560 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/189430.
4. Филимоненкова, Н. В. Конспект лекций по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 176 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система — URL: — https://e.lanbook.com/book/212048.
5. Филимоненкова, Н. В. Сборник задач по функциональному анализу : учебное пособие / Н. В. Филимоненкова. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 240 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/212057.

Перечень дополнительной литературы

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник для студ. мат. спец. вузов / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Минск : БГУ, 2006. - 431 с. – http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955.
2. Радыно, Я. В. Задачи и упражнения по курсу "Функциональный анализ" : учеб.-метод. пособие для студ. мех.-мат. фак. / Я. В. Радыно, В. И. Чесалин, А. Г. Яблонская ; БГУ, Мех.-мат. фак., Каф. функционального анализа. - Минск : БГУ, 2013. - 40 с. —
3. http://elib.bsu.by/handle/123456789/57562.
4. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу : учебное пособие / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — Москва : МЦНМО, 2017. — 336 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: — https://e.lanbook.com/book/92693.
5. Березанский, Ю. М. Функциональный анализ : курс лекций : учеб. пособие для студ. ун-тов, обуч. по спец. "Математика" / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. - Киев : Вища школа, 1990. - 600 с.

6. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов ; [науч. ред. А. В. Бухвалов]. - Изд. 4-е, испр. - Санкт-Петербург : Невский диалект : БХВ-Петербург, 2004. - 814 с.
7. Кириллов, А. А. Теоремы и задачи функционального анализа : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" и "Прикладная математика". - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва : Наука, Главная редакция физико-математической лит., 1988.
8. Антоневич, А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для студ. мат. спец. вузов. — Минск : Вышэйшая школа, 1978.
9. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / Треногин В. А. - 3-е изд. , испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с.
10. Рид, М. Методы современной математической физики : пер. с англ. Т. 1 : Функциональный анализ. - Москва : Мир, 1977.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, собеседования, письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям, коллоквиум, контрольная работа.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» учебным планом предусмотрен **зачет и экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- коллоквиум – 25 %;
- контрольные работы – 50 %;
- письменный отчет по аудиторным (домашним) практическим упражнениям – 25 %

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и экзаменационной отметки – 70%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.1. Мера Лебега. (2ч.)

Найти меру множества. Проверить, является ли множество измеримым. Найти меру Лебега множества, меру Лебега-Стилтьеса.

Форма контроля – *письменный отчет по аудиторным/домашним практическим упражнениям*

Тема 1.2. Интеграл Лебега. (2ч.)

Проверить, является ли данная функция измеримой. Построить эквивалентную функцию заданной. Доказать, что функция является простой, интегрируемой. Найти интеграл Лебега, если он существует. Найти интеграл Лебега-Стилтьеса.

Форма контроля – *контрольная работа* №1

Примерный перечень заданий для контрольной работы №1

1. Найти интеграл Лебега $\int_{[0,1]} f(t)dt$, если он существует, где

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{3^n}, & t \epsilon \left]\dfrac{1}{3^{n+1}}, \dfrac{1}{3^n}\right[\setminus K, \ \ n \in \mathbb{N}, \\ [5^t], & t \in K, \\ \cos t\,, & t \in \left]\dfrac{1}{3}, 1\right[\setminus K. \end{cases}$$

2. На полуинтервале $[0,1[$ задана мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией

$$F(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in \left[0, \dfrac{6}{13}\right], \\ \dfrac{3}{4}, & t \in \left]\dfrac{6}{13}, \dfrac{7}{13}\right], \\ t + \dfrac{2}{3}, & t \in \left]\dfrac{7}{13}, 1\right[, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ – канторова лестница.

a) Доказать, что любое одноточечное множество измеримо по данной мере и найти его меру Лебега-Стилтьеса. Является ли оно измеримым по Жордану?
b) Найти меру Лебега-Стилтьеса множества рациональных чисел на полуинтервале $[0,1[$.

c) Найти меру Лебега-Стилтьеса канторова множества К. Является ли оно измеримым по Жордану?

Тема 2.2. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения. (2ч.)

Изучить основные понятия, связанные с непрерывностью отображений, в частности, определения и их отрицания, принцип сжимающих отображений и его применение к некоторым типам уравнений.

Исследовать отображения метрических пространств на непрерывность в заданной точке, непрерывность всюду, равномерную непрерывность и липшицевость. Применить принцип сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

Форма контроля – *контрольная работа* №2

Примерный перечень заданий для контрольной работы №2

Функция на прямой (отрезке, интервале) удовлетворяет условию Липшица (липшицева), если существует такое L , что для любых x, y из области определения $f(x)$ выполнено условие $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

Задача 1. Докажите, что функция, липшицева на отрезке, непрерывна.

Задача 2. Докажите, что функция $f(x) = x^2$
на отрезке липшицева, а на прямой – нет.

Задача 3. Докажите, что функция $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – произвольный многочлен степени n, на отрезке липшицева, а на прямой – нет.

Задача 4. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ на прямой липшицева, и найдите соответствующую константу Липшица L.

Задача 5. Докажите, что липшицевы функции равномерно непрерывны.

Задача 6. Приведите пример непрерывной, но не липшицевой функции.

Задача 7. Приведите пример непрерывной, но не равномерно непрерывной функции на интервале.

Тема 3.2. Гильбертовы пространства. (2ч.)

В гильбертовом пространстве найти проекцию вектора. С помощью рядов Фурье решить интегральное уравнение.

Форма контроля – *контрольная работа* № 3

Примерный перечень заданий для контрольной работы № 3

1. В гильбертовых пространствах 1) – 12), рассмотренных в задаче предыдущего параграфа, найти разложение в ряд Фурье следующих функций:
1) $x_1(t) = 1 + t$; 2) $x_2(t) = |t| - 1$; 3) $x_3(t) = 1 + t^2$;
4) $x_4(t) = 1 + t - t^3$; 5) $x_5(t) = 2t + t^2$; 6) $x_6(t) = |t| - t + t^3$;
7) $x_7(t) = e^t + 1$; 8) $x_8(t) = e^{2t} + e^{-t}$; 9) $x_9(t) = \cos t$;
10) $x_{10}(t) = \sin 2t + 1$; 11) $x_{11}(t) = t \sin t$; 12) $x_{12}(t) = |\sin t|$.

2. В гильбертовых пространствах $L_2[-1,1]$, $L_2[0,1]$, $L_2[-\pi,\pi]$ и $L_2[0,\pi]$ приблизить функции $x_k(t), 1 \le k \le 10$, тригонометрическими многочленами с точностью до $\varepsilon = 0{,}01$:
1) $x_1(t) = t$; 2) $x_2(t) = |t|$; 3) $x_3(t) = 1 - t^2$; 4) $x_4(t) = t^3$;
5) $x_5(t) = t - t^2$; 6) $x_6(t) = t + t^3$; 7) $x_7(t) = 1 + t - t^2$;
8) $x_8(t) = 2t - t^2$; 9) $x_9(t) = 1 - t^2 + t^3$; 10) $x_{10}(t) = |t| + t + t^3$.

Тема 4.1. Линейные операторы в нормированных пространствах. (2ч.)

Проверить, является ли оператор линейным и ограниченным. Найти норму оператора. Найти обратный оператор.

Форма контроля – *письменный отчет по аудиторным/домашним практическим упражнениям*

Тема 4.3. Компактные операторы. (2ч.) Определить свойства компактности интегральных операторов в конкретных пространствах. Уравнения с компактными операторами. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.

Форма контроля – *контрольная работа* № 4

Примерный перечень заданий для контрольной работы № 4

Задача 1. Является ли оператор $Ax = x(2t)$ компактным в пространствах $L_2[0,1]$ и $C[0,1]$.

Задача 2. При каждом значении λ выяснить с помощью сопряженного уравнения, для каких значений параметров α, β, γ существует решение данного интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(t - 2s)\, x(s) ds + (\alpha - \gamma)t + \alpha + 2\gamma$$

в пространствах $L_2[0, \pi]$ и $C[0, \pi]$.

Примерная тематика практических занятий

Практическое занятие № 1. Системы подмножеств.

Практическое занятие № 2. Мера на кольце множеств. Продолжение меры по Лебегу.

Практическое занятие № 3. Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Практическое занятие № 4. Измеримые функции.

Практическое занятие № 5. Интеграл Лебега.

Практическое занятие № 6. Интеграл Лебега-Стилтьеса. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Практическое занятие № 7. Сходящиеся последовательности в метрических пространствах.

Практическое занятие № 8. Непрерывные отображения.

Практическое занятие № 9. Нормированные векторные пространства.

Практическое занятие № 10. Гильбертовы пространства.

Практическое занятие № 11. Линейные непрерывные операторы в банаховых пространствах.

Практическое занятие № 12. Обратные операторы.

Практическое занятие № 13. Линейные непрерывные функционалы.

Практическое занятие № 14. Сопряженные операторы

Практическое занятие № 15. Компактные операторы. Альтернатива Фредгольма.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: ***эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения,*** которые предполагают**:**

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

– подготовка к практическим занятиям;

– научно-исследовательские работы;

– подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к зачету (5 семестр)

1. Метрические пространства.
2. Основные примеры функциональных метрических пространств.
3. Полные пространства. Теорема о пополнении.
4. Непрерывные, равномерно непрерывные и липшицевы отображения.
5. Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям.
6. Системы подмножеств: кольца, алгебры, сигма-алгебры.
7. Общее понятие меры. Сигма-аддитивные меры.
8. Продолжение меры по Лебегу.
9. Измеримые функции, простые функции.
10. Интеграл от простой функции. Общее определение интеграла Лебега.
11. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.
12. Векторные, нормированные, банаховы пространства.
13. Ряды в банаховых пространствах.
14. Линейные операторы.
15. Норма ограниченного оператора.
16. Пространство линейных ограниченных операторов.
17. Теорема Банаха-Штейнгауза
18. Определение скалярного произведения.
19. Неравенство Коши-Буняковского.
20. Гильбертовы пространства.
21. Теорема о проекции.
22. Теорема о рядах Фурье.
23. Обратимые операторы.

24. Теоремы об обратимости.
25. Теорема Банаха об обратном операторе.
26. Спектр и резольвента линейного ограниченного оператора.
27. Линейные ограниченные функционалы.
28. Теорема Хана-Банаха.
29. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовых и некоторых других конкретных пространствах.
30. Сопряженное пространство.
31. Сопряженный оператор и его свойства.
32. Теорема об условиях разрешимости линейного уравнения
33. Компактные операторы.
34. Компактность интегральных операторов в конкретных пространствах.
35. Теория Рисса-Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.
36. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений.

Примерный перечень вопросов к экзамену (5 семестр)

1. Множества, операции над множествами, система всех подмножеств $P(X)$.

2. Системы подмножеств: кольца, полукольца, алгебры, σ-алгебры. Борелевская алгебра.

3. Необходимость пересмотра понятия интеграла.

4. Общее понятие меры. Свойства: монотонность, σ-аддитивность, непрерывность, субаддитивность, полнота меры.

5. σ-аддитивность длины, как меры на системе полуинтервалов.

6. Конструкция продолжения меры по Лебегу: внешняя мера, измеримые множества, субаддитивность, критерий измеримости.

7. Основная теорема о продолжении меры по Лебегу.

8. σ-конечные меры и их продолжение по Лебегу.

9. Мера Лебега на отрезке и на прямой: конструкция, множества меры нуль, множество Кантора, неизмеримые множества, сравнение измеримых множеств с борелевскими.

10. Меры Лебега-Стилтьеса: конструкция, мера одноточечного множества, множества меры нуль.

11. Абсолютная непрерывность меры относительно другой меры.

12. Абсолютно непрерывные функции и порожденные ими меры Лебега-Стилтьеса. Функция Кантора.

13. Простые функции. Измеримые функции. Приближение измеримых функций простыми.

14. Различные типы сходимости последовательностей функций. Теорема опредеде последовательности измеримых функций. Замкнутость множества измеримых функций относительно алгебраических операций.

15. Интеграл Лебега от простой функции. Интегрируемые по Лебегу функции, интегральные суммы Лебега, сравнение с интегральными суммами Римана.

16. Элементарные свойства интеграла Лебега, неравенство Чебышева.

17. Вопрос о возможности предельного перехода под знаком интеграла.

18. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.

19. Теорема Б.Леви.

20. Теорема Фату.

21. Теорема Радона - Никодима. Формула Ньютона-Лейбница.

22. Произведение мер. Теорема Фубини.

23. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Критерий интегрируемости по Риману.

24. Метрические пространства. Топология метрического пространства.

25. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров. Теорема Бэра.

26. Пополнение метрического пространства.

27. Пространство $L_1[0,1]$ как пополнение пространства $C[0,1]$ с интегральной нормой.

28. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского. Пространства $L_p[0,1]$ их полнота.

29. Принцип сжимающих отображений и его варианты.

30. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям в пространствах $C[a,b]$ и $L_2[T,\mu]$.

31. Интегральные уравнения Вольтерра.

6 семестр

1. Векторные пространства. Понятие топологического векторногопространства. Норма и полунорма. Нормированные пространства.

2. Банаховы пространства. Теорема об абсолютно сходящихся рядах.

3. Линейные ограниченные операторы. Норма оператора. Интегральные операторы в пространствах $C[0,1]$ и $L_2[0,1]$.

4. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.

5. Теорема о проекции.

6. Разложение по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве.

7. Пространство ограниченных линейных операторов. Теорема о полноте пространства операторов. Различные типысходимости последовательностей операторов.

8. Теорема Банаха – Штейнгауза.

9. Обратные операторы, связь с разрешимостью уравнений $Ax = y$. Теоремы о существовании обратных.

10. Теорема Банаха об обратном операторе и ее следствия.

11. Спектр и резольвента оператора. Свойства резольвенты.Теорема о спектре ограниченного линейного оператора.

12. Линейные ограниченные функционалы и сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем вида функционалпа на гильбертовом пространстве.

13. Теорема Хана – Банаха о продолжении ограниченного линейногофункционала.

14. Сопряженный оператор к оператору в банаховых пространствах. Теорема обусловиях разрешимости уравнения $Ax = y$.

15.Сопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Самосопряженные операторы.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
Численные методы	Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры _______________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета_______________________ ________________ _________